Shuxue Fenxi

China University of Mining and Technology Press

数学分析

下册

臧子龙　严兴杰　主编

中国矿业大学出版社

数 学 分 析

（下 册）

臧子龙 严兴杰 主编

中国矿业大学出版社

内容提要

本书是为报考硕士研究生的学生，并兼顾正在学习数学分析的学生编写的复习指导书.目的是帮助他们从概念和方法两方面深化、开拓数学分析所学内容.

全书按数学分析课内容分为8章.每章由基本概念分析和解题方法分析两部分组成.前一部分，针对学生学习时易出现的错误，设计编写了各种形式的问题，以引导读者对基本概念、基本理论进行多侧面、多层次、由此及彼、由表及里的思索和辨析；后一部分则着重分析解题思路，探究解题规律，归纳、总结解题方法.

本书对读者掌握分析问题和处理问题的方法和技巧有较好的指导作用.所选例题、习题，内容广泛，且具有与硕士研究生入学考试相当的水平。本书对从事数学分析教学和指导大学生数学竞赛的教师也有参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析:全2册 / 臧子龙，严兴杰主编.
—徐州:中国矿业大学出版社，2018.9

ISBN 978-7-5646-4147-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①藏… ②严… Ⅲ.①数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 227457 号

书　　名　数学分析
主　　编　臧子龙　严兴杰
责任编辑　王加俊
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885767　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　江苏淮阴新华印刷厂
开　　本　787×1092　1/16　**本册印张** 10.75　**本册字数** 268 千字
版次印次　2018年9月第1版　2018年9月第1次印刷
总 定 价　39.80元(上下册)
（图书出现印装质量问题，本社负责调换）

前　言

数学分析对于大学数学专业和其他许多专业的重要性是无须多言的. 同时，由于数学分析课程内容的极度丰富性，要想仅通过一个教程就尽得其精华，往往很难实现. 因此，学完这门课的很多人，特别是那些准备报考硕士研究生的学生，都还要进行一次乃至数次再学习. 这不仅为了温故而知新，更为了在理解和运用两方面有质的提高. 自然，在这样的过程中，除了对原有教材的充分发掘，他们还希望从各种合适的参考书中汲取营养.

作者在兰州城市学院数学学院和中国矿业大学数学学院连续数年讲授数学分析课程，从我们的教学中感到很需要有一本从概念和方法两方面对学生有指导作用的参考书，以便于指导报考硕士生的学生复习，也便于正在学习数学分析的学生提高数学素养. 为此，我们编写了此书. 其用意在于激励读者独立地思考，形成良好的数学分析思维习惯. 一个想法使用一次是一个技巧，经过多次使用就成为一种方法.

本书分为上、下两册，上册由臧子龙主编，下册由严兴杰主编. 全书共 8 章，每章由基本概念分析和解题方法分析两部分组成. 在基本概念分析中，我们围绕一些重要的定义和定理编写各种形式的问答题并加以分析研讨，借以引导读者对基本概念进行多侧面、多层次、由此及彼、由表及里的思索和辨析；在解题方法分析中，则通过对各类有代表性题目的分析、论证和评注，帮助读者掌握思考问题和处理问题的正确方法. 两部分之后均配有一定数量的练习题. 例题、习题和问题大都精选自国内外有关资料或由平时教学积累所得，具有与硕士生入学考试大致相当的难度. 结合教学经验，部分习题给出完整的解答过程，有的仅仅给出提示，其余留作练习.

近年来国内外数学分析参考书籍的编写相当踊跃，其中颇多佳作. 因此，一本不具特色的书也就失去了问世的意义. 本书试图在以下两个维度赋予本书以新意：一是站在引导读者独立思考和演练的立场上，而不是系统地讲授知识、概括结论、提供答案，从而使之具有独立于一般教科书而存在的价值. 二是努力在“分析”二字上下功夫. 在解答问题时，不仅答其然，而且要讲清其所以然；不仅要答其所问，而且要追根溯源，举一反三. 在讲解例题时，则把很大篇幅用于分析解题思路和探究解题规律上，至于解答过程则往往叙述较略，以留给读者更多的用武之地. 然而，限于我们的水平，这一主观设想的特点可能并未得到充分体现.

在本书的编写过程中，兰州城市学院数学学院和中国矿业大学数学学院的广大教师提出了许多宝贵的意见，尤其是承担数学分析课程教学任务的教师，提出了不少建议，在此我们表示衷心的感谢。本书的出版得到了国家自然科学基金项目(11501560)和中国矿业大学数学学院“十三五”品牌专业教学改革与建设项目的支持.

由于编者水平所限，不妥之处，敬请批评指正.

编者

2018 年 7 月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

5 级　数

基本概念分析

§5.1　数项级数的收敛性

问题 5.1.1　根据下列每一条件能否断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛?

(1) $\forall$ 正整数 p, $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0$;

(2) 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界,且 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 皆收敛,且 $b_n\leqslant a_n\leqslant c_n, n=1,2,\cdots$;

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ 皆收敛.

答:(1) 不能.这与问题 1.1.7(1) 的道理是一样的.

(2) 不能.当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为变号级数时,可能发散.例如 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin\sqrt{n}-\sin\sqrt{n-1})$,显然 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n}-\sin\sqrt{n-1})=0$,部分和 $S_n=\sin\sqrt{n}$ 有界,但 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在.

当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为同号时,仅由 $\{S_n\}$ 有界即可推出其收敛性.

(3) 能.显然 $\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k$,利用 Cauchy 准则即知.

或者用下面的方法说明:$0\leqslant a_n-b_n\leqslant c_n-b_n$,因 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-b_n)$ 收敛,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ 收敛.从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

注意,不能对部分和数列直接应用两边夹法则证明此题.因为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 不一定相等.

(4) 能.分别用 $S_n, S_n^{(1)}, S_n^{(2)}$ 记级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 的部分和,则 $S_{2n}=S_n^{(1)}+S_n^{(2)}$, $S_{2n+1}=S_{n+1}^{(1)}+S_n^{(2)}$.于是 $\lim_{n\to\infty} S_{2n}=\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$.也就是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$.

问题 5.1.2 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，是否一定有以下结论？

(1) $\{na_n\}$有界；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$；

(3) 若 $a_n > 0(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$；

(4) 若$\{a_n\}$单调，则$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

答：(1)，(2)，(3) 均不一定. 分别举例如下：

(1)，(2) 中 $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

(3) 如果 n 为整数的平方，令 $a_n = \dfrac{1}{n}$，否则令 $a_n = \dfrac{1}{n^2}$. 则 $na_n \not\to 0(n\to\infty)$. 但 $\forall n$，部分和 $S_n = \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq p^2}}^{n} \dfrac{1}{k^2} + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq p^2}}^{n} \dfrac{1}{k}$，此处 p 为满足 $p^2 \leqslant n$ 的一切正整数. 于是

$$S_n \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty.$$

从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

(4) 此时必有$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$. 证明见例 5.5.8.

问题 5.1.3 能否说："$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充要条件是对$\{a_n\}$的任一子列$\{a_{n_k}\}$，都有$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n_k}$收敛"？如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是绝对收敛的，结论如何？

答：由问题 5.1.1(4) 的结果知道，只要$\{a_n\}$的奇数项和偶数项子列构成的级数收敛，就有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛. 但必要性一般不能成立. 例如，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$收敛，而$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{2k-1}\dfrac{1}{2k-1}$和$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{2k}\dfrac{1}{2k}$皆发散，一般，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为条件收敛级数，则其正项子列和负项子列构成的级数均发散.

当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为绝对收敛级数时，结论变为肯定的. 即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为绝对收敛的充要条件是对$\{a_n\}$的任一子列$\{a_{n_k}\}$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n_k}$收敛. 实际上，若$\{a_{n_k}\}$为$\{a_n\}$的任一子列，则有

$$\sum_{k=1}^{l}|a_{n_k}| \leqslant \sum_{k=1}^{n_l}|a_k| \quad (l=1,2,\cdots)$$

因此$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n_k}$为绝对收敛. 反之，只要$\{a_n\}$的正项子列和负项子列构成的两个级数收敛，就有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛.

问题 5.1.4 设 $a_n > 0$，记 $S(a_n) = \sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，$r(a_n) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k$，

(1) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，是否一定有比它收敛更慢的正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$（即 $b_n > 0, r(a_n) = o(r(b_n))(n \to \infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛）？

(2) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，是否一定有比它发散更慢的正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$（即 $b_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S(a_n)}{S(b_n)} = \infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散）？

答：(1) 是. 记 $b_n = \sqrt{r(a_{n-1})} - \sqrt{r(a_n)}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，且$\dfrac{r(a_n)}{r(b_n)} = \sqrt{r(a_n)} \to 0$ $(n \to \infty)$.

(2) 是. 记 $b_n = \sqrt{S(a_n)} - \sqrt{S(a_{n-1})}$，其中 $S(a_0) = 0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散. $\dfrac{S(a_n)}{S(b_{\partial n})} = \sqrt{S(a_n)} \to \infty (n \to \infty)$.

本题表明，不存在收敛速度最慢的收敛级数，也不存在发散速度最慢的发散级数.

问题 5.1.5 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n (a_n \geqslant 0)$ 为交错级数. 由下列每一条件能否断定其收敛？

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 0$.

答：(1) 不能. 例如

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} &= \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{4}+1} - \frac{1}{\sqrt{5}-1} + \cdots \\
&= (\sqrt{2}-1) - \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) + \frac{1}{3}(\sqrt{4}-1) - \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n+1}}{n} - \frac{1}{n}\right].
\end{aligned}
$$

这个级数为交错的，且一般项趋于零，但发散. 因为它是收敛的交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}$ 与发散的调和级数之差.

(2) 能. 证明如下：

设$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p > 0$，则当 n 充分大时，$\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 > 0$. 即 $a_n > a_{n+1}$.

另一方面，由所给条件可推出 $a_n = o\left(\dfrac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)(0 < \varepsilon < p)$.（见例 1.6.3）

从而$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 由 Leibniz 判别法即知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

问题 5.1.6 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 问下列级数一定收敛吗？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$(设 $a_n > 0$);

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$(设 $a_n > 0$).

如果对(1),(2),(3) 也假定 $a_n > 0$,结论有无变化?

答:(1) 不一定. 例如 $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

(2) 不一定. 例如级数

$$1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \cdots - \overbrace{\frac{1}{n\sqrt[3]{n}} - \cdots - \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}}^{n个} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \cdots$$

收敛.(可利用下面的问题 5.1.7(3) 的结果证明)

但其相应各项的三次方的级数发散. 事实上,此时级数的部分和为

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2^3 \cdot 2} - \frac{1}{2^3 \cdot 2} + \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n^3 \cdot n} - \cdots - \frac{1}{n^3 \cdot n} + \frac{1}{n} \\ & = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}\right) \to \infty (n \to \infty). \end{aligned}$$

(3) 一定. 由运算性质即知.

(4) 一定. $0 < \sqrt{a_n a_{n+1}} \leqslant \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2} (n = 1,2,\cdots)$.

(5) 不一定. 例如 $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.

当假定(1),(2),(3) 中 $a_n > 0$ 时,(1),(2) 均变为肯定的结论. 因为当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时,$a_n \to 0 (n \to \infty)$. 故对充分大的 n,$0 < a_n^3 < a_n^2 < a_n$,由正项级数比较法即知.(3) 的结论和原来一样.

注:设 $u_k > 0, u_k \neq 1$,求证:$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k < \infty \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^2 < \infty, \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{u_k}{1-u_k} < \infty$.

证明:由于 $u_k \to 0$,故由常数 $k_0 > 0$,使凡 $k > k_0$ 时,恒有 $0 \leqslant \dfrac{u_k}{1-u_k} \leqslant 2u_k, u_k^2 \leqslant u_k$ 故由比较判别法立即得证.

问题5.1.7 把级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项不变更次序进行组合得到级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n, A_n = \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i (1 = p_1 < p_2 < \cdots)$. 在下列每一情形,由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛可以推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛吗?

(1) $a_n > 0 (n = 1,2,\cdots)$;

(2) $a_n \to 0 (n \to \infty)$,且每一 A_n 中所含 a_n 的项数均不超过 m(m 为预先给定的正整数);

(3) 若 A_n 中各项 a_i 同号；

(4) A_n 与 A_{n+1} 异号.

答：(1) 可以. 当 $a_n \geqslant 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 为单调递增，$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的部分和数列 $\{\overline{S_n}\}$ 为 $\{S_n\}$ 的子列. 故由 $\{\overline{S_n}\}$ 收敛可推出 $\{S_n\}$ 收敛.(问题 1.2.2(4)).

(2) 可以. 证明见例 5.5.1.

(3) 可以. 证明见例 5.5.1.

(4) 不可以. 例如级数

$$1+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}-1\right)+\left(1-\frac{4}{5}\right)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

收敛. 但去括号后的级数一般项不趋于 0，显然发散.

问题 5.1.8　设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为条件收敛级数.

(1) 能否对其重排使成为绝对收敛级数?

(2) 能否对其重排使收敛于任一指定的实数?

(3) 能否对其重排使成为发散级数?

(4) 重排后使每项离开原有位置不超过 m 个位置(m 为预先给定的正整数)，是否改变其收敛性?

(5) 如果对任给的正整数 m，重排后的级数都有无穷多项离开原位置超过 m 个位置，新级数是否必发散?

答：(1) 不能. 因为绝对收敛级数的任一重排仍是绝对收敛的. 所以，如果重排后的级数绝对收敛，则原级数看作它的重排时，也将是绝对收敛的.

(2) 能. 这就是通常所说的 Riemann 定理.

(3) 能. 这也是 Riemann 定理的一部分.

(4) 不改变. 可证明如下：

设原级数和重排后的级数的前 n 项部分和分别为 S_n 和 σ_n. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ 且 $|a_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{2m}$，$|a_{n+2}| < \frac{\varepsilon}{2m}$，….

今考虑 σ_{n+m}. 它一定包含原级数的前 n 项及级数中的第 $n+1$ 至 $n+2m$ 项中的 m 项. 故当 $n > N$ 时

$$|\sigma_{n+m} - S| < |S_n - S| + \frac{\varepsilon}{2m}\cdot m = \varepsilon.$$

故知重排后的级数仍收敛且与原级数有相同的和.

(5) 不一定. 例如，对 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 按如下方式重排：使第 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 项与 $\frac{1}{2}n(n+3)$ 项交换位置，$n=1,2,3\cdots$，其余各项均不变，则被交换两项偏离原位置的位数为

$$\frac{1}{2}n(n+3)-\frac{1}{2}n(n+1)=n \quad (n=1,2,\cdots)$$

所以总有这样的无穷多项离开原位置的位数超过 m. 另一方面，设级数重排前后的部分和分

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

别为 S_n 和$\overline{S}_n$，则对任意正整数 k，

$$\frac{1}{2}n(n+1)\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}n(n+3),$$

有

$$|S_k-\overline{S}_k|\leqslant|a_{\frac{1}{2}n(n+1)}|+|a_{\frac{1}{2}n(n+3)}|.$$

由此即知重排未改变级数的收敛性及和数.

问题 5.1.9 根据下面每一条件能否断定$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛?

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 皆收敛；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 皆收敛，且至少有一个绝对收敛；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$b_n\to 1(n\to\infty)$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，$b_n\to 1(n\to\infty)$.

答：(1) 不能. 例如由$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛不能断定$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛(问题 5.1.6).

(2) 能. 例如设$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则由$\{b_n\}$有界，$|b_n|\leqslant M$，从而$|a_nb_n|\leqslant M|a_n|$. 于是$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

(3) 不能. 例如，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}\to 1(n\to\infty)$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 发散(问题 5.1.5).

(4) 能. 实际上只要$\{b_n\}$有界就可以了(见(2)).

问题 5.1.10 根据下面每一条件能否断定$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k+1}a_ib_j\right)$的敛散性?

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 皆收敛；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 皆收敛；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 皆发散.

答：(1) 不能断定. 例如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}(\alpha>0)$ 及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}(\beta>0)$ 的积当 $\alpha+\beta>1$ 时收敛，当 $\alpha+\beta<1$ 时发散. 这一事实是例 5.5.7 的直接推论.

(2) 能断定两级数的乘积收敛. 这是经过推广的 Cauchy 乘积定理.

证明：设 $A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k\to A$，$B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k\to B$，$C_n=\sum_{k=0}^{n}c_k$，$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|=A'$，$|B_n|\leqslant B'$，则

$$A_nB - C_n = a_0(B - B_n) + a_1(B - B_{n-1}) + \cdots + a_n(B - B_0).$$

从而

$$|A_nB - C_n| \leqslant \sum_{v=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} |a_v||B - B_{n-v}| + \sum_{v=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} |a_v||B - B_{n-v}|$$

$$\leqslant A' \max_{\left[\frac{n}{2}\right] \leqslant k \leqslant n} |B - B_k| + 2B' \sum_{v=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} |a_v|,$$

可知 $A_nB - C_n \to 0$，即 $C_n \to AB(n \to \infty)$.

(3) 不能断定.乘积也发散的例子容易举出.故我们只说明乘积可能为收敛.

级数 $1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ 和 $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$均为发散的(一般项都不趋于零).

设乘积为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$.则

$$c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) - \cdots - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2 + \frac{1}{2^2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2 + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} - \cdots - \frac{1}{2^2} - \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{2^{n+1}} = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

即$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\right)$收敛(且是绝对收敛).

§5.2 函数项级数的一致收敛性

问题 5.2.1 下列说法可否作为$\{f_n(x)\}$在区间 I 上一致收敛的充分必要条件?

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N$ 时$\sup\limits_{x \in I}|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, p = 1, 2, \cdots$.

(2) $\{f_n(x)\}$的任一子函数列$\{f_{n_k}(x)\}$在 I 一致收敛;

(3) 有在 I 上定义的函数 $f(x)$,使 $\forall \{x_n\} \subset I, \lim\limits_{n \to \infty}|f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$;

(4) 对任意$[a,b] \subset I$, $f_n(x)$ 在$[a,b]$一致收敛.(此时说 $f_n(x)$ 在 I 内闭一致收敛).

答:(1),(2),(3) 均可以.

(1) $\{f_n(x)\}$在 I 一致收敛的充要条件为满足 Cauchy 准则:$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N$ 时,$\forall x \in I$ 和 $p = 1, 2\cdots$,有$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$,易知这与(1) 的说法等价.

(2) $\{f_n(x)\}$可看作自己的子列,故充分性为显然的.必要性可由定义直接证得.

(3) 任取 $x_n \in I$,则$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \sup\limits_{x \in I}|f_n(x) - f(x)|$.故必要性显然.

充分性.若$\{f_n(x)\}$不一致收敛于 $f(x)$,则 $\exists \varepsilon_0 > 0$,对 $\forall N, \exists n > N$ 和 $\xi_n \in I$,使$|f_n(\xi_n) - f(\xi_n)| \geqslant \varepsilon_0$.于是,对于 $N = 1, \exists n_1 > 1$ 和 $\xi_1 \in I$,使$|f_{n_1}(\xi_1) - f(\xi_1)| \geqslant \varepsilon_0$.对于 $N = n_1, \exists n_2 > n_1$ 和 $\xi_2 \in I$,使$|f_{n_2}(\xi_2) - f(\xi_2)| \geqslant \varepsilon_0, \cdots$,对于 $N = n_{k-1}, \exists n_k > n_{k-1}$ 和 $\xi_k \in I$ 使$|f_{n_k}(\xi_k) - f(\xi_k)| \geqslant \varepsilon_0, \cdots$.今取 $x_n \in I(n = 1, 2, \cdots)$,使 $x_{n_k} = \xi_k(k = 1, 2, \cdots)$,则$\{|f_n(x_n) - f(x_n)|\}$不收敛于零,与已知矛盾.

(4) 是必要而非充分条件.例如 $f_n(x) = x^n$ 在(0,1) 内闭一致收敛但在(0,1) 不是一致收敛的.

问题 5.2.2 若 I 为有界或无界的任一区间. 由下列每一条件能否推出 $\{f_n(x)\}$ 在 I 的一致收敛性?再设 I 为有界闭区间,结论有何变化?

(1) 在 I 上 $\{f_n(x)\}$ 处处收敛,且有子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 一致收敛;

(2) $\forall x \in I, h_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g_n(x)(n=1,2,\cdots)$,且 $\{h_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$ 都是一致收敛的;

(3) $\{f_n(x)\}$ 的某一重排一致收敛;

(4) $\{f_n(x)\}$ 对每一 $x \in I$ 为单调数列,且 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致有界;

(5) $\{f_n(x)\}$ 为 I 上单调连续函数列,且处处收敛于一个连续函数 $f(x)$;

(6) $\forall x,y \in I, |f_n(x)-f_n(y)| \leqslant K|x-y|, n=1,2,\cdots$. 且 $\{f_n(x)\}$ 在 I 处处收敛于 $f(x)$.

答:(1) 不能. 例如 $g_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$ 和 $h_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ 在 $[0,1]$ 上都收敛于 0,但它们在 $[0,1]$ 上分别是一致收敛和不一致收敛的. 因此,若令 $f_{2n}(x)=g_n(x), f_{2n+1}(x)=h_n(x)$,则 $f_n(x)\to 0$,且 $\{f_{2n}(x)\}$ 一致收敛,但 $\{f_n(x)\}$ 不一致收敛.

(2) 不能. 若再假定 $\{h_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$ 的极限函数相同,则结论变为肯定的(两边夹法则).

(3) 可以. 只要证明一致收敛函数列的任一重排仍一致收敛. 因为对 $\{f_n(x)\}$ 的重排相当于对数列 $\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$ 的重排,故知重排不会影响一致收敛性(问题 1.1.3(2)).

(4) 不能. 例如 $f(x)=x^n$ 在 $[0,1]$ 上单调且一致有界,但不一致收敛.

(5) 不能. 例如 $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$ 在 $(0,1)$ 单调趋于 0,但不一致收敛.

(6) 不能. 例如 $f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}$, 因 $|f_n'(x)|=\left|\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{x}{n}\right|\leqslant 1$, 故 $\forall x,y$, $|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant|x-y|$. 但在 $(-\infty,+\infty)$ 非一致收敛.

当设 $I=[a,b]$ 为有界闭区间时,(1) ~ (4) 显然结论不变. 但(5),(6) 均变为肯定的. (5) 即为 Dini 定理,(6) 为例 5.6.2.

问题 5.2.3 设在 (a,b), $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$,由下列每一条件能否断定收敛不是一致的?

(1) $f_n(x)$ 在 a 右连续 $(n=1,2,\cdots)$,但 $\{f_n(a)\}$ 发散;

(2) $f_n(x)$ 在 a 右连续 $(n=1,2,\cdots)$,而 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 不存在;

(3) $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 不是一致有界的;

(4) $f_n(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 不连续, $n=1,2,\cdots$,但 $f(x)$ 在 x_0 连续.

答:(1),(2) 能够断定收敛是非一致性的. 只要证明:若 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 一致收敛,且 $f_n(x)$ 在 a 点右连续,则 $\{f_n(a)\}$ 收敛,且 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 必存在. $\forall \varepsilon>0, \exists N, n>N$ 时, $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon, p=1,2,\cdots$. 令 $x\to a+0$ 得 $|f_{n+p}(a)-f_n(a)|\leqslant\varepsilon$. 故 $\{f_n(a)\}$ 满足 Cauchy 准则. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)=A$. 于是 $\exists N_0$,使 $|f_{N_0}(a)-A|<\dfrac{\varepsilon}{3}$,且 $\forall x\in(a,b)$, $|f_{N_0}(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 对固定的 N_0,由 $f_{N_0}(x)$ 在 a 右连续,则 $\exists\delta>0$,当 $a<x<a+\delta$

时，$|f_{N_0}(x)-f_{N_0}(a)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 于是当 $a<x<a+\delta$ 时

$$|f(x)-A|\leqslant|f(x)-f_{N_0}(x)|+|f_{N_0}(x)-f_{N_0}(a)|+|f_{N_0}(a)-A|<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=A$ 存在.

(3) 不能. 例如在任一一致收敛函数列前添加一项在 (a,b) 无界的函数，显然不影响其一致收敛性，但却不能一致有界. 但我们容易看出，若 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于在 (a,b) 有界的函数 $f(x)$，则 $\exists N,n>N$ 时，$\{f_n(x)\}$ 一致有界.

(4) 不能. 例如 $f_n(x)=\dfrac{1}{n}D(x)$ 处处不连续，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 处处连续，且由 $|f_n(x)-0|\leqslant\dfrac{1}{n}$ 知收敛为一致的.

问题 5.2.4 设 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 一致收敛于 $f(x)$，问下列说法是否正确：

(1) 若 $\forall x\in I,f(x)>C$. 则 $\exists N,n>N$ 时，$\forall x\in I,f_n(x)>C$；

(2) 改(1) 中结论的"$f_n(x)>C$" 为"$f_n(x)\geqslant C$"；

(3) 改(1) 中结论的"$f_n(x)>C$" 为"$f_n(x)>C-\varepsilon$"，ε 为任意正数.

答：(1)，(2) 均不对. 只要举出(2) 的反例就行了.

设 $f_n(x)=\dfrac{n}{n+1}\arctan x$. 则在 $(1,+\infty)$ 内，$f_n(x)$ 一致收敛于 $\arctan x$，且 $\forall x\in(1,+\infty)$，$\arctan x>\dfrac{\pi}{4}$. 但 $\forall$ 正整数 N，$\exists n_0=N+1>N$ 和 $x_0=\tan\dfrac{(2n+3)\pi}{8N+8}>1$，使

$$\frac{n_0}{n_0+1}\arctan x_0=\frac{N+1}{N+2}\cdot\frac{(2N+3)\pi}{8N+8}<\frac{\pi}{4}.$$

(3) 正确. 根据一致收敛的定义直接可证.

问题 5.2.5 由下列每一条件能否断定：有界闭区间 $[a,b]$ 上的函数列 $\{f_n(x)\}$ 必含有一致收敛的子函数列？

(1) $\forall x\in[a,b]$，$\{f_n(x)\}$ 为有界数列；

(2) 在 $[a,b]$ 上 $\{f_n(x)\}$ 一致有界；

(3) $\forall x\in[a,b]$，$\{f_n(x)\}$ 有界，且 $\forall x,y\in[a,b]$，$|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant K|x-y|$，$n=1,2,\cdots$. K 为正的常数；

(4) $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 可微，$n=1,2,\cdots$. 对某个 $x_0\in[a,b]$，$\{f_n(x_0)\}$ 收敛，$\{f'_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致有界.

答：(1)，(2) 不能. 只要对(2) 举出反例就可以了.

设 $f_n(x)=\dfrac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}$，$0\leqslant x\leqslant1$，$n=1,2,\cdots$. 则显然 $|f_n(x)|\leqslant1$，$x\in[0,1]$，$n=1,2,\cdots$. 但 $\{f_n(x)\}$ 不含一致收敛的子列. 因为显然 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，但 $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=1$，$n=1,2,\cdots$. 故对任意 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，$f_{n_k}\left(\dfrac{1}{n_k}\right)=1$，$\{f_{n_k}(x)\}$ 不能一致收敛于 0.

(3) 可以. 证明见例 5.6.2.

(4) 可以. 设 $|f'_n(x)|\leqslant K$，$\forall x\in[a,b]$，$n=1,2,\cdots$. 则

$$\forall x,y\in[a,b],|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant K|x-y|.$$

因此,根据(3) 只要证明 $\forall x\in[a,b]$,$f_n(x)$ 有界.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)=A$,则 $\exists M>0$,使 $|f_n(x_0)-A|\leqslant M$,$n=1,2,\cdots$. 从而 $\forall x\in[a,b]$,

$|f_n(x)-A|\leqslant|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-A|\leqslant K|x-x_0|+M\leqslant K(b-a)+M$,$n=1,2,\cdots$.

于是

$$|f_n(x)|\leqslant|A|+M+K(b-a),n=1,2,\cdots.$$

问题 5.2.6 由下列每一条件能否断定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在区间 I 一致收敛?

(1) 它的某一重排一致收敛;

(2) $I=[a,b]$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 (a,b) 一致收敛,在 a 和 b 收敛;

(3) $I=[a,b]$,$\{a_n(x)\}$ 在 I 单调,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(a)|$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(b)|$ 皆收敛;

(4) $\forall x\in I$,$b_n(x)\leqslant a_n(x)\leqslant c_n(x)$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(x)$ 皆在区间 I 一致收敛;

(5) $I=[a,b]$,每一 $a_n(x)$ 在 I 连续非负,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 I 收敛于连续函数 $S(x)$.

答:(1) 不能. 例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{n}$ 在 $I=[0,1]$ 上一致收敛. 但根据 Riemann 定理,可以对级数重排使它在 $x=1$ 为发散的,因此这个重排后的级数在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

(2) 可以. 根据一致收敛和收敛的定义,$\exists N$,同时有 $\left|\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n(x)\right|<\varepsilon$,$\forall x\in(a,b)$,$\left|\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n(a)\right|<\varepsilon$,$\left|\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n(b)\right|<\varepsilon$,此即表明级数在 $[a,b]$ 一致收敛.

(3) 可以. 证明见例 5.6.3.

(4) 可以. 利用 Cauchy 准则可得.

(5) 可以. 参看问题 5.2.2(5) 的讨论. 此为 Dini 定理.

问题 5.2.7 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 I 一致收敛,是否一定推出

(1) 在 I 上 $\{a_n(x)\}$ 一致收敛于 0;

(2) $\forall x\in I$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$ 收敛;

(3) 若 $I=(a,b)$,$a_n(x)$ 在 a 右连续,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a)$ 收敛;

(4) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$ 收敛,则 $\exists\omega_n>0$,$|a_n(x)|\leqslant\omega_n$,$n=1,2,\cdots$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\omega_n$ 收敛.

答:(1) 一定. 此为一致收敛的 Cauchy 准则的特例.

(2) 不一定. 例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2+n}{n^2}$ 在任何有界区间内一致收敛,但对 x 的任何值都不绝对收敛.

(3) 一定. 参看问题 5.2.3(1) 的结果.

(4) 不一定. 例如

$$a_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x), & 2^{-(n+1)}<x<2^{-n};\\ 0, & x\text{ 为}[0,1]\text{ 上其余点}.\end{cases}$$

则当 $x=0$ 或 $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$时,$a_n(x)=0$;当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$时,唯有满足不等式$\dfrac{1}{2^{n+1}}<x<\dfrac{1}{2^n}$的 n 所对应的项 $a_n(x)=\dfrac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x)\neq 0$,故此时级数仅有一项组成. 因此,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上收敛,且绝对收敛(实际上 $a_n(x)\geqslant 0$). 同时不难看出,若写 $a_n(x)$ 为$\dfrac{1}{n}\cdot na_n(x)$,则 $\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k(x)\leqslant 1$. 由 Dirichlet 判别法,级数为一致收敛.

另一方面,对任何 n,$\sin^2(2^{n+1}\pi x)$ 在$(2^{-n-1},2^{-n})$ 的上界大于$\dfrac{1}{2}$,故若有所要求的 ω_n,必须 $\omega_n>\dfrac{1}{2n}$. 这样,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\omega_n$ 发散.

这一事实说明,M－判别法的逆命题不成立.

§5.3 一致收敛的函数项级数的性质

问题 5.3.1 设在区间 I 上 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$,

(1) 若 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 皆在 I 上有界,$f(x)$ 是否有界?

(2) 若$\{f_n(x)\}$一致有界,$f(x)$ 是否一定有界?

(3) 若改 $f_n(x)$ 在 I 的收敛性为一致收敛,(1) 和(2) 有无变化?

(4) 若 $f(x)$ 有界,是否 $\exists N$,使 $n>N$ 时,$\{f_n(x)\}$在 I 一致有界或者每一 $f_n(x)$ 在 I 有界?

答:(1) 不一定. 例如 $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}x^k=\dfrac{x(1-x^n)}{1-x}\to\dfrac{x}{1-x}$,$x\in[0,1)$. $\dfrac{x}{1-x}$ 在 $[0,1)$无界. 但易知$|f_n(x)|\leqslant n$,$n=1,2,\cdots$.

(2) 一定. 由$|f_n(x)|\leqslant M$,$x\in I$,$n=1,2,\cdots$,令 $n\to\infty$,即得$|f(x)|\leqslant M$,$x\in I$.

(3) 此时,(1) 的结论变为肯定的. 实际上,$\exists N$,使 $|f_N(x)-f(x)|<1$,从而 $|f(x)|\leqslant|f_N(x)|+1\leqslant M_N+1$,$M_N$ 为$|f_N(x)|$在 I 的上界. 另一方面,(2) 的结论仍为肯定的.

(4) 不能. 例如 $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\tan x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内收敛于 0,但对任意 N,$f_N(x)$ 都是无界的.

问题 5.3.2 极限函数连续性定理一般叙述为:"若函数列$\{f_n(x)\}$在区间 I 一致收敛于 $f(x)$,且 $f_n(x)$ 在 I 连续($n=1,2,\cdots$),则 $f(x)$ 也在 I 连续". 问:

(1) I 可否为无穷区间?

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com