新世纪高等学校公共课重点建设教材

简明高等数学（下）

王海敏 主编

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

简明高等数学(下)

王海敏 主编

浙江工商大學出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

简明高等数学. 下 / 王海敏主编. — 杭州: 浙江工商大学出版社, 2018.9

ISBN 978-7-5178-2791-7

Ⅰ. ①简… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 126909 号

简明高等数学(下)

王海敏 主编

责任编辑 吴岳婷 刘 韵

封面设计 林朦朦

责任印制 包建辉

出版发行 浙江工商大学出版社

(杭州市教工路 198 号 邮政编码 310012)

(E-mail:zjgsupress@163.com)

(网址:http://www.zjgsupress.com)

电话:0571-88904980,88831806(传真)

排　　版 杭州朝曦图文设计有限公司

印　　刷 杭州恒力通印务有限公司

开　　本 787mm×960mm 1/16

印　　张 13.75

字　　数 285 千

版 印 次 2018 年 9 月第 1 版 2018 年 9 月第 1 次印刷

书　　号 ISBN 978-7-5178-2791-7

定　　价 42.00 元

浙江工商大学出版社营销部邮购电话 0571-88904970

前　　言

高等数学是工科类各专业本科生的一门数学基础课程，它以微积分为主要内容。通过这门课的学习，不仅能为今后学习各类后课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的连续量、离散量和随机变量方面的数学基础，还能得到抽象思维和逻辑思维的理性思维能力的培养。

本教材是在我们多年的教学实践的基础上并按照工科类本科数学基础课程教学基本内容和要求编写的。全书共分10章，分别介绍了一元函数微积分及其应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分及其应用、无穷级数等方面的基本概念、基本理论和基本方法。

在内容的编写上，我们试图将严谨的理论推导和扎实的技巧训练结合在一起，并在使这两者之间达成合理的均衡方面做了些尝试。作为演绎学科论述微积分时，我们不忽视它对实际问题的应用。记住这样一点是十分重要的：微积分根深于实际问题，而且正是从种种应用中显示出它的力与美。在阐述每个重要的新概念之前，我们都会追溯由早期的直观概念到精确的数学描述的发展过程。这就把那些前人的努力和在本学科上最有贡献的人取得的成就介绍给了读者。因此，读者在概念的发展中就成了主动的参与者，而不仅是结论的被动的旁观者。我们对很多重要定理的证明常常以几何的或直观的讨论为前导，以使读者领会这些证明为什么要采取特定的形式。虽然这样的直观讨论已能满足那些对详细证明不感兴趣的读者，但对那些要求更严密表达方式的读者，我们也给出了完全的证明。

本教材的大纲和体系由集体讨论而定。第1、10章由袁中扬执笔；第2、4、5、6、7章由王海敏执笔；第3、8、9章由韩兆秀执笔，全书最后由王海敏统稿定稿。

本书编写过程中参考了大量的国内外教材；浙江工商大学出版社对本书的编审和出

版给予了热情支持和帮助,尤其是吴岳婷老师在本书的编辑和出版过程中付出了大量心血;浙江工商大学统计与数学学院自始至终对本书的出版给予了大力支持,在此一并致谢!

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,教材中一定存在不妥之处,恳请专家、同行、读者批评指正,使本书在教学实践中不断完善。

编　者

2018年6月于浙江工商大学

目 录
Contents

第7章　向量代数与空间解析几何

第1节　空间直角坐标系与向量

一、空间直角坐标系

空间解析几何与平面解析几何一样，都是用代数方法来研究几何图形. 把空间几何与代数沟通起来的是在空间引进坐标系，使空间的点与数组对应起来. 这样就可以用方程来表示图形.

在空间取定一点 O 且三条两两垂直的直线，分别称它们为 x 轴、y 轴与 z 轴，统称**坐标轴**. 先取定长度单位，在每一轴上都由 O 量起. 轴的方向的选取原可任意，但按通常习惯，规定按右手规则，即当 x 轴正向按右手握拳方向 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向时，拇指的指向就是 z 轴的正向(图 7-1).

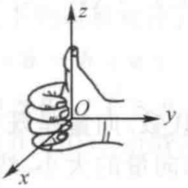

图 7-1

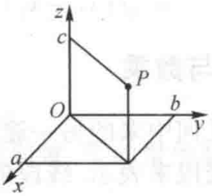

图 7-2

过空间任一点 P 作三个平面，分别垂直于 x 轴、y 轴与 z 轴. 设三个垂足对应的实数分别是 a，b，c. 于是 P 点对应于一个三元实数组 (a,b,c). 反之，任给一个三元数组 (a,b,c)，便可过 x，y，z 轴上的点 a，b，c 作三张平面分别垂直于 x，y，z 轴，这三张平面相交于空间一点 P. 因此，三元实数组与空间的点一一对应. (a,b,c) 被称为点 P 的坐标(图 7-2). 这种坐标系叫作**空间直角坐标系**.

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为**坐标面**. x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫作 xOy 面，另两个由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标

面,分别叫作 yOz 面和 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫作一个**卦限**. 其中,在 xOy 面上方且 yOz 面前方、zOx 面右方的那个卦限叫作**第一卦限**,其他第二、第三、第四卦限,在 xOy 面的上方,按逆时针方向确定. 第五至第八卦限,在 xOy 面的下方,由第一卦限之下的第五卦限,按逆时针方向确定,这八个卦限分别用Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ表示(图 7-3).

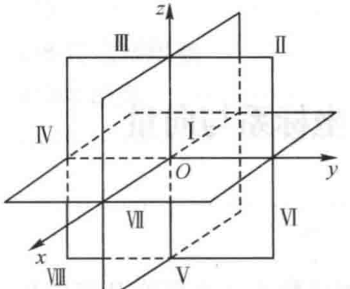

图 7-3

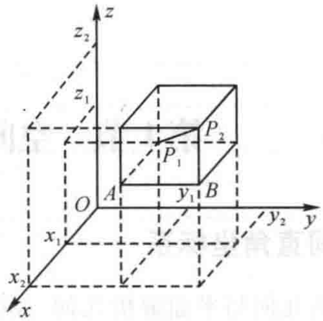

图 7-4

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点. 过 P_1 ,P_2 分别作平行于坐标面的平面,形成一个长方体,它的棱与坐标轴平行(图 7-4). 由于

$$P_1A = x_2 - x_1\ ,\ AB = y_2 - y_1\ ,\ BP_2 = z_2 - z_1\ ,$$

于是空间任两点的距离公式为

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{\overline{P_1B}^2 + \overline{BP_2}^2} = \sqrt{\overline{P_1A}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BP_2}^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ . \end{aligned}$$

二、向量的加法与数乘

把代数运算引到几何中来的另一途径是向量代数. 向量是既有大小又有方向的量,可以用一个有方向的线段来表示. 线段的长度表示向量的大小,线段的方向表示向量的方向. 若线段的起点为 $P(x_0,y_0,z_0)$,终点为 $Q(x_0+a_1,y_0+a_2,z_0+a_3)$,则这个向量就完全确定了,记作 $\overrightarrow{PQ}$ (图 7-5).

因为一切向量的共性是它们都有大小和方向,因此在数学上我们只研究与起点无关的向量,并称这种向量为**自由向量**,即只考虑向量的大小和方向,而不论它的起点在什么地方. 将 P 移到原点,则 Q 成为 $Q(a_1,a_2,a_3)$,于是可以用 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 来表示向量 $\overrightarrow{PQ}$.

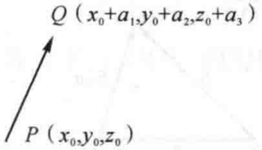

图 7-5

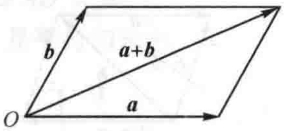

图 7-6

显然,一个向量 $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,a_3)$ 的长度(称为向量的模)为

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

方向由

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}$$

决定. a_1,a_2,a_3 为向量在 x, y, z 轴上的投影, α,β,γ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x, y, z 轴的夹角,称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**. $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦,而

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

实际问题中,向量早已遇到过,如位移、速度、加速度、力等都是不仅有大小而且有方向的量.

两个向量 $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1,b_2,b_3)$ 的加法定义为

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

把向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点都移到原点,以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边作平行四边形,则由原点作出的对角线就表示向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (图 7-6). 这种向量的加法也早已见过,如力的合成、速度的合成都是用的这种加法.

向量的加法满足下列运算规律:

(1)交换律　$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$;

(2)结合律　$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

零向量定义为 $\mathbf{0}(0,0,0)$,也就是模为零的向量. 零向量的起点和终点重合,它的方向可以看做是任意的.

向量 $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,a_3)$ 的**负向量**定义为

$$-\boldsymbol{a} = (-a_1, -a_2, -a_3).$$

负向量也是以前遇到过的,如作用力与反作用力是大小相等、方向相反的两个向量,作用力为 $\boldsymbol{a}$,则反作用力为 $-\boldsymbol{a}$.

由此,我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a}).$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上,便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ (图 7-7(a)).

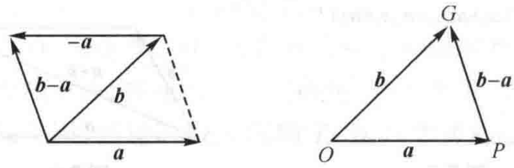

图 7-7

特别地,当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时,有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

显然,任给向量 $\overrightarrow{PQ}$ 及点 O,有

$$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OP},$$

因此,若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O,则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 P 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 G 所引向量 $\overrightarrow{PQ}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 7-7(b)).

由三角形两边之和大于第三边,有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \text{ 及 } |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

对向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 和任意实数 λ,定义

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3),$$

称为向量的**数乘**. 例如将力增大一倍,就是指力的方向不变,只是数值增大到原来的两倍. 这就是一个向量的数乘. 显然,当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

特别地,取 $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$,则

$$\lambda\boldsymbol{a}=\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right).$$

显然,$\boldsymbol{a}^0=\lambda\boldsymbol{a}$ 的模为 1(称为**单位向量**),$\boldsymbol{a}^0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

取 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$,$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$,$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$,则 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 都是单位向量,且任意向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 可分解为

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}.$$

向量的数乘满足下列运算规律:

(1)结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$;

(2)分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

例 1 证明对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证 如图 7-8 所示,由于已知 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$,所以

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC},\text{即 }\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}.$$

这就是 AD 与 BC 相等且平行. 因此,四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

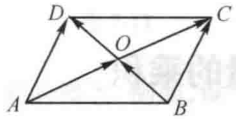

图 7-8

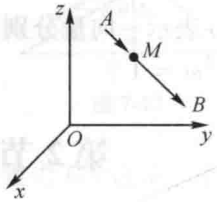

图 7-9

例 2　已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$,点 M 将线段 $\overrightarrow{AB}$ 分成定比为 λ ($\neq -1$)的两段,求 M 点的坐标.

解　如图 7-9 所示. $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$ 即

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}),$$

亦即

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}).$$

将 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 的坐标(即点 A , B 的坐标)代入,得

$$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right),$$

这就是点 M 的坐标.

习题 7.1

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

2. 用向量的方法证明:三角形两边中点的连线平行于第三边,且长度等于第三边长度的一半.

3. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

4. 空间直角坐标系中,指出 $A(1,-2,3)$, $B(2,3,-4)$, $C(2,-3,-4)$, $D(-2,-3,1)$ 各点分别在哪个卦限.

5. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

6. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$, $M_2(3,0,2)$,计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

7. 已知三点 $A(1,-1,3)$, $B(-2,0,5)$, $C(4,-2,1)$,问这三点是否在一直线上?

8. 从点 $A(2,-1,7)$ 沿向量 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ 的方向取一线段 AB ,长为 34 ,求 B 点的坐标.

9. 如果一向量与三个坐标轴正向的夹角都相等,那么该向量的三个方向角是否均为 $\frac{\pi}{3}$?

10. 若用 μ, v, ω 表示一向量分别与坐标面 xOy, yOz, zOx 的夹角,是否也有等式 $\cos^2\mu + \cos^2 v + \cos^2\omega = 1$?

第2节　向量的乘积

一、两个向量的数量积

两个向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 的**数量积**(也称**内积**)定义为

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为任意向量, λ 为任意实数,容易验证数量积满足下列运算规律:

(1)交换律　$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$.

(2)分配律　$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$.

(3)数乘分配律　$(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$.

设 θ 为 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 两向量的夹角,由余弦定理知道(图 7-10):

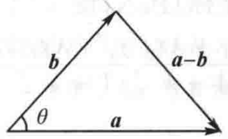

图 7-10

$$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta .$$

另一方面,

$$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} .$$

所以

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta .$$

因此,数量积也可以看成向量 $\boldsymbol{a}$ 的模乘以向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影(图 7-11). 如果用 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 来表示这个投影,便有

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} .$$

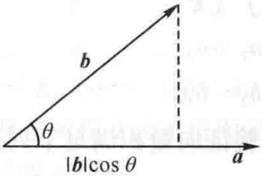

图 7-11

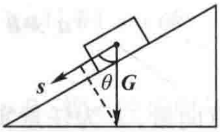

图 7-12

数量积是一个重要的概念. 例如,设一物体受重力 $\boldsymbol{G}$(这是一个向量)作用,沿斜面下滑(图 7-12). 重力的方向是垂直向下的,而物体位移 $\boldsymbol{s}$(这也是一个向量)的方向和斜面平行, $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 正向间的夹角为 θ. 于是重力所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

由数量积的定义,当向量 $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,a_3)$ 和 $\boldsymbol{b} = (b_1,b_2,b_3)$ 都不是零向量时,其夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

由此知,向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$. 又显然

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0.$$

例 1 已知三点 $M(1,1,1)$, $A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$,求 $\angle AMB$.

解 作向量 $\overrightarrow{MA}$ 及 $\overrightarrow{MB}$, $\angle AMB$ 就是向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角. 这里, $\overrightarrow{MA} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{MB} = (1,0,1)$,从而

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 1\times 1 + 1\times 0 + 0\times 1 = 1,$$

$$|\overrightarrow{MA}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2},\ |\overrightarrow{MB}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

代入两向量夹角的表达式,得

$$\cos\angle AMB = \frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

由此得 $\angle AMB = \dfrac{\pi}{3}$.

二、两个向量的向量积

两个向量 $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1,b_2,b_3)$ 的**向量积**(也称**外积**)定义为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1),$$

或写成

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意向量，λ 为任意实数，容易验证向量积满足下列运算规律：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

(2)分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

(3)数乘结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

特别有，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 反之，如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线(平行).

向量积的几何意义从以下三点可以看出：

1. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，即垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所成的平面.

这是因为

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0.$$

同样 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$.

2. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

这是因为

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta)^2\\&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta,\end{aligned}$$

即 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$.

3. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 组成一个右手系，即 $\boldsymbol{a}$ 以右手握拳方向转向 $\boldsymbol{b}$ 时，拇指所指为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向(图 7-13).

为了说明这一点，取 $\boldsymbol{a}$ 为 x 轴，$\boldsymbol{a}$ 的方向就取为 x 轴的正向，并取 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在的平面为 xOy 平面. 假设由 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的角度为 $\theta\ (|\theta|\leqslant\pi)$，则

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\ (1,0,0),$$

$$\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\ (\cos\theta,\sin\theta,0).$$

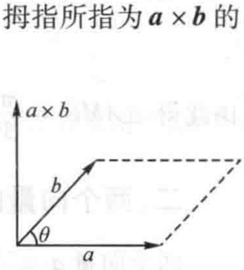

图 7-13

因此

$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ |a| & 0 & 0 \\ |b|\cos\theta & |b|\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = |a||b|\sin\theta k = |a||b|(0,0,\sin\theta),$$

即 c 与 z 轴相同,但方向视 θ 的正负而定,如果 $\theta > 0$,则 c 的指向与 z 轴正向相同,不然与 z 轴负向相同,所以成右手系.

特别有

$$i \times i = 0, \quad j \times j = 0, \quad k \times k = 0,$$
$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j.$$

与数量积一样,向量积也是一个重要的概念. 例如物理学中力矩的表达:设 O 为一根杠杆 L 的支点. 有一个力 F 作用于这杠杆上 P 点处. F 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ(图 7-14). 由力学规定,力 F 对支点 O 的力矩是一向量 M,它的模

$$|M| = |OQ||F| = |\overrightarrow{OP}||F|\sin\theta,$$

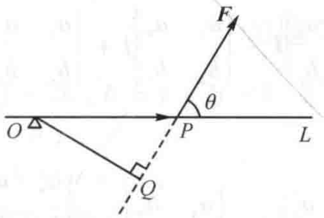

图 7-14

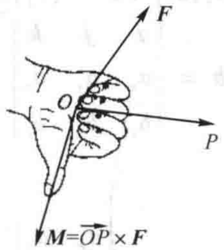

图 7-15

而 M 的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 F 所决定的平面,M 指向按右手规则,即当右手的四个手指从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 F 握拳时,大拇指的指向就是 M 的指向(图 7-15). 也就是力矩 M 等于 $\overrightarrow{OP}$ 与 F 的向量积,即

$$M = \overrightarrow{OP} \times F.$$

例 2 设 $a = (2,1,-1)$, $b = (1,-1,2)$,计算 $a \times b$.

解 $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = i - 5j - 3k.$

例 3 已知三角形 ABC 的顶点分别是 $A(1,2,3)$, $B(3,4,5)$ 和 $C(-1,-2,7)$,求三角形 ABC 的面积.

解 根据向量积的定义,可知三角形 ABC 的面积

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

由于 $\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,-4,4)$，因此

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -4 \end{vmatrix}=16\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k},$$

于是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|16\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{16^2+(-12)^2+(-4)^2}=2\sqrt{26}.$$

三、向量的混合积

设已知三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$. 先作两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，把所得到的向量与第三个向量 $\boldsymbol{c}$ 再作数量积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，这样得到的数量称为三向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的**混合积**，记作 $[\boldsymbol{abc}]$.

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，由于

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

我们再来看一下混合积的几何意义. 从图 7-16 可知：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\varphi=\pm|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|h=\pm V,$$

其中 V 是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

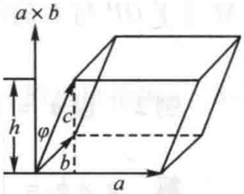

图 7-16

当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 组成右手系时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 在同侧，φ 为锐角取正号，否则取负号.

所以混合积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 的绝对值就是以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 当三向量共面时，所成的平行六面体体积为零，即

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0 \quad 或 \quad \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

例 4　已知不在一平面上的四点 $A(1,1,1)$，$B(3,4,4)$，$C(3,5,5)$，$D(2,4,7)$，求