普通高等教育"十三五"规划教材

概率论与数理统计同步辅导

孙艳军　聂　霞　主编

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

概率论与数理统计同步辅导

孙艳军　聂　霞　主编
李海霞　李国晖　陈志芳　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十三五”规划教材《概率论与数理统计》（陈志芳、李国晖主编，科学出版社出版）一书的同步辅导教材．本书按教材各章顺序编排，与教材题号一致．本书的内容由重要概念、定理、公式、典型题型的解题方法与技巧及经典习题选取等部分组成，旨在帮助读者掌握知识要点，学会分析问题的方法技巧，同时提高学习能力及应试能力．

本书可作为少数民族地区高等财经类院校本（专）科生学习“概率论与数理统计”课程的辅导用书，也可作为基础复习阶段的考研数学用书．

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步辅导/孙艳军，聂霞主编．—北京：科学出版社，2018.8

（普通高等教育“十三五”规划教材）

ISBN 978-7-03-058256-0

Ⅰ．①概… Ⅱ．①孙… ②聂… Ⅲ．①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 155450 号

责任编辑：宋丽 袁星星/责任校对：王颖

责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

三河市铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2018 年 8 月第一次印刷 印张：8 1/4

字数：190 000

定价：30.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉）

销售部电话 010-62136230 编辑部电话 010-62135397-2047

前　　言

概率论与数理统计是近代数学的重要组成部分，同时也是近代经济理论应用与研究的重要工具之一．概率论与数理统计在许多科学领域中都有广泛的应用，如近代物理、自动控制、地震预报和气象预报、工厂产品质量控制、农业试验和公用事业等．特别是概率论与数理统计方法在经济、金融、管理科学领域的深入应用，已极大地改变了经济、金融、管理科学传统的研究方式，成为它们研究与分析的有力工具，可以说，概率论与数理统计已成为从事经济数量分析人员必修的基础课程．

为了适应少数民族地区高等财经类院校本（专）科生学习概率论与数理统计课程的需要，结合陈志芳、李国晖编写的《概率论与数理统计》一书，我们编写了这本配套教材．

本书各章均由四部分组成：

（1）内容提要：该部分对各章的基本概念、定理、公式等进行归纳总结，便于读者掌握各章的知识要点．

（2）典型例题及其分析：该部分选取一些启发性、综合性较强的经典例题，并给出详细的解答，旨在帮助读者掌握例题的思路、方法和技巧，从而举一反三，以不变应万变．

（3）典型习题精练：该部分选取各章重点知识点对应的习题，旨在让读者能够熟练应用所学知识，同时对报考硕士研究生的读者也有一定的帮助．

（4）典型习题参考答案：该部分给出各章每道精选习题的参考答案，供读者参考．

书后附录中另附有数张统计用表，以方便学生解题时查询使用．

本书由孙艳军、聂霞担任主编，李海霞、李国晖、陈志芳担任副主编．具体编写分工如下：第 1 章～第 3 章由孙艳军、陈志芳共同编写，第 4 章～第 6 章由李海霞、陈志芳共同编写，第 7 章和第 8 章由李国晖编写，第 9 章和第 10 章由聂霞编写．在编写过程中，各章内容都经过反复讨论和多次修改．

限于编者的水平，书中难免存在疏漏和不足之处，敬请广大读者对本书提出宝贵的意见与建议，对不妥之处提出批评指正．

编　者

2018 年 5 月

目 录

第 1 章　随机事件及其概率

一、内容提要

（一）随机试验、随机事件与样本空间

1. 随机试验

带有明确的目的性对随机现象进行观察的过程叫作随机试验，简称试验，通常用字母 E 表示.

2. 样本点

随机试验的每一个可能结果称为样本点，用 ω 表示.

3. 样本空间

样本点全体组成的集合称为样本空间，用 Ω 表示.

4. 随机事件

随机事件就是样本空间的子集，或者说随机事件就是试验结果的集合，通常用大写英文字母 A，B，$C\cdots$表示.

（1）基本事件：只含有一个试验结果（样本点）的事件称为基本事件.

（2）必然事件：每次试验必然发生的事件称为必然事件，它是包含样本空间所有元素的事件，用 Ω 表示.

（3）不可能事件：每次试验一定不会发生的事件称为不可能事件，它是不包含任何元素的空集，用 $\varnothing$ 表示.

（二）事件的关系和运算

1. 定义

事件的关系：包含、相等、相容、对立；事件的运算：和（并）、差、交（积）.

（1）包含：如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即属于 A 的每一个样本点都属于 B，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

（2）相等：如果事件 A 包含事件 B，同时事件 B 也包含事件 A，称事件 A 与 B 相等，即 A 与 B 中的样本点完全相同，记作 $A=B$.

（3）和（并）：两个事件 A，B 中至少有一个发生，称为事件 A 与 B 的并事件或和运算，它是属于 A 和 B 的所有样本点构成的集合，记作 $A+B$ 或 $A\cup B$.

特别地，n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生时，称为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和，记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$；设可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…中

至少有一个发生，也称为事件 A_1，A_2，…，A_n，…的和，记作

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ 或 } \sum_{i=1}^{\infty} A_i .$$

（4）交：两个事件 A 与 B 同时发生，称为事件 A 与 B 的交事件或积运算，它是由 A 与 B 的所有共同样本点构成的集合，记作 AB 或 $A\cap B$.

特别地，

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \text{ 或 } A_1A_2\cdots A_i\cdots$$

表示事件 A_1，A_2，…，A_i，…同时发生或者同时出现.

（5）差：事件 A 发生而事件 B 不发生是一个事件，称为事件 A 与 B 的差，它是由属于 A 但不属于 B 的那些样本点构成的集合，记作 $A-B$，显然 $A-B=A-AB=A\overline{B}$.

（6）相容：若 $AB\neq\varnothing$，则称事件 A 和 B 相容；若 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互不相容（或称事件 A 与 B 互斥）.

（7）对立事件：事件“非 A”称为 A 的对立事件，它是由样本空间中所有不属于 A 的样本点组成的集合，记作 $\overline{A}$，显然有 $A+\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\varnothing$，$\overline{A}=\Omega-A$，$\overline{\overline{A}}=A$.

（8）完备事件组：若事件 A_1，A_2，…，A_n 为两两互不相容事件，并且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，则称 A_1，A_2，…，A_n 构成一个完备事件组或构成样本空间的一个划分. 换句话说，如果有限个或可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…两两不相容，并且“所有事件的和”是必然事件，则称它们构成完备事件组.

（9）文氏图：事件的关系和运算可以用文氏图形象地表示出来（图 1.1），图中的矩形表示必然事件 Ω.

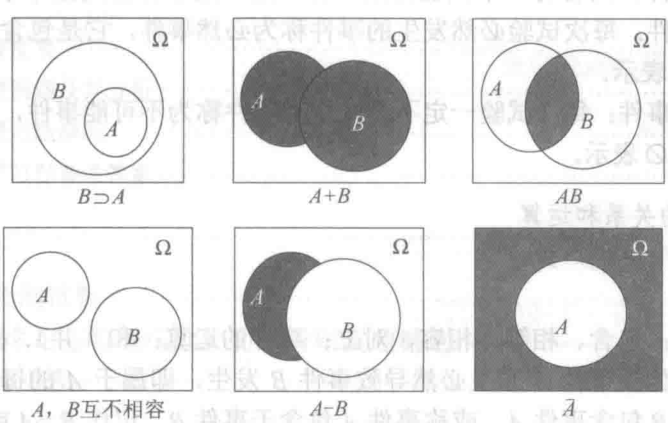

图 1.1

2. 事件运算的基本性质

对于任意事件 A，B，C，A_1，A_2，…，A_n，…，都有

（1）交换律：

$$A+B=B+A,\ AB=BA .$$

（2）结合律：

$$A+B+C=A+(B+C)=(A+B)+C ;$$
$$ABC=A(BC)=(AB)C .$$

（3）分配律：

$$A(B+C)=AB+AC ;$$
$$A\left(A_1+\cdots+A_n+\cdots\right)=AA_1+\cdots+AA_n+\cdots .$$

（4）对偶律：

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B};\quad \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B} ;$$
$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}\cdots ;$$
$$\overline{A_1A_2\cdots A_n\cdots}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\cdots+\overline{A_n}+\cdots .$$

（三）概率的定义和基本性质

1. 概率的定义

（1）概率的统计定义：在不变的条件下，重复进行 n 次试验，事件 A 发生的频率稳定地在某一常数附近摆动，且一般说来，n 越大摆动幅度越小，则称这个常数为事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

（2）概率的古典定义：若试验结果一共由 n 个基本事件 A_1，A_2，…，A_n 组成，并且这些事件的出现具有相同的可能性，而事件 A 由其中 m 个基本事件 A_1，A_2，…，A_m 组成，则事件 A 发生的概率可以用下式计算

$$P(A)=\frac{A\text{所包含的基本事件个数}}{\text{样本空间所包含的基本事件个数}}=\frac{m}{n} .$$

（3）条件概率：在事件 A 已经发生的条件下，事件 B 发生的概率，称为事件 B 在给定事件 A 下的条件概率，简称 B 关于 A 的条件概率，记作 $P(B|A)$．相应地，把 $P(A)$ 称为无条件概率.

事件 B 关于事件 A 的条件概率定义为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} .$$

2. 概率的运算法则和基本公式

（1）非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

（2）规范性：$P(\Omega)=1,\ P(\varnothing)=0$.

（3）可加性：对于任意有限或可列个两两不相容的事件 A_1，A_2，…，A_n，…，有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots .$$

（4）对立事件的概率：$P(\overline{A})=1-P(A)$.

（5）减法公式：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

（6）加法公式：对于任意两个事件 A，B，都有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) ,$$

特别地，当 A，B 互斥时，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

对于任意三个事件 A，B，C，有

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

（7）乘法公式：

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A),$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

（8）全概率公式：设 A_1，A_2，…，A_n 构成完备事件组，则对于任意事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

（9）贝叶斯公式：设 A_1，A_2，…，A_n 构成完备事件组，则当 $P(B)>0$ 时，有

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B\mid A_k)}\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

（四）事件的独立性和独立试验

1. 事件的独立性

（1）若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 和 B 相互独立.

（2）对于三个事件 A，B，C，若四个等式：

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(AC)=P(A)P(C),$$

$$P(BC)=P(B)P(C),\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

同时成立，则称事件 A，B，C 相互独立.

（3）设 A_1，A_2，…，A_n 为 $n(n>2)$ 个事件，若对其任何组合 $1\leqslant i<j<\cdots\leqslant n$，有

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$$

$$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$

$$\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

成立，则称事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立.

2. 事件的独立性的性质

（1）若事件 A 与 B 独立，则事件 A 与 $\overline{B}$、事件 $\overline{A}$ 与 B、事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

（2）若 A 与 B 都是正概率事件，则它们相互独立的充分必要条件为 $P(A\mid B)=P(A)$.

（3）设 A 与 B 都是正概率事件，若 $P(A\mid B)=P(A)$，则必有 $P(B\mid A)=P(B)$.

（4）若 A_1，A_2，…，A_n 是 n 个相互独立的事件，把 n 个事件分成互不相交的若干组，每个组内的事件经过运算后都将产生一个新事件，则这些新事件之间也是相互独立的.

（5）若 A_1，A_2，…，A_n 是 n 个相互独立的事件，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n).$$

3. 试验的独立

(1) 独立试验：如果分别与各个试验相联系的任意n个随机事件之间相互独立，则称试验E_1，E_2，…，E_n为相互独立的.

(2) 独立重复试验：“独立”表示“与各试验相联系的事件之间相互独立”，“重复”表示“每个事件在各次试验中出现的概率不变”.

(3) 伯努利试验：只计“成功”和“失败”两种对立结局的试验，称为伯努利试验. 将一个伯努利试验独立地重复n次，称为n次（n重）伯努利试验，也简称伯努利试验.

(4) 伯努利试验的特点：

① 只有两种对立的结果；

② 各次试验相互独立；

③ 各次试验成功的概率相同.

(5) 伯努利定理：设一次试验中事件A发生的概率为$p(0<p<1)$，n重伯努利试验中，事件A恰好发生k次的概率用$p_n(k)$表示，则

$$p_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}，k=0，1，\cdots，n.$$

(五) 事件概率的计算

(1) 直接计算：古典型和几何型.

(2) 用频率估计概率：当n充分大时，用n次独立重复试验中事件出现的频率，估计在每次试验中事件的概率.

(3) 概率的推算：利用概率的性质、基本公式和事件的独立性，由简单事件的概率推算较复杂事件的概率.

(4) 利用概率分布：利用随机变量的概率分布，计算与随机变量相联系的事件的概率（见第2章）.

二、典型例题及其分析

例 1.1 一个工人生产了三个零件，以事件A_i来表示他生产的第i个零件是合格品（$i=1，2，3$），试用A_i（$i=1，2，3$）表示下列事件：

(1) 只有第一个零件是合格品B_1；

(2) 三个零件中只有一个合格品B_2；

(3) 第一个是合格品，但后两个零件中至少有一个次品B_3；

(4) 三个零件中最多只有两个合格品B_4；

(5) 三个零件都是次品B_5；

(6) 三个零件中最多有一个次品R_6.

【解】(1) B_1等价于“第一个零件是合格品，同时第二个和第三个都是次品”，故有$B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(2) B_2等价于“第一个是合格品而第二、三个是次品”或“第二个是合格品而第一、

三个是次品”或“第三个是合格品而第一、二个是次品”，故有

$$B_2 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3 .$$

（3）$B_3 = A_1(\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3)$．

（4）事件B_4的逆事件是“三个零件都是合格品”，故$B_4 = \overline{A_1 A_2 A_3}$．或者与$B_4$等价的事件还可以是“三个零件中至少有一个次品”，于是$B_4 = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$．

（5）$B_5 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$，当然也可以利用事件“三个零件中至少有一个合格品”的逆事件与B_5等价，得出$B_5 = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$．

（6）B_6等价于“三个事件中无次品”或“三个零件中只有一个次品”，故有

$$B_6 = A_1A_2A_3 \cup \overline{A}_1A_2A_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup A_1A_2\overline{A}_3 .$$

另外，也可以利用B_6与事件“三个零件中至少有两个合格品”等价，可得$B_6 = A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_1A_3$.

例 1.2 已知袋中有α个白球及β个黑球.

（1）从袋中任取$a+b$个球，试求所取的球恰含有a个白球和b个黑球的概率$(a \leqslant \alpha,\ b \leqslant \beta)$；

（2）从袋中依次取出$k+1$ $(k+1 \leqslant \alpha+\beta)$个球，如果每个球被取出后不放回，试求最后取出的球是白球的概率.

【解】（1）从$\alpha+\beta$个球中取出$a+b$个球，这种取法总共有$C_{\alpha+\beta}^{a+b}$种．设$A=\{$恰好取中a个白球和b个黑球$\}$，故A中所含样本总数为$C_\alpha^a \cdot C_\beta^b$，从而

$$P(A) = \frac{C_\alpha^a \cdot C_\beta^b}{C_{\alpha+\beta}^{a+b}}.$$

（2）从$\alpha+\beta$个球中连续不放回地取出$k+1$个球，由于注意了次序，所以应考虑排列，因此这样的取法共有$A_{\alpha+\beta}^{k+1}$种．设$B=\{$最后取出的球为白球$\}$，则B中所含样本点数可以通过乘法原理来计算，即先从α个白球中任意取一个（即第$k+1$个球为白球），有α种取法；而其余地k个在余下的$\alpha+\beta-1$个中任取k个，有$A_{\alpha+\beta-1}^{k}$种取法（同样要考虑排列），因而B中包含的样本点共有$\alpha A_{\alpha+\beta-1}^{k}$个，故

$$P(B) = \frac{\alpha A_{\alpha+\beta-1}^{k}}{A_{\alpha+\beta-1}^{k+1}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

例 1.3 一次掷 10 颗骰子，已知至少出现一个一点，问至少出现两个一点的概率是多少？

【解】该问题是一个典型地条件概率的题目，由于“至少出现两个一点”包含了在同一条件下恰好出现“两个一点”“三个一点”…“10 个一点”9 种情形，因此考虑其对立事件会比较简便.

设$A=\{$至少出现一个一点$\}$，$B=\{$至少出现两个一点$\}$，则所求概率为

$$P(B \mid A) = 1 - P(\overline{B} \mid A) = 1 - \frac{P(\overline{B}A)}{P(A)}.$$

又由$\overline{B}=\{$至多出现一个一点$\}$，则$\overline{B}A=\{$恰好出现一个点$\}$，于是

$$P(\overline{B}A)=\frac{10\times5^9}{6^{10}}\approx0.3230,$$

且

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{5^{10}}{6^{10}}\approx0.8385,$$

所以

$$P(B\mid A)=1-\frac{P(\overline{B}A)}{P(A)}\approx1-\frac{0.3230}{0.8385}\approx0.6148.$$

例 1.4　设 A，B 为任意两个随机事件，且 $P(A)=p$，$P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$，求 $P(B)$.

【解】由于

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\overline{B})&=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-\left[P(A)+P(B)-P(AB)\right],\end{aligned}$$

又由于 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$ 且 $P(A)=p$，故

$$P(B)=1-P(A)=1-p.$$

例 1.5　对某一目标依次进行三次独立射击，设第一、二、三次射击的命中率分别为 0.4，0.5 和 0.7，试求：

（1）三次射击中恰好有一次命中的概率；

（2）三次射击中至少有一次命中的概率.

【解】令

$$A_i=\{\text{第 } i \text{ 次射击命中目标}\},\ i=1,\ 2,\ 3,$$

$$B=\{\text{三次中恰好有一次命中}\},\ C=\{\text{三次中至少有一次命中}\},$$

则

$$B=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$
$$C=A_1\cup A_2\cup A_3.$$

由 A_1，A_2，A_3 的独立性，知

（1）$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)\\&=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7\\&=0.36.\end{aligned}$$

（2）$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})\\&=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1-0.6\times0.5\times0.3=0.91.\end{aligned}$$

例 1.6　已知玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 0，1，2 只残次品的概率分别为 0.8，0.1，0.1，某顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取一箱，而顾客开箱随机地查看 4 只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回，试求：

（1）顾客买下该箱的概率 α；

（2）在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率 β.

【解】设事件 $A=\{\text{顾客所查看的一箱}\}$，$B_i=\{\text{售货员取的箱中恰好有 } i \text{ 件残次品}\}$，

其中$i=1, 2, 3$，显然B_0，B_1，B_2构成一个完备事件组，且

$$P(B_0)=0.8\,,\quad P(B_1)=0.1\,,\quad P(B_2)=0.1\,,$$

$$P(A\mid B_0)=1\,,\quad P(A\mid B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5}\,,\quad P(A\mid B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}\,.$$

（1）由全概率公式，得

$$\alpha=P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A\mid B_i)$$

$$=0.8\times1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}\approx0.94\,.$$

（2）由贝叶斯公式，得

$$\beta=P(B_0\mid A)=\frac{P(B_0)P(A\mid B_0)}{P(A)}\approx\frac{0.81\times1}{0.94}\approx0.85\,.$$

例 1.7 设有甲、乙、丙三门大炮同时独立地向某目标射击，每门大炮的命中率分别为0.2，0.3和0.5，目标被命中一发而击毁的概率为0.2，被命中两发而击毁的概率为0.6，被命中三发而击毁的概率为0.9，求：

（1）三门炮在一次射击中击毁目标的概率；

（2）在目标被击毁的条件下，只由甲炮击中的概率．

【解】设事件A_1，A_2，A_3分别表示甲、乙、丙炮击中目标，D表示目标被击毁，H_i表示由$i(i=1, 2, 3)$门大炮同时击中目标，则由题设可得

$$P(A_1)=0.2\,,\quad P(A_2)=0.3\,,\quad P(A_3)=0.5\,,$$

$$P(D\mid H_1)=0.2\,,\quad P(D\mid H_2)=0.6\,,\quad P(D\mid H_3)=0.9\,.$$

由于A_1，A_2，A_3相互独立，故

$$\begin{aligned}P(H_1)&=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)\\&=0.2\times0.7\times0.5+0.8\times0.3\times0.5+0.8\times0.7\times0.5\\&=0.47\,.\end{aligned}$$

同理，

$$P(H_2)=P(A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup A_1\overline{A}_2A_3)=0.22\,,$$

$$P(H_3)=P(A_1A_2A_3)=0.03\,.$$

（1）由全概率公式，得

$$P(D)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(D\mid H_i)$$

$$=0.47\times0.2+0.22\times0.6+0.03\times0.9=0.253\,.$$

（2）由贝叶斯公式，得

$$P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\mid D)=\frac{P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3D)}{P(D)}$$

$$=\frac{P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)P(D\mid A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)}{P(D)}=0.0554\,.$$

三、典型习题精练

1．写出下列随机试验的样本空间：

（1）同时掷两颗骰子，记录两颗骰子的点数；

（2）某车间生产产品，直到得到 5 件正品为止，记录生产产品的总件数；

（3）在单位圆内任取一点，记录它的坐标；

（4）一单位长的木棍随机截为三段，记录各段的长度．

2．设 A，B，C 为 3 个事件，试用 A，B，C 的运算关系表示下列事件：

（1）A 发生，B 与 C 不发生；

（2）A 与 B 都发生，C 不发生；

（3）A，B，C 都发生；

（4）A，B，C 都不发生；

（5）A，B，C 不都发生；

（6）A，B，C 中至少有 1 个发生；

（7）A，B，C 中至少有 2 个发生．

3．若事件 A，B，C 满足 $A+C=B+C$，试问 $A=B$ 是否成立？请举例说明．

4．设 A,B 为任意两个事件，则 $A\subset B$、$\overline{B}\subset\overline{A}$、$A\overline{B}=\varnothing$、$\overline{A}B=\varnothing$ 是否与 $A\cup B=B$ 等价，请说明理由．

5．设 A，B 是任意两个事件，若 $AB=\varnothing$，则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 是否相容？$\overline{A}$ 与 B 是否相容？请说明理由．

6．袋中装有标有 1，2，…，n 号的球各一个，采用有放回和不放回两种方式摸球，试求在不同方式下第 k 次摸球时首次摸到 1 号球的概率．

7．将 3 个形状相同的球随机放入 4 个盒中，假定每个盒能容纳的球不限，求有 3 个盒中各有 1 个球的概率．

8．袋中放有 2 个伍分、3 个贰分和 5 个壹分的硬币，任取其中 5 个，求总数超过壹角的概率．

9．从 n 双不同的鞋子中任取 $2r(2r<n)$ 只，试求下列事件发生的概率．

（1）没有成双的鞋子；

（2）恰有一双鞋子；

（3）恰有两双鞋子；

（4）有 r 双鞋子．

10．在区间(0，1)中随机取两个数，求这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率．

11．对于事件 A,B,C，已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，试求 A，B，C 中至少有一个发生的概率．

12．设 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，试证 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$．

13．已知$P(A)=0.5$，$P(A-B)=0.1$，求$P(\overline{AB})$．

14．若$B\subset A$，$C\subset A$，且$P(A)=0.9$，$P(\overline{B}\cup\overline{C})=0.8$，求$P(A-BC)$．

15．若A，B为任意两个随机事件，则判断$P(AB)$与$\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$的大小关系．

16．掷三颗骰子，已知所得三个点数都不一样，求这三个点数中含有1点的概率．

17. 设A,B为任意两个随机事件，且$P(B)>0$，$P(A|B)=1$，则判断$P(A\cup B)$与$P(A)$的大小关系．

18．设甲袋中有a只白球b红球，乙袋中有m只白球n红球，现从甲袋中任取一球放入乙袋中，再从乙袋中任取一球，求最后取到的球是白球的概率．

19．已知装有m ($m\geqslant 3$)只白球和n只黑球的罐子中遗失了一球，但不知颜色，今随机地从罐中取出两个球，如果这两个球都是白球，求遗失的是白球的概率．

20．设A，B为两个相互独立的事件，$P(A-B)=0.3$，$P(B)=0.5$，求$P(B-A)$．

21．加工某一零件共需经过四道工序，设第一、二、三、四道工序的次品率分别是2%，3%，5%，3%，假定各道工序互不影响，求所加工零件的次品率．

22．已知事件A与事件B相互独立且互不相容，求$\min\{P(A),\ P(B)\}$．

23．进行一系列独立试验，每次试验成功的概率均为p，试求以下事件的概率：

（1）在n次试验中取得$r(1\leqslant r\leqslant n)$次成功；

（2）直到第r次试验才成功；

（3）第r次成功之前恰好失败k次；

（4）直到第n次试验才取得$r(1\leqslant r\leqslant n)$次成功．

四、典型习题参考答案

1．（1）
$$\begin{aligned}\Omega=\{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\&(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\&(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\&(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\&(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\&(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\};\end{aligned}$$

（2）$\Omega=\{5,\ 6,\ 7,\ \cdots\}$；

（3）$\Omega=\{(x,\ y)\,|-1<x<1,\ -1<y<1,\ x^2+y^2<1\}$；

（4）$\Omega=\{(x,\ y,\ z)\,|\,0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<z<1,\ x+y+z=1\}$．

2．（1）$A\overline{B}\overline{C}$；（2）$AB\overline{C}$；（3）$ABC$；（4）$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；（5）$\overline{ABC}$；

（6）$\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}=A+B+C$；（7）$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC=AB+BC+AC$．

3．不一定，举例略．

4．$A\subset B$、$\overline{B}\subset\overline{A}$、$A\overline{B}=\varnothing$与$A\cup B=B$等价，$\overline{A}B=\varnothing$与$A\cup B=B$不等价．理由略．

5．$\overline{A}$，$\overline{B}$ 可能不相容也可能相容，$\overline{A}$，B 一定相容．理由略．

6．（1）有放回：$\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{n}$；（2）不放回：$\dfrac{1}{n}$．

7．$\dfrac{3}{8}$．

8．$\dfrac{1}{2}$．

9．（1）$P(A)=\dfrac{C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$；　（2）$P(B)=\dfrac{C_n^1C_{n-1}^{2r-2}(C_2^1)^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$；

（3）$P(C)=\dfrac{C_n^2C_{n-2}^{2r-4}(C_2^1)^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}$；　（4）$P(D)=\dfrac{C_n^r}{C_{2n}^{2r}}$．

10．$\dfrac{3}{4}$．

11．$\dfrac{5}{8}$．

12．证明：
$$\begin{aligned}P(\overline{A}\overline{B})&=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-\left[P(A)+P(B)-P(AB)\right]\\&=1-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-P(AB)\right]\\&=P(AB).\end{aligned}$$

13．0.6．

14．0.7．

15．$P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$．

16．$\dfrac{1}{2}$．

17．$P(A\cup B)=P(A)$．

18．$\dfrac{am+bm+a}{(a+b)(m+n+1)}$．

19．$\dfrac{m-2}{m+n-2}$．

20．0.2．

21．0.12402．

22．0．

23．（1）$C_n^rp^r(1-p)^{n-r}$；　（2）$(1-p)^{r-1}p$；

（3）$C_{r+k-1}^kp^{r-1}(1-p)^kp$；　（4）$C_{n-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-r}p$．