当代世界中的数学

数林撷英（一）

朱惠霖 田廷彦◎编

SHULIN XIEYING(YI)

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

当代世界中的数学

数林撷英（一）

朱惠霖　田廷彦○编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书详细介绍了数学在各领域的精华应用，同时收集了数学中典型的问题并予以解答.本书可供高等院校数学类专业师生及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

当代世界中的数学.数林撷英.一/朱惠霖，田廷彦编.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2019.1

ISBN 978－7－5603－7257－0

Ⅰ.①当…　Ⅱ.①朱…　②田…　Ⅲ.①数学—普及读物　Ⅳ.①O1－49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 026675 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　刘立娟
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 12.5　字数 252 千字
版　　次　2019 年 1 月第 1 版　2019 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－7257－0
定　　价　38.00 元

序言

如今，许多人都知道，国际科学界有两本顶级的跨学科学术性杂志，一本是《自然》(*Nature*)，一本是《科学》(*Science*).

恐怕有许多人还不知道，在我们中国，有两本与之同名的杂志[①]，而且也是跨学科的学术性杂志，只是通常又被定位为“高级科普”.

国际上的《自然》和《科学》，一家在英国，一家在美国[②]. 它们之间，按维基百科上的说法，是竞争关系[③].

我国的《自然》和《科学》，都在上海，它们之间，却有着某种历史上的“亲缘”关系. 确切地说，从 1985 年(那年《科学》复刊)到 1994 年(那年《自然》休刊)这段时期，这两家杂志的主要编辑人员，原本是在同一个单位、同一幢楼、同一个部门，甚至是在同一个办公室里朝夕相处的同事!

这是怎么回事呢?

这本《自然》杂志，创刊于 1978 年 5 月. 那个年代，被称为“科学的春天”. 3 月，全国科学大会召开. 科学工作者、教育工作者，乃至莘莘学子，意气风发. 在这样的氛围下，《自然》的创刊，是一件大事. 全国各主要媒体，都报道了.

这本《自然》杂志，设在上海科学技术出版社，由刚刚复出的资深出版家贺崇寅任主编，又调集精兵强将，组成了一个业务水平高、工作能力强、自然科学各分支齐备的编辑班子. 正是这个编辑班子，使得《自然》杂志甫一问世，便不同凡响；没有几年，便蜚声科学界和教育界[④].

1983 年，当这个班子即将一分为二的时候，上海市出版局经办此事的一位副局长不无遗憾地说，在上海出版界，还从未有过如此整齐的编辑班子呢!

一分为二? 没错. 1983 年，中共上海市委宣传部发文，将《自然》杂志调住上海交通大学. 为什么? 此处不必说. 我只想说，这次强制性的调动，却有一项

---

① 其中的《自然》杂志，在创刊注册时，不知什么原因，将“杂志”两字放进了刊名之中，因此正式名称是《自然杂志》. 但在本文中，仍称其为《自然》或《自然》杂志. 此外，应该说明，在我国台湾，也有两本与之同名的杂志，均由民间(甚至个人)资金维持. 台湾的《自然》，创刊于 1977 年，系普及性刊物，内容以动植物为主，兼及天文、地理、考古、人类、古生物等，1996 年终因财力不济而停办. 台湾的《科学》，正式名称《科学月刊》，创刊于 1970 年，以介绍新知识为主，“深度以高中及大一学生看得懂为原则”，创刊至今，从未脱期，令人赞叹.

② 英国的《自然》，创刊于 1869 年，现属自然出版集团(Nature Publishing Group)，总部在伦敦. 美国的《科学》，创刊于 1880 年，属美国科学促进会(American Association for the Advancement of Science)，总部在华盛顿.

③ 可参见 http://en.wikipedia.org/wiki/Science_(journal).

④ 可参见《瞭望东方周刊》2008 年第 51 期上的“一本科普杂志的 30 年‘怪现象’”一文.

十分温情的举措，即编辑部每个成员都有选择去或不去的权利．结果是，大约一半人选择去交通大学，大约一半人选择不去，留在了上海科学技术出版社．

我属去的那一半．留下的那一半，情况如何，一时不得而知．但是到 1985 年，便知道了：他们组成了《科学》编辑部，《科学》杂志复刊了！

《科学》，创刊于 1915 年 1 月，是中国历时最长、影响最大的综合性科学期刊，对于中国现代科学的萌发和成长，有着独特的贡献．中国现代数学史上有一件一直让人津津乐道的事：华罗庚先生当年就是在这本杂志上发表文章而崭露头角的．《科学》于 1950 年 5 月停刊，1957 年复刊，1960 年又停刊．1985 年的这次复刊，其启动和运作，外人均不知其详，但我相信，留下的原《自然》杂志资深编辑，特别是吴智仁先生和潘友星先生，无疑是起了很大的甚至是主要的作用的．复刊后的《科学》，由时为中国科学院副院长的周光召任主编，上海科学技术出版社出版．

于是，原来是一个编辑班子，结果分成两半（各自又招了些人马），一半随《自然》杂志披荆斩棘，一半在《科学》杂志辛勤劳作．

《自然》杂志去交通大学后，命运多舛．1987 年，中共上海市委宣传部又发文：将《自然》杂志从交通大学调出，“挂靠”到上海市科学技术协会，属自收自支编制．至 1993 年底，这本杂志终因入不敷出，编辑流失殆尽（整个编辑部，只剩我一人），不得不休刊了．1994 年，上海大学接手．原有人员，先后各奔前程．《自然》与《科学》的那种“亲缘”关系，至此结束．

这段多少有点辛酸的历史，在我编这本集子的过程中，时时在脑海里浮现，让我感慨，让我回味，也让我思索……

好了，不管怎么说，眼前这件事还是让人欣慰的：在近 20 年之后，《自然》与《科学》的数学部分，竟然在这本集子里“久别重逢”了！

说起这次“重逢”，首先要感谢原在上海教育出版社任副编审的叶中豪先生．是他，多次劝说我将《自然》杂志上的数学文章结集成册；是他，了解《自然》和《科学》的这段“亲缘”关系，建议将《科学》杂志上的数学文章也收集进来，实现了这次“重逢”；又是他，在上海教育出版社申报这一选题，并获得通过．

其次，要感谢哈尔滨工业大学出版社的刘培杰先生．是他，当这本集子在上海教育出版社的出版遇到困难时，毅然伸手相助，接下了这项出版任务[①]．

当然，还要感谢与我共同编这本集子的《科学》杂志数学编辑田廷彦先生．是他，精心为这本集子选编了《科学》杂志上的许多数学文章．

他们三人，加上我，用时下很流行的说法，都是不折不扣的“数学控”．我们

① 说来有趣，我与刘培杰先生从未谋面，却似乎有“缘”已久．这次选编这本集子，发觉他早年曾向《自然》杂志投稿，且被我录用，即收入本集子的《费马数》一文．屈指算来，那该是 20 年前的事了．

以我们对数学的热爱和钟情，为广大数学研究者、教育者、普及者、学习者和爱好者(相信其中也有不少的“数学控”)献上这本集子，献上这些由国内外数学家、数学史家和数学普及作家撰写的精彩数学文章.

这里所说的“数学文章”，不是指数学上的创造性论文，而是指综述性文章、阐释性文章、普及性文章，以及关于人物和史实的介绍性文章. 其实，这些文章，都是可让大学本科水平的读者基本上看得懂的数学普及文章.

按美国物理学家、科学普及作家杰里米·伯恩斯坦(Jeremy Bernstein, 1929—)的说法，在与公众交流方面，数学家排在最后一名[①]. 大概是由于这个原因，国际上的《自然》和《科学》，数学文章所占的份额，相当有限.

然而，在我们的《自然》和《科学》上，情况并非如此. 在《自然》杂志上，从1984年起就常设“数林撷英”专栏，专门刊登数学中有趣的论题；在《科学》杂志上，则有类似的“科学奥林匹克”专栏. 许多德高望重的数学大师，愿意在这两本杂志上发表总结性、前瞻性的综述；许多正在从事前沿研究的数学家，乐于将数学顶峰上的无限风光传达给我们的读者. 在数学这个需要人类第一流智能的领域，流传着说不完道不尽的趣事佳话，繁衍着想不到料不及的奇花异卉. 这些，都在这两本杂志上得到了充分的反映.

在编这本集子的时候，我们发觉，《自然》(在下文所说的时期内)和《科学》上的数学好文章是如此之多，多得简直令人苦恼：囿于篇幅，我们必须屡屡面对“熊掌与鱼”的两难，最终又不得不忍痛割爱. 即使这样，篇幅仍然宏大，最终不得不考虑分册出版.

现在这本集子中的近200篇文章，几乎全部选自从1978年创刊至1993年年底休刊前夕这段时期的《自然》杂志，和从1985年复刊至2010年年底这段时期的《科学》杂志. 它们被分成12个版块，每个版块中的文章，基本上以发表时间为序，但少数文章被提到前面，与内容相关的文章接在一起.

还要说明的是，在“数学的若干重大问题”版块中，破例从《世界科学》杂志上选了两篇本人的译作，以全面反映当时国际数学界的大事；在“数学中的有趣话题”版块中，破例从台湾《科学月刊》上选了一篇“天使与魔鬼”，田廷彦先生对这篇文章钟爱有加；在“当代数学人物”版块中，所介绍的数学人物则以20世纪以来为限.

这本集子中的文章，在当初发表时，有些作者和译者用了笔名. 这次选入，仍然不动. 只是交代：在这些笔名中，有一位叫“淑生”的，即本人也.

照说，选用这些文章，应事先联系作译者，征求意见，得到授权. 但有些作译

---

① 参见 Mathematics Today：Twelve Informal Essays，Springer-Verlag(1978)p. 2. Edited by Lynn Arthur Steen.

者，他们的联系方式，早已散失；不少作译者，由于久未联系，目前的通信地址也不得而知；还有少数作译者，已经作古，我们不知与谁联系.在这种情况下，我们只能表示深深的歉意.更有许多作译者，可说是我们的老朋友了，相信不会有什么意见，不过在此还是要郑重地说一声：请多多包涵.

在这些文章中，也融入了我们编辑的不少心血.极端的情况是：有一两篇文章是编辑根据作者的演讲提纲，再参考作者已发表的论文，越俎代庖地写成的.尽管我们做编辑这一行的，“为他人作嫁衣裳”，似乎是份内的事，但在这本集子出版的时候，我还是将要为这些文章付出过劳动、做出过贡献的编辑，一一介绍如下，并对其中我的师长和同仁、同行，诚致谢忱.

《自然》上的数学文章，在我 1982 年 2 月从复旦大学数学系毕业到《自然》杂志工作之前，基本上由我的恩师陈以鸿先生编辑；在这之后到 1987 年先生退休，是他自己以及我在他指导下的编辑劳动的成果.此后，又有张昌政先生承担了大量编辑工作；而计算机方面的有关文章，在很大程度上则仰仗于徐民祥先生.

《科学》上的数学文章，在复刊后，先是由黄华先生负责编辑，直至 1996 年他出国求学；此后便是由田廷彦先生悉心雕琢，直到现在；其间静晓英女士也完成了一些工作.当然，《科学》杂志负责复审和终审的编审，如潘友星先生、段韬女士，也是付出了心血的.

回顾往事，感悟颇多.但作为这两本杂志的编辑，应该有这样的共同感受：一是荣幸，二是艰辛.荣幸方面就不说了，而说到艰辛，无论是随《自然》杂志流离，还是在《科学》杂志颠沛，都可用八个字来概括：“筚路蓝缕，以启山林”.

是的，筚路蓝缕，以启山林！

如今，蓦然回首，我看到了：

一座巍巍的山，一片苍苍的林！

《自然》杂志原副主编兼编辑部主任
朱惠霖
2017 年 5 月于沪西半半斋

⊙

目录

完美正方形的故事*①

四十多年前，在英国剑桥大学美丽的校园里，四位好朋友正在热烈地讨论着一个有趣的问题.他们谁也没有想到，这一次讨论决定了他们终生的道路.这四位好朋友是数学系的布鲁克斯(R. L. Brooks)、史密斯(C. B. A. Smith)、斯通(A. H. Stone)和化学系的塔特(W. T. Tutte).他们所讨论的问题是能不能将一个正方形划分为若干个大小两两不等的正方形.这个问题在20世纪30年代是一个热门的问题.因为还没有找到这样的划分法，所以有人就猜想这样的划分法并不存在.这四位朋友却想找到这样一种划分法，从而证明这个猜想是不对的.一个由大小两两不等的正方形拼成的正方形，称为完美正方形.所以，这个问题就称为完美正方形问题.

他们的讨论进行了好久，但是没有得到任何结果.从此以后，在很长时间内，他们谁也没有再公开提这个问题.

过了几年，一天晚饭后，布鲁克斯请他的三位朋友到他家喝咖啡.自从那次讨论以后，他并没有忘记这件事，一个人偷偷地在钻研.现在他已经得到了一种划分的办法.这一天，他想把这个办法告诉三位朋友，想来他们一定会大吃一惊的，但是当他宣布了这个办法以后，三位朋友的反应竟完全出乎他的意料.原来史密斯和斯通也秘密地在合作解决这个问题，而且也已经得到了一种划分法.而塔特，尽管平时他一直是四人中的

* 折枝:《完美正方形的故事》,《自然杂志》1982年第5卷第7期.

① 本文主要根据塔特教授1980年来华讲学的内容写成.

佼佼者，大多数问题总是他先得到答案，但今天他却拿不出答案来．看来这一次塔特是落后了．然而当他发表了他的意见后，却更使已经得到答案的朋友们惊叹不已．

塔特想得更远，他并不满足于找到一个完美正方形，他想的是要找到一个系统的办法来求出完美正方形与划分所得正方形的边长之间的关系．他的想法是这样的：先考虑一些正方形怎样才能拼成一个矩形，拼成的矩形的边长与这些正方形的边长之间有什么关系．由大小两两不同的正方形拼成的矩形，称为完美矩形．如果完美矩形的问题解决了，那么一旦得到的矩形邻边相等，一个完美正方形就拼成了．

塔特提供了一种求完美矩形的办法，先假设好由正方形拼成矩形的形式．例如，图 1 中由 12 个正方形按这样的排列拼成了一个矩形．现在我们可以求出各个正方形和矩形 $ABCD$ 的边长．每个正方形的边长用一个字母表示，写在这个正方形的中间．先不妨设 $a=x$，$b=y$．按照它们的排列，显而易见可以依次求得

$$e=y-x$$
$$d=a-e=2x-y$$
$$f=d-e=3x-2y$$
$$k=d+f=5x-3y$$
$$AD=a+d+k=8x-4y$$
$$g=AD-b=8x-5y$$
$$y=(a+b)-(k+g)=9y-12x$$
$$l=AD-(b+h)=20x-14y$$
$$i=l-h=32x-23y$$
$$j=l+i=52x-37y$$
$$c=i+j=84x-60y$$

现在，因为 $c+j=BC=AD$，所以

$$136x-97y=8x-4y$$

或

$$128x=93y$$

令 $x=93$，$y=128$，这个等式就成立了．把它们代入上面各式中，就得到了一个由 12 个正方形拼成的边长为 232×353 的矩形．

因为划分成正方形的数目可能不同，各个正方形的排列形式又各种各样，所以就可以得到许许多多的完美矩形．当然，有时候也会发现有两个小正方形的边长相同，但是在大多数情况下，得到的矩形确实是完美的．

塔特的这种方法当然比瞎凑要好得多，因此，这四位朋友就开始沿着这条道路去求许许多多的完美矩形．然而，当工作一展开，他们就发现这条路也不好

走.因为在求边长之前,先要假定一种划分的方式,但是画出一种这样的方式很不容易.在预先不知道矩形和划分所得各正方形的边长的情况下,这样一个草图常常画得不成样子,以至于“对不起来”.他们小心翼翼地使画出来的划分中的各个“正方形”尽可能地像一个真正的正方形.后来史密斯找到了图论这个有用的工具,才解决了这个困难.

我们用一些点来代表所考虑的各个对象,再用联结一对点的一条线来表示相应的两点间具有的某种关系.如果这种关系是有方向的,即如甲对乙有这种关系,而乙对甲未必有这种关系,则在表示关系的线上加上箭头(这时一条线称为一条弧)来指明这个关系的方向,这样就构成了一个图.例如,点代表一个会议的代表,线表示两位代表互相认识;或点代表球队,从甲队到乙队的一条弧表示甲队胜了乙队;等等.这种图解法简单、直观,有很多的应用,研究图的各种性质的数学分支就称为图论.在19世纪中期,著名物理学家基尔霍夫就用图论解决了一个重要的问题.基尔霍夫在研究电网络时得到了两组方程(称为基尔霍夫定律):第一组方程表示每个节点上流入电流的总和等于流出电流的总和;第二组方程表示在电网络的每一个回路上各条线的电位降的代数和等于这个回路的各条线上所有电源的电动势的和,特别是当回路上没有电源时,各条线的电位降的代数和为零.用这两组方程,加上电学的定律,就可以求出各点的电位与各条线上的电流.但是,第二组方程中方程的数目等于网络中回路的数目,这个数目常常是非常大的.基尔霍夫利用图论的方法证明了:在第二组方程中只要取 $m-n+1$ 个独立方程就够了.这里 m 是网络中的线数,n 是节点数.这样,就大大地简化了这个方程组.同时,基尔霍夫还找到了一种图论方法来具体地求出这 $m-n+1$ 个独立的方程.

尽管基尔霍夫与其他一些学者在利用图论方法解决某些实际问题时已经取得了很好的成果,但是,在这四位朋友考虑完美正方形问题的20世纪30年代,图论还没有形成一门完整的学科,它的重要性还没有被大多数人所认识.这时候,史密斯看出了图论可以为完美正方形问题服务.他发现,可以用一个图来简单地把一种划分方法表示出来.他用一个点来代表一个划分图上的每一条水平直线.例如,图1中的7条水平直线 AB,EF,GH,IJ,KL,MN,CD 分别用图2中的 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6 和 v_7 这7个点来代表.夹在两条水平线之间的那一个正方形(如 EF 与 GH 之间的正方形 e)就用从代表上边的点到代表下边的点(如图2中的 v_2 到 v_3)的一条弧来代表.这样,图1的划分就成了图2中的这个图,这个图解称为史密斯图解.开始引入这种图解的目的,仅仅是为了方便表示而已.但是后来的研究表明,这种图解的引进在这个问题的研究过程中是一个转折点,因为这种图解使得完美矩形与基尔霍夫的两组方程建立了联系.

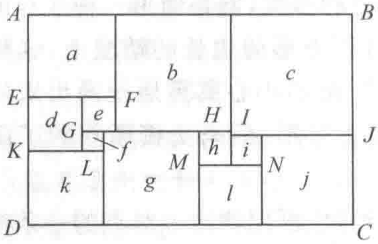

图 1

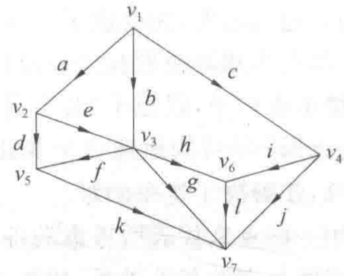

图 2

现在我们来看看基尔霍夫定律如何在史密斯图解中起作用. 我们将史密斯图解看成一个电网络，代表顶边的点称为正极，代表底边的点称为负极. 将每一条弧所代表的正方形的边长看成电流强度，它的方向是沿着箭头的方向. 将每一条弧看作有单位电阻的导线，从而通过它的电流强度的值正好等于它两端的电位差的值. 我们在图2中故意画得使各点与 v_7 的高度差正好等于各点所代表的水平线与底边的距离，实际上就是这一点相对于负极的电势. 当我们了解了基尔霍夫定律在史密斯图解中成立以后，不这么画也可以，只要关心两点间有没有箭头相连就可以了.

这样一来，我们看到，从正极流出的电流之和(即以顶边的一部分为一边的正方形边长之和) 就等于顶边的长，这个数当然也就是底边的长，或者说是流入负极的电流之和(即以底边的一部分为一边的正方形边长之和). 在图 1 中，a，b 和 c 三个正方形边长之和当然等于 k，g，l 和 j 四个正方形边长之和. 除了正极和负极，例如 v_3 这一点，b 和 e 两条弧是流到 v_3 的，它们的总电流是 b 和 e 两个正方形的边长的和，即 GH 的长. 另外，f，g 和 h 这三条弧是从 v_3 流出的，它们的总电流也是 GH 的长. 对别的点也是一样，即除了正极和负极，流入这点的总电流等于流出这点的总电流. 于是基尔霍夫第一定律成立. 再看这个网络中的一个回路，例如 $v_1v_3v_5v_2v_1$. 因为 $b+f=a+d=v_1$ 与 v_5 的高度差，所以 $b+f-d-a=0$，即沿这个回路各条弧上电位差的代数和为零. 这对每一个回路都成立. 这就是基尔霍夫第二定律.

发现了史密斯图解与基尔霍夫定律的关系，使这四位朋友十分兴奋. 他们一方面做理论上的推导，另一方面做了许多数值的例子.

又一次偶然的事件给了他们启发. 史密斯将一个完美矩形(图 3) 画在硬纸片上，然后把它沿各正方形剪开. 把这些小正方形重新拼成原来的矩形，这是一种很好的游戏. 他很高兴自己发明了这样一种游戏，便把这一套正方形带到家里请他的妈妈拼成一个矩形. 对于一个没有考虑过这方面的问题的人来说，这确实不是一件容易做到的事. 但是，经过一番周折以后，他的妈妈告诉史密斯，她成功了. 然而当史密斯过去一看，发现她的排列法竟与原来的完全不同(图 4). 同一套正方形竟然可以用两种不同的方法拼成同一个矩形，这是出乎他的

意料的.

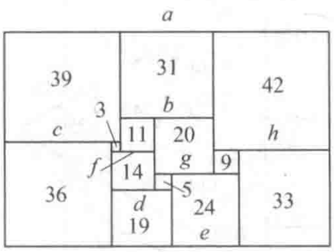

图 3

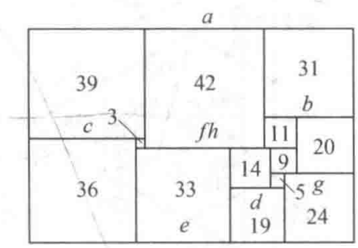

图 4

第二天,史密斯与他的朋友对这个“奇迹”做了理论上的分析.图 5 和图 6 是分别与图 3 和图 4 中完美矩形对应的史密斯图解.在图 5 中,我们看到 f 与 h 两点对应于图 3 中有同样高度的水平线,从而 f 与 h 有相同的电位.在一个电网络中,把两个有相同电位的点联结起来,并不影响各条线中的电流强度.而图 6 恰好就是把图 5 中 f 与 h 合在一处而得到的一个电网络.各条线上的电流强度与图 5 中一样,所以划分所得的正方形与图 3 中一样.

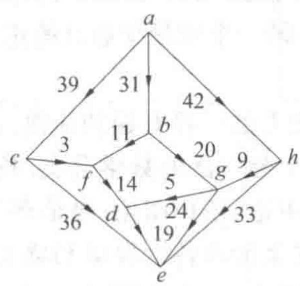

图 5

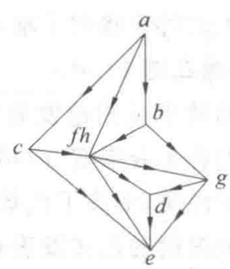

图 6

这个例子使他们猜想到,如果不是一个一个地考虑那些电网络,而是一对一对地考虑,或许会得到一些新的结果.

关键的时刻终于来到了.一些理论上的分析引导他们考虑了图 7 和图 8 所示的两个电网络.这两个电网络除了三角形外面的那条弧,形状是完全相同的.与这两个电网络对应,他们得到了两个同样是 2 261×3 075 的完美矩形,如图 9 和图 10 所示.凑巧的是,这两个完美矩形除了角上都有一个边长为 697 的正方形,其余的每一对正方形都是不同的.因此,只要将这两个矩形按图 11 的方式重叠这个相同的正方形,再在两个角上添上两个边长分别为 1 564 与 2 378 的正方形,一个完美正方形就得到了.这个完美正方形的边长为 4 639,它由 37 个小正方形组成.这个完美正方形的得到过程尽管也有凑巧的因素(例如,图 9 与图 10 中只有一个位置在角上的正方形重复,这一点是理论所不能预先保证的),但是毕竟是在理论的指导下找到的.

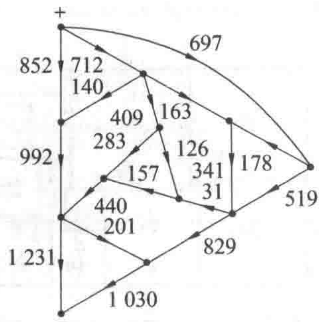

图 7

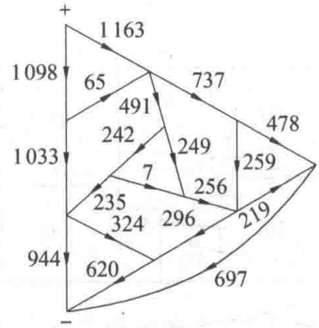

图 8

因为容易看出两个、三个或四个大小不同的正方形是拼不成一个大正方形的，所以人们自然要问：一个完美正方形最少要由几个正方形拼成？可惜这个问题还没有一种理论的方法可以用来回答，因此只好把所有的拼法一一试过．但是这样做需要的计算量太大了，在当时的情况下是不可能解决的．

近代，电子计算机的出现给这个问题带来了新的生机．依靠电子计算机的帮助，在 1978 年人们终于找到了唯一的一个由最少数目的正方形(21 个) 组成的完美正方形．它画在图 12 中．

完美正方形的故事是图论发展史上的一段有趣的插曲．几十年来，图论已经发展成了一门内容十分丰富、应用十分广泛的数学分支．按照研究所使用的方法与研究问题的性质，形成了代数图论、拓扑图论、极值图论等好几个分支．每年有几百篇有关图论的论文发表在全世界各个数学刊物上．在许多学科中，都有由于应用图论的方法和结果而取得成功的例子．美国图论专家哈拉里(Harary) 在他所著的《图论》中，列举已经应用图论的学科有物理、化学、通信科学、计算机技术、电气和土木工程、建筑学、运筹学、生物遗传学、心理学、社会学、经济学、人类学和语言学等．在数学中与图论有密切关系的有群论、矩阵论、数值分析、概率论、组合学和拓扑学等．与此同时，涌现了许多著名的图论专家．从事完美正方形问题研究的那四位朋友也走上了研究组合数学与图论的道路．特别是塔特，他终于放弃了他的化学生涯而专门研究起图论来．现在，他已经成为世界上最著名的图论学者．他的工作涉及了图论中几乎所有的重要专题．他的成果在许多专题研究中起主导作用．以至在 1977 年为他六十寿辰举行的国际图论会议上，英国图论专家纳什－威廉姆斯(Nash-Williams) 在介绍塔特的工作时说：“组合数学家们有时谈起他们的感想，觉得他们的几乎每一种想法，…… 都是塔特在二十年前就已经研究过了的．”[1]

---

① 见 *Graph Theory and Related Topics*，P. XXV.

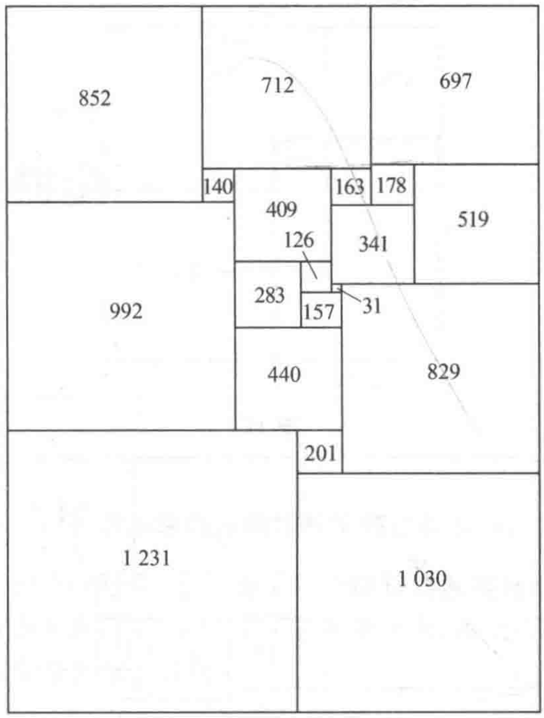
852
712
697
140
409
163
178
519
126
341
283
157
31
992
440
829
201
1 231
1 030

图 9

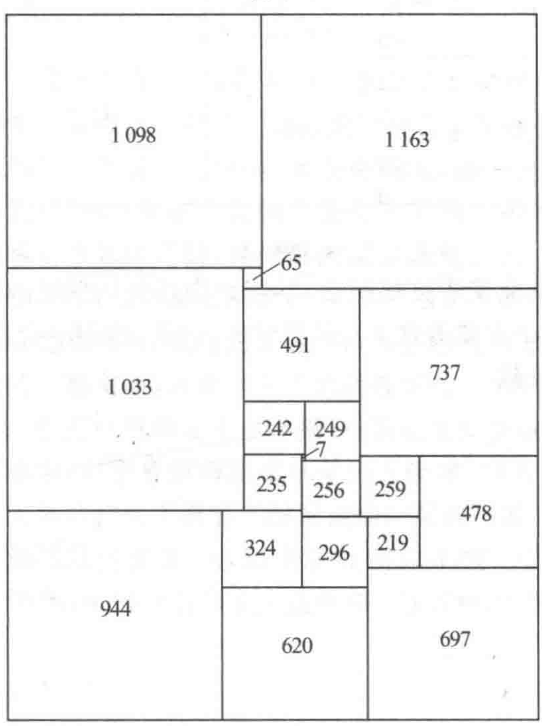
1 098
1 163
65
491
737
1 033
242
249
7
235
256
259
478
324
296
219
944
620
697

图 10

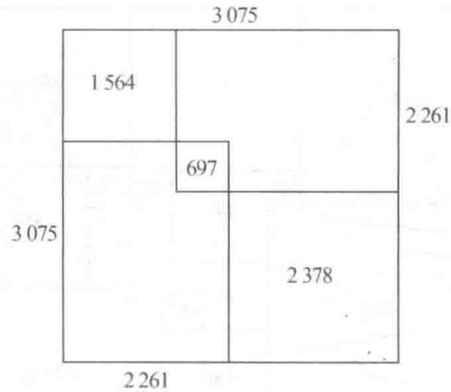

图 11

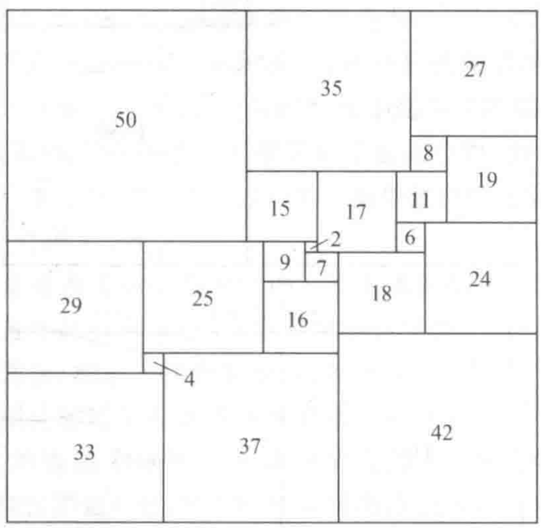

图 12

如果没有这个完美正方形问题，塔特也许还在从事他的化学研究. 在这个意义上，可以说一个问题造就了一位数学家. 因此，我们不会忘记完美正方形问题对图论发展的贡献.

象棋对策初步*

古老的象棋与现代数学结合起来，构成了象棋对策论这一门边缘科学. 它经历了一个曲折的发展过程，当大型电子计算机问世以后，又赋予了它新的生命. 本文仅就象棋对策论的初步概念做一简介.

一、历史的回顾

说起来也很有趣：对策论起源于对象棋的研究. 1912 年，数学家策墨洛在第五届国际数学会议上发表了《关于集合论在象棋博弈理论中的应用》的著名论文，第一次把数学与象棋联系起来. 他证明在一盘棋中必存在下列三种着法之一：(1) 不依赖对方如何行动，我方总能保证取胜；(2) 不依赖我方如何行动，对方总能保证取胜；(3) 不依赖对方如何行动，自己总能保证达到和局. 这篇论文被公认为是用数学方法研究对策现象的第一篇文章，从此产生了现代数学的一个分支——对策论.

但在以后的三十多年里，对策论主要被应用到军事与经济领域中，对于象棋博弈则几乎无人问津. 因为策墨洛只是论证了人所共知的下棋有三种可能的结局的问题，而对于指导局中人如何做出决策，达到斗争胜利或不败，却毫无帮助. 直至 1950 年，美国著名科学家克劳德·沙农提出评价棋局形势优劣

* 黄少龙：《象棋对策初步》，《自然杂志》1983 年第 6 卷第 1 期.