当代世界中的数学

数林撷英（二）

朱惠霖 田廷彦○编

SHULIN XIEYING(ER)

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

当代世界中的数学

数林撷英（二）

朱惠霖　田廷彦○编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书详细介绍了数学在各领域的精华应用，同时收集了数学中典型的问题并予以解答.本书适合数学类专业大学师生、研究生及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

当代世界中的数学.数林撷英.二/朱惠霖，田廷彦编.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2019.1

ISBN 978—7—5603—7258—7

Ⅰ.①当…　Ⅱ.①朱…　②田…　Ⅲ.①数学—普及读物 Ⅳ.①O1—49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 026674 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　刘立娟
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451—86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 14.5　字数 290 千字
版　　次　2019 年 1 月第 1 版　2019 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978—7—5603—7258—7
定　　价　38.00 元

序 言

如今，许多人都知道，国际科学界有两本顶级的跨学科学术性杂志，一本是《自然》(*Nature*)，一本是《科学》(*Science*).

恐怕有许多人还不知道，在我们中国，有两本与之同名的杂志①，而且也是跨学科的学术性杂志，只是通常又被定位为"高级科普".

国际上的《自然》和《科学》，一家在英国，一家在美国②. 它们之间，按维基百科上的说法，是竞争关系③.

我国的《自然》和《科学》，都在上海，它们之间，却有着某种历史上的"亲缘"关系. 确切地说，从 1985 年(那年《科学》复刊)到 1994 年(那年《自然》休刊)这段时期，这两家杂志的主要编辑人员，原本是在同一个单位、同一幢楼、同一个部门，甚至是在同一个办公室里朝夕相处的同事!

这是怎么回事呢?

这本《自然》杂志，创刊于 1978 年 5 月. 那个年代，被称为"科学的春天". 3 月，全国科学大会召开. 科学工作者、教育工作者，乃至莘莘学子，意气风发. 在这样的氛围下，《自然》的创刊，是一件大事. 全国各主要媒体，都报道了.

这本《自然》杂志，设在上海科学技术出版社，由刚刚复出的资深出版家贺崇寅任主编，又调集精兵强将，组成了一个业务水平高、工作能力强、自然科学各分支齐备的编辑班子. 正是这个编辑班子，使得《自然》杂志甫一问世，便不同凡响；没有几年，便蜚声科学界和教育界④.

1983 年，当这个班子即将一分为二的时候，上海市出版局经办此事的一位副局长不无遗憾地说，在上海出版界，还从未有过如此整齐的编辑班子呢!

一分为二? 没错. 1983 年，中共上海市委宣传部发文，将《自然》杂志调往上海交通大学. 为什么? 此处不必说. 我只想说，这次强制性的调动，却有一项

---

① 其中的《自然》杂志，在创刊注册时，不知什么原因，将"杂志"两字放进了刊名之中，因此正式名称是《自然杂志》. 但在本文中，仍称其为《自然》或《自然》杂志. 此外，应该说明，在我国台湾，也有两本与之同名的杂志，均由民间(甚至个人)资金维持. 台湾的《自然》，创刊于 1977 年，系普及性刊物，内容以动植物为主，兼及天文、地理、考古、人类、古生物等，1996 年终因财力不济而停办. 台湾的《科学》，正式名称《科学月刊》，创刊于 1970 年，以介绍新知识为主，"深度以高中及大一学生看得懂为原则"，创刊至今，从未脱期，令人赞叹.

② 英国的《自然》，创刊于 1869 年，现属自然出版集团(Nature Publishing Group)，总部在伦敦. 美国的《科学》，创刊于 1880 年，属美国科学促进会(American Association for the Advancement of Science)，总部在华盛顿.

③ 可参见 http://en.wikipedia.org/wiki/Science_(journal).

④ 可参见《瞭望东方周刊》2008 年第 51 期上的"一本科普杂志的 30 年'怪现象'"一文.

十分温情的举措，即编辑部每个成员都有选择去或不去的权利. 结果是，大约一半人选择去交通大学，大约一半人选择不去，留在了上海科学技术出版社.

我属去的那一半. 留下的那一半，情况如何，一时不得而知. 但是到 1985 年，便知道了：他们组成了《科学》编辑部，《科学》杂志复刊了！

《科学》，创刊于 1915 年 1 月，是中国历时最长、影响最大的综合性科学期刊，对于中国现代科学的萌发和成长，有着独特的贡献. 中国现代数学史上有一件一直让人津津乐道的事：华罗庚先生当年就是在这本杂志上发表文章而崭露头角的.《科学》于 1950 年 5 月停刊，1957 年复刊，1960 年又停刊. 1985 年的这次复刊，其启动和运作，外人均不知其详，但我相信，留下的原《自然》杂志资深编辑，特别是吴智仁先生和潘友星先生，无疑是起了很大的甚至是主要的作用的. 复刊后的《科学》，由时为中国科学院副院长的周光召任主编，上海科学技术出版社出版.

于是，原来是一个编辑班子，结果分成两半（各自又招了些人马），一半随《自然》杂志披荆斩棘，一半在《科学》杂志辛勤劳作.

《自然》杂志去交通大学后，命运多舛. 1987 年，中共上海市委宣传部又发文：将《自然》杂志从交通大学调出，"挂靠"到上海市科学技术协会，属自收自支编制. 至 1993 年底，这本杂志终因入不敷出，编辑流失殆尽（整个编辑部，只剩我一人），不得不休刊了. 1994 年，上海大学接手. 原有人员，先后各奔前程.《自然》与《科学》的那种"亲缘"关系，至此结束.

这段多少有点辛酸的历史，在我编这本集子的过程中，时时在脑海里浮现，让我感慨，让我回味，也让我思索……

好了，不管怎么说，眼前这件事还是让人欣慰的：在近 20 年之后，《自然》与《科学》的数学部分，竟然在这本集子里"久别重逢"了！

说起这次"重逢"，首先要感谢原在上海教育出版社任副编审的叶中豪先生. 是他，多次劝说我将《自然》杂志上的数学文章结集成册；是他，了解《自然》和《科学》的这段"亲缘"关系，建议将《科学》杂志上的数学文章也收集进来，实现了这次"重逢"；又是他，在上海教育出版社申报这一选题，并获得通过.

其次，要感谢哈尔滨工业大学出版社的刘培杰先生. 是他，当这本集子在上海教育出版社的出版遇到困难时，毅然伸手相助，接下了这项出版任务①.

当然，还要感谢与我共同编这本集子的《科学》杂志数学编辑田廷彦先生. 是他，精心为这本集子选编了《科学》杂志上的许多数学文章.

他们三人，加上我，用时下很流行的说法，都是不折不扣的"数学控". 我们

---

① 说来有趣，我与刘培杰先生从未谋面，却似乎有"缘"已久. 这次选编这本集子，发觉他早年曾向《自然》杂志投稿，且被我录用，即收入本集子的《费马数》一文. 屈指算来，那该是 20 年前的事了.

以我们对数学的热爱和钟情，为广大数学研究者、教育者、普及者、学习者和爱好者（相信其中也有不少的“数学控”）献上这本集子，献上这些由国内外数学家、数学史家和数学普及作家撰写的精彩数学文章.

这里所说的“数学文章”，不是指数学上的创造性论文，而是指综述性文章、阐释性文章、普及性文章，以及关于人物和史实的介绍性文章. 其实，这些文章，都是可让大学本科水平的读者基本上看得懂的数学普及文章.

按美国物理学家、科学普及作家杰里米·伯恩斯坦（Jeremy Bernstein，1929— ）的说法，在与公众交流方面，数学家排在最后一名①. 大概是由于这个原因，国际上的《自然》和《科学》，数学文章所占的份额，相当有限.

然而，在我们的《自然》和《科学》上，情况并非如此. 在《自然》杂志上，从1984 年起就常设“数林撷英”专栏，专门刊登数学中有趣的论题；在《科学》杂志上，则有类似的“科学奥林匹克”专栏. 许多德高望重的数学大师，愿意在这两本杂志上发表总结性、前瞻性的综述；许多正在从事前沿研究的数学家，乐于将数学顶峰上的无限风光传达给我们的读者. 在数学这个需要人类第一流智能的领域，流传着说不完道不尽的趣事佳话，繁衍着想不到料不及的奇花异卉. 这些，都在这两本杂志上得到了充分的反映.

在编这本集子的时候，我们发觉，《自然》（在下文所说的时期内）和《科学》上的数学好文章是如此之多，多得简直令人苦恼：囿于篇幅，我们必须屡屡面对“熊掌与鱼”的两难，最终又不得不忍痛割爱. 即使这样，篇幅仍然宏大，最终不得不考虑分册出版.

现在这本集子中的近 200 篇文章，几乎全部选自从 1978 年创刊至 1993 年年底休刊前夕这段时期的《自然》杂志，和从 1985 年复刊至 2010 年年底这段时期的《科学》杂志. 它们被分成 12 个版块，每个版块中的文章，基本上以发表时间为序，但少数文章被提到前面，与内容相关的文章接在一起.

还要说明的是，在“数学的若干重大问题”版块中，破例从《世界科学》杂志上选了两篇本人的译作，以全面反映当时国际数学界的大事；在“数学中的有趣话题”版块中，破例从台湾《科学月刊》上选了一篇“天使与魔鬼”，田廷彦先生对这篇文章钟爱有加；在“当代数学人物”版块中，所介绍的数学人物则以 20 世纪以来为限.

这本集子中的文章，在当初发表时，有些作者和译者用了笔名. 这次选入，仍然不动. 只是交代：在这些笔名中，有一位叫“淑生”的，即本人也.

照说，选用这些文章，应事先联系作译者，征求意见，得到授权. 但有些作译

---

① 参见 Mathematics Today：Twelve Informal Essays，Springer-Verlag（1978）p. 2. Edited by Lynn Arthur Steen.

者，他们的联系方式，早已散失；不少作译者，由于久未联系，目前的通信地址也不得而知；还有少数作译者，已经作古，我们不知与谁联系.在这种情况下，我们只能表示深深的歉意.更有许多作译者，可说是我们的老朋友了，相信不会有什么意见，不过在此还是要郑重地说一声：请多多包涵.

在这些文章中，也融入了我们编辑的不少心血.极端的情况是：有一两篇文章是编辑根据作者的演讲提纲，再参考作者已发表的论文，越俎代庖地写成的.尽管我们做编辑这一行的，“为他人作嫁衣裳”，似乎是份内的事，但在这本集子出版的时候，我还是将要为这些文章付出过劳动、做出过贡献的编辑，一一介绍如下，并对其中我的师长和同仁、同行，诚致谢忱.

《自然》上的数学文章，在我 1982 年 2 月从复旦大学数学系毕业到《自然》杂志工作之前，基本上由我的恩师陈以鸿先生编辑；在这之后到 1987 年先生退休，是他自己以及我在他指导下的编辑劳动的成果.此后，又有张昌政先生承担了大量编辑工作；而计算机方面的有关文章，在很大程度上则仰仗于徐民祥先生.

《科学》上的数学文章，在复刊后，先是由黄华先生负责编辑，直至 1996 年他出国求学；此后便是由田廷彦先生悉心雕琢，直到现在；其间静晓英女士也完成了一些工作.当然，《科学》杂志负责复审和终审的编审，如潘友星先生、段韬女士，也是付出了心血的.

回顾往事，感悟颇多.但作为这两本杂志的编辑，应该有这样的共同感受：一是荣幸，二是艰辛.荣幸方面就不说了，而说到艰辛，无论是随《自然》杂志流离，还是在《科学》杂志颠沛，都可用八个字来概括：“筚路蓝缕，以启山林”.

是的，筚路蓝缕，以启山林！

如今，蓦然回首，我看到了：

一座巍巍的山，一片苍苍的林！

《自然》杂志原副主编兼编辑部主任
朱惠霖
2017 年 5 月于沪西半半斋

◎ 目录

欧几里得欠下的一笔老债*

被无数高手名师反复耕耘了两千多年的初等几何园地，似乎已不会有什么新的值得一谈的东西了吧？然而，当代数学教育改革的呼唤，使我们在这个园地中发现了一片新的天地.

一、欧几里得与国王的故事

相传古埃及国王托勒密向欧几里得学习几何.他问:“能不能把你的几何弄得容易一些呢？”这位伟大的学者回答说:“没有一条专为国王而设的通向几何之路！”(There is no royal road to geometry！).

人们总是怀着对欧几里得的钦佩之情和对这位国王的嘲讽之意谈起这个故事，但是平心而论，国王这句话又有什么错呢？作为学生，要求老师讲得精彩些、明白些、容易懂些，难道不是天经地义、合情合理的要求吗？国王虽非先知先觉，但他的要求，其实道出了以后两千年中无数教师与学生的心声.这个要求是向欧几里得提出的，也可以看作向欧几里得的后继者——古今的数学家与数学教育家提出的.

数学家常常提到“优化”.国王的要求,“容易一些”，也是希望数学的体系与方法尽可能优化.欧几里得在当时的科学发展水平上，没有认识到这种优化的重要性与可能性，简单地拒绝

* 井中:《欧几里得欠下的一笔老债》,《自然杂志》1992年第15卷第1期.

了国王的要求.他作为数学家和数学教育家,欠下了一笔债.

两千年来,几何学研究的领域与深度都有了极大的发展.但欧几里得欠下的这笔老债并没有清偿.几何入门的学习并没有变得容易,随着时间的流逝,欠债是要付利息的.现代科学技术的需要和近百年来数学的发展,对中学数学教育,特别是几何教学,提出了更高的要求.不但要求更容易(好让学生有时间学更多的数学课程,如概率初步、集合概念),还要求几何课程同现代数学有更多的联系.于是,正如文[1]中所说:"几何教学的问题仍然是中等数学教育现代化的最复杂的问题之一,它引起了广泛的、世界性的争论,并且出现了许多方案."

确实,近几十年来,世界上许多数学家和数学教育家投身于重建初等几何的工作,其中包括一流的数学大师,如苏联的柯尔莫哥洛夫、法国的迪多内.但是,这些努力并没有得到显著的效果,几何并没有变得更容易.

极为初等的问题难住了大数学家,困难在什么地方呢?

二、矛盾的要求

当代的数学家们,有不少人认为,传统的欧几里得体系或逻辑上更完备的希尔伯特体系非常烦琐,而且把几何从其他数学中孤立起来,阻碍现代思想的渗透,因而它已失去了一切科学价值.流行的看法是,必须拒绝这个体系.

那么,新的体系应当满足哪些要求?我们试试能不能把这个问题提得清楚一些.

第一个要求:起点要低,观点要高;

第二个要求:解题方法要既简捷,又通用;

第三个要求:推理论证要既严谨,又直观.

但这3个要求似乎都是自相矛盾的,这正是问题的困难所在.几十年来,各国的数学家和数学教育家们显然是低估了这些困难.他们从现代数学的现成成果出发,剪裁改造,提出了一个又一个拼盘式的方案,千方百计地把现代数学的丸药包上糖衣塞给孩子们.孩子们却并不买账,这并不奇怪.从学生的领悟水平到数学家的领悟水平,中间有上千年的差距.这差距不可能用几个貌似通俗的例子填补.数学家必须创造出能处理大量初等几何问题的更高明的方法,才能战胜欧几里得.几十年来世界各国在中学数学教育改革上虽然花费了大量人力、财力,但缺乏数学上的真正创造.也许这正是轰轰烈烈的新数学运动之潮来得急、退得快的原因之一吧!

三、并非无解

要求虽然苛刻,但是并非无解.以面积为中心展开平面几何,就是对上述3个似乎都自相矛盾的要求的一个回答.

面积是小学生早已熟悉的几何概念.对于十二三岁的孩子,它是看得见、摸得着的东西.从计算三角形的面积出发讲几何,起点是低的.另外,面积又与许多数学概念有密切联系.面积是行列式、是点的坐标、是正弦函数、是自然对数、是积分、是测度、是泛函、是外积.抓住面积,为引入更高等的数学概念埋下了伏笔.用面积讲几何,观点是高的.

循面积关系做推理论证,如同中国古代数学家用"弦图"证明勾股定理那样,确实是直观且严谨的.

剩下的关键是:能不能从面积出发,创建一套简捷、通用的解题方法呢?

这个问题解决了,答案就完整了.欧几里得欠下的那笔老债,也有了清本偿利的可能.

建立一套方法,要有基本的工具.欧几里得的工具是全等三角形和相似三角形.研究全等与相似并非不重要,因为它们和运动、相似这些几何变换密切相关.但作为解题的基本工具,用全等三角形与相似三角形的方法就暴露出明显的弱点.一个重要的事实是:任意画个几何图形,例如,平面上随机地取几个点,连几条线,这里面往往没有全等三角形和相似三角形.为了用上全等三角形和相似三角形,就要作辅助线.怎么作辅助线,则"法无定法".这正是人们觉得几何题不好做的一个原因.

我们着眼于那些在任何图形中都会出现的基本细胞,从最一般的角度建立工具.什么是在任何图形中都会出现的基本细胞呢?答案就是"共边三角形"与"共角三角形".

四、基本工具——共边定理与共角定理

若两个三角形有一条公共边,就称它们为一对共边三角形;若两个三角形中有一组对应角相等或互补,就称它们为一对共角三角形.

平面上任取4个点A,B,C,D,连上几条线,便会出现许多共边三角形和共角三角形(图1).对这种普遍出现的基本图形,为什么不抓住它们呢?

对共边三角形与共角三角形,我们从小学生已学过的"三角形的面积等于底与高的乘积之半"出发来研究它,于是立刻有推论:共高三角形的面积之比等于底之比.我们把这个平凡而简单的事实叫作基本命题.

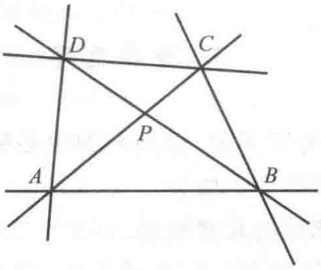

图 1

有了基本命题,便可以引入我们的主要工具 —— 共边定理与共角定理.

共边定理　若直线 AB 与直线 PQ 交于 M,则有

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle QAB}=\frac{PM}{QM}$$

(为了简便,记号 $\triangle PAB$,$\triangle QAB$ 也表示 $\triangle PAB$,$\triangle QAB$ 的面积,下同).

证明　如图 2,有 4 种情形.

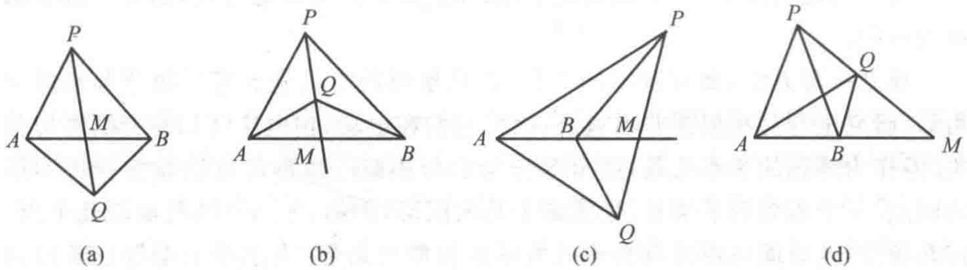

图 2

根据我们的基本命题,在这 4 种情形下都有

$$\triangle PAM=\frac{PM}{QM}\cdot\triangle QAM \tag{1}$$

$$\triangle PBM=\frac{PM}{QM}\cdot\triangle QBM \tag{2}$$

在图 2 的(a) 与(b) 两种情形下,令式(1) + 式(2);在(c) 与(d) 两种情形下,令式(1) − 式(2),即得

$$\triangle PAB=\frac{PM}{QM}\cdot\triangle QAB$$

即

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle QAB}=\frac{PM}{QM}$$

共角定理　若 $\angle ABC$ 与 $\angle A'B'C'$ 相等或互补,则有

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\cdot BC}{A'B'\cdot B'C'}$$

证明 不妨设$\angle ABC$与$\angle A'B'C'$的两边对应重合，或设这两个角互为邻补角，如图 3.

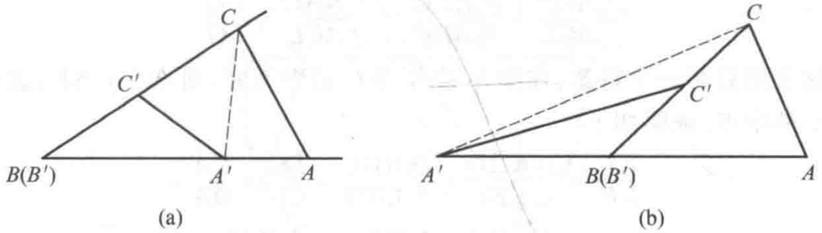

图 3

由基本命题，在图 3 的(a) 与(b) 两种情形下都有

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\triangle ABC}{\triangle A'BC}\cdot\frac{\triangle A'BC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB}{A'B'}\cdot\frac{BC}{B'C'}$$

别看这两个定理得来全不费工夫，它们却出乎意料地有用. 从下面这个例子，略见一斑.

例 1 设$\triangle ABC$的两条中线AM，BN交于G. 求证：$AM=3GM$.

证明 如图 4，由共边定理得

$$\frac{AG}{GM}=\frac{\triangle GAB}{\triangle GBM}=\frac{\triangle GAB}{\triangle GBC}\cdot\frac{\triangle GBC}{\triangle GBM}=\frac{AN}{CN}\cdot\frac{BC}{BM}=2$$

即$AG=2GM$，从而$AM=3GM$.

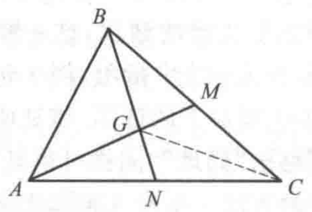

图 4

在通常的几何教科书中，这个题目被认为是颇不简单的命题，出现得较晚. 注意到面积关系，还可以随便给出几种证法，而且起点都很低. 事实上，利用共边三角形，不但可以简捷地导出平面几何中的所有重要基本定理(限于篇幅，不一一列举)，而且还能给出一些更难的问题的证法. 比方说下面这个例子，可以说是奥林匹克水平的问题.

例 2 已知A，B，C，D中任三点不共线，直线AD，BC交于K，直线AB，CD交于L，直线KL与直线AC，BD分别交于G，F. 求证：$\frac{KF}{LF}=\frac{KG}{LG}$.

证明 有 3 种情形，如图 5 的(a) ～ (c).

下面基于共边定理的推导，适于这 3 种情形

$$\frac{KF}{LF}=\frac{\triangle KBD}{\triangle LBD}=\frac{\triangle KBD}{\triangle KBL}\cdot\frac{\triangle KBL}{\triangle LBD}=\frac{DC}{CL}\cdot\frac{KA}{DA}=$$
$$\frac{\triangle ADC}{\triangle ACL}\cdot\frac{\triangle KAC}{\triangle ADC}=\frac{\triangle KAC}{\triangle ACL}=\frac{KG}{LG}$$

这个题目有一个特款:在图 5(a) 中令 G 趋于无穷,则 $AC\parallel KL$,这时 F 恰是 KL 的中点.证明如下

$$\frac{KF}{LF}=\frac{\triangle KBD}{\triangle KBL}\cdot\frac{\triangle KBL}{\triangle LBD}=\frac{DC}{CL}\cdot\frac{KA}{DA}=$$
$$\frac{\triangle ADC}{\triangle ACL}\cdot\frac{\triangle KAC}{\triangle ADC}=\frac{\triangle KAC}{\triangle ACL}=1$$

即

$$KF=LF$$

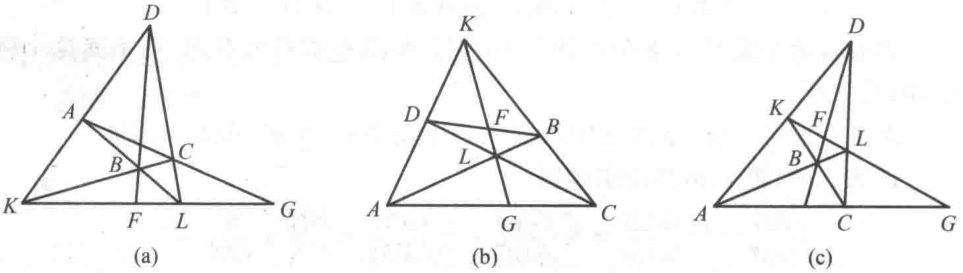

图 5

根据我国著名几何学家苏步青的建议,这一特款曾被选为 1978 年全国中学数学竞赛题.华罗庚教授在文[2]中指出,例 2 包含了射影几何的基本原理.他利用三角函数给出图 5(a) 情形下的证明.该证明长 14 行(如果分式算两行,就是23行),并3次使用省略语"同理""同样可得到""类似地可以证明".我们用简单得多而且起点低得多的方法一举对 3 种情形做出统一的证明,可见建立有力工具是多么重要.

以上例子只用到共边三角形.下面两个例子告诉我们,共角三角形的作用也毫不逊色.

例 3(圆内的蝴蝶定理)[3]　设 M 是圆 O 的弦 AB 的中点,过 M 作圆 O 的另两个弦 CD,EF,弦 CF,DE 分别与 AB 交于 H,G(图 6).求证:$MH=MG$.

证明　注意到图 6 中 $\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$,$\angle C=\angle E$,$\angle D=\angle F$,由共角定理得

$$1=\frac{\triangle \mathrm{I}}{\triangle \mathrm{II}}\cdot\frac{\triangle \mathrm{II}}{\triangle \mathrm{III}}\cdot\frac{\triangle \mathrm{III}}{\triangle \mathrm{IV}}\cdot\frac{\triangle \mathrm{IV}}{\triangle \mathrm{I}}=$$
$$\frac{MC\cdot MH}{MD\cdot MG}\cdot\frac{MD\cdot DG}{MF\cdot FH}\cdot\frac{MF\cdot MH}{ME\cdot MG}\cdot\frac{ME\cdot EG}{MC\cdot CH}=$$

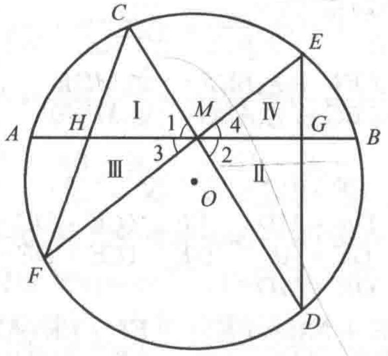

图 6

$$\frac{MH^2 \cdot DG \cdot EG}{MG^2 \cdot FH \cdot CH}=\frac{MH^2 \cdot AG \cdot GB}{MG^2 \cdot AH \cdot HB}$$

记 $MH=x, MG=y, AM=MB=a$，得

$$1=\frac{x^2(a+y)(a-y)}{y^2(a+x)(a-x)}$$

即

$$x^2(a^2-y^2)=y^2(a^2-x^2)$$

展开并合并同类项得 $x^2=y^2$，即 $MH=MG$.

下面的例子是第 31 届国际数学奥林匹克试题之一，它难住了许多解题能手. 但如果熟悉共角定理及面积方法，这个题目就不算难题了.

例 4　圆内两弦 AB, CD 交于 E，在 BE 上取一点 M，过 M, D, E 作圆，再作此圆在 E 处的切线分别交直线 BC, AC 于 F, G. 若已知 $AM=\lambda BM$，求 $\frac{GF}{EF}$.

解　注意到图 7 中标出的等角

$$\angle AEG=\angle EDM, \angle CEF=\angle EMD$$

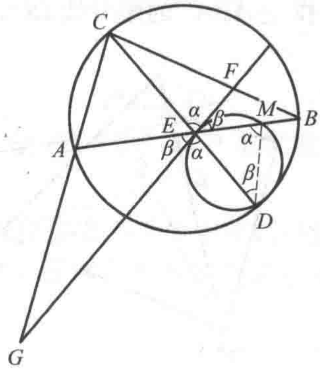

图 7

利用面积关系及共角定理得

$$\frac{BE}{AE}=\frac{\triangle BEC}{\triangle AEC}=\frac{(\triangle CEF+\triangle BEF)}{(\triangle CEG-\triangle AEG)}\cdot\frac{\triangle MDE}{\triangle MDE}=\frac{\dfrac{\triangle CEF}{\triangle MDE}+\dfrac{\triangle BEF}{\triangle MDE}}{\dfrac{\triangle CEG}{\triangle MDE}-\dfrac{\triangle AEG}{\triangle MDE}}=$$

$$\frac{\dfrac{EF\cdot CE}{ME\cdot MD}+\dfrac{EF\cdot BE}{DE\cdot MD}}{\dfrac{GE\cdot CE}{ME\cdot MD}-\dfrac{GE\cdot AE}{DE\cdot MD}}=\frac{EF}{GE}\cdot\frac{(CE\cdot DE+ME\cdot BE)}{(CE\cdot DE-ME\cdot AE)}=$$

$$\frac{EF(AE\cdot BE+ME\cdot BE)}{GE\cdot(AE\cdot BE-ME\cdot AE)}=\frac{EF\cdot BE(AE+ME)}{GE\cdot AE(BE-ME)}=$$

$$\frac{EF}{GE}\cdot\frac{BE}{AE}\cdot\frac{AM}{BM}=\lambda\cdot\frac{EF}{GE}\cdot\frac{BE}{AE}$$

所以

$$GE=\lambda EF$$

即

$$GF=(1+\lambda)EF$$

五、广义共角定理

共边定理与共角定理还没有涉及几何不等式，并且它们只涉及线段比而不直接涉及线段长的计算. 因此，我们需要一个与不等式有关的工具.

广义共角定理 若 $\angle ABC+\angle A'B'C'<180°$，并且 $\angle ABC>\angle A'B'C'$，则

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}>\frac{AB\cdot BC}{A'B'\cdot B'C'}$$

证明 如图 8，把 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 沿 BC，$B'C'$ 拼合，使 B 与 B' 重合，连 AA' 与 BC 交于 P，并作 $\angle ABA'$ 的平分线 BQ，则

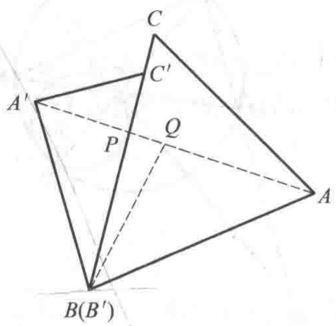

图 8