

李 彬 著

# 干切削刀具的分形特性 及有限元模拟技术

非外借



科学出版社

# 干切削刀具的分形特性 及有限元模拟技术

李 彬 著



科 学 出 版 社

北 京

## 内 容 简 介

本书结合作者多年来从事干切削刀具分形特性及有限元模拟研究的相关成果撰写而成,系统阐述了干切削刀具分形特性的理论和方法、最新发展及应用。全书共6章,主要内容包括:干切削刀具的分形特性及模拟总论,干切削刀具设计与制备的最新进展,干切削刀具磨损表面分形研究,车削加工分形研究,钻削加工分形研究,铣削加工分形研究。本书着眼于最新的研究内容和动向,既有理论分析,又结合实际应用,反映了干切削刀具分形研究的最新成果。

本书可供从事切削理论和切削刀具等领域研究的技术人员参考,也可作为科研人员、高等院校教师及相关专业研究生的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

干切削刀具的分形特性及有限元模拟技术/李彬著. —北京:科学出版社, 2018. 11

ISBN 978-7-03-059414-3

I. ①干… II. ①李… III. ①金属切削-研究 IV. ①TG5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 253808 号

责任编辑:裴 育 纪四穗 / 责任校对:郭瑞芝

责任印制:张 伟 / 封面设计:蓝 正

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2018年11月第 一 版 开本:720×1000 B5

2018年11月第一次印刷 印张:12 3/4

字数:257 000

定价:85.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## 序 言

干切削加工技术是实现节能、降耗、环境保护和人类身心健康、清洁安全生产的“绿色制造”的关键技术,是一种先进的制造技术。目前,环境保护法规要求越来越严格,欧、美、日等工业发达国家和地区已经把切削工艺研究和开发的重点转向干切削加工,并在制造领域优先推广应用干切削加工技术。我国也在干切削和准干切削加工领域进行了相关研究和一定推广,但将相关理论运用到干切削刀具的设计与加工的研究较少,目前仍处于探索阶段。因此,将分形理论创新地应用于新型干切削刀具的设计中,对学术界和工业界是非常重要的贡献,为提高干切削刀具寿命和加工效率提供了普遍性的指导。

《干切削刀具的分形特性及有限元模拟技术》一书是作者李彬在多年研究成果的基础上撰写而成的。该书是国内少有的将分形理论应用到干切削刀具实践中并进行系统研究的学术专著,是作者在国家自然科学基金和省级重点项目等相关课题研究过程中,对多重分形干切削刀具进行系统研究而形成的研究成果。书中提出了多重分形自适应干切削刀具的概念,并对这种干切削刀具的设计、制备和应用作了全面介绍,为有效解决干切削刀具寿命和加工效率偏低的难题奠定了理论与技术基础,无疑具有非常重要的意义。

该书内容丰富、新颖先进,基础理论和技术实践相结合,展现了多重分形干切削刀具的前沿和发展趋势,并兼具学术研究专著和技术参考图书的特点,具有较好的可读性和借鉴性。我相信该书对从事切削加工研究和切削刀具开发的研发人员以及刀具制造和装备制造企业的技术人员是一本具有理论价值和实用价值的参考书,对于提高我国干切削刀具和机械加工技术水平也有重要的促进作用。



山东大学

2018年6月

## 前 言

在切削加工中,使用切削液对提高加工效率与加工工件表面质量具有重要作用,但切削液在制造、使用、处理和排放的各个环节均会对环境造成严重污染。探索对环境无污染、可持续发展的现代制造模式已经成为我国制造业面临的最紧迫难题。在切削加工中合理、适当地选用干切削技术不仅可以在源头上解决切削液污染问题,而且能够降低生产成本,这无疑将为众多制造企业指明方向。在实际的生产加工中,缺少切削液的润滑和冷却作用,不可避免地会使加工中产生的热量增加,导致切削温度升高、排屑不畅,极易引起刀具寿命下降及加工表面质量恶化。因此,干切削技术对刀具的要求比过去更加苛刻,要求刀具耐磨性更好,更加安全、可靠。开发性能优异、高寿命的新型干切削刀具是重要而亟待解决的难题。

分形理论作为处理复杂现象的非线性方法,使人们能以新的理念和手段来处理自然界中的许多复杂问题,通过扑朔迷离的无序混乱现象和不规则形态,揭示隐藏在复杂现象背后的规律,发现局部和整体之间的本质联系。分形理论在物理学的相变研究、材料学的结构辨识、力学的断裂与破坏、高分子链的聚合、酶的生长机理研究、自然图形的模拟和模式识别等领域取得了令人满意的成就。

本书运用分形理论的非线性优势来处理干切削刀具设计中的各种复杂情况,为干切削刀具的设计与开发提供了新的思路和方法,为提高刀具性能开拓了新的途径;深入研究干切削刀具的分形特性及相关模拟技术,在综合各种加工手段与分形特征的基础上,得到了关键的加工工艺,为提高加工效率提供了普遍性的指导。相关成果对减小刀具磨损、提高刀具寿命、降低生产成本有重要的实际意义,对丰富和发展切削刀具的设计理论具有重要的学术价值。

作者多年来一直致力于干切削刀具的设计开发及其减摩抗磨机理研究。本书是在总结这些研究成果的基础上撰写而成的,其内容主要来自作者在国内外专业期刊上发表的学术论文、授权的专利和撰写的项目研究报告等;涉及干切削刀具的设计与制备,车削、钻削与铣削加工的分形特性研究等。撰写本书的目的在于向读者介绍该领域的最新进展,并在实际生产中推广这些成果,希望对我国刀具技术的发展和应用水平的提高起到积极有益的作用。

本书的研究工作得到了国家自然科学基金项目(51105188、51475222)、河南省科技创新杰出青年项目(144100510017)、河南省科技攻关计划项目(132102210514)、河南省国际科技合作计划项目(144300510050)、河南省高等学校青年骨干教师项目(2013GGJS-186)、河南省教育厅自然科学研究重点项目

(12B460016)、洛阳理工学院博士科研基金项目(2010BZ09)、洛阳理工学院学术著作出版基金项目等的资助。衷心感谢上述基金项目多年来给予的支持。

感谢洛阳理工学院机械工程学院和先进设计制造技术研究所的同事与学生为本书相关研究所做的贡献,特别感谢陈智勇讲师在资料收集与整理方面所做的工作。同时,机械工程学院的刘建寿院长和赵红霞书记为相关研究也提供了大量支持,在此表示由衷的感谢。

由于干切削刀具的分形理论涉及范围广、内容多,加之作者水平有限,书中难免存在不妥之处,恳请广大读者提出宝贵意见和建议,以便进一步完善。

李 彬

洛阳理工学院

2018年5月

# 目 录

序言

前言

|                                     |    |
|-------------------------------------|----|
| 第 1 章 绪论                            | 1  |
| 1.1 概述                              | 1  |
| 1.2 干切削刀具的性能与特点                     | 2  |
| 1.2.1 切削加工基本概念                      | 2  |
| 1.2.2 刀具几何参数的选择                     | 5  |
| 1.3 分形理论及其应用                        | 6  |
| 1.3.1 分形的概念及特性                      | 6  |
| 1.3.2 分形维数及计算方法                     | 9  |
| 1.3.3 分形理论在切削加工中的应用                 | 12 |
| 1.4 有限元模拟技术及其在分形特性研究中的应用            | 15 |
| 1.4.1 有限元理论                         | 15 |
| 1.4.2 有限元法基本分析流程                    | 16 |
| 1.4.3 非线性问题的求解                      | 18 |
| 1.4.4 有限元法在切削领域的应用                  | 19 |
| 1.4.5 有限元软件在切削领域的应用                 | 22 |
| 第 2 章 干切削刀具设计与制备的最新进展               | 24 |
| 2.1 涂层刀具简介                          | 24 |
| 2.1.1 高速钢涂层刀具简介                     | 25 |
| 2.1.2 硬质合金涂层刀具简介                    | 26 |
| 2.2 AlZrCrN 复合双梯度涂层刀具的设计及其制备        | 33 |
| 2.3 基于元胞自动机模型的复合刀具材料微观结构与力学性能的模拟及预测 | 37 |
| 2.4 基于扩展有限元的复合陶瓷材料多重增韧机制研究          | 41 |
| 第 3 章 干切削刀具磨损表面分形研究                 | 44 |
| 3.1 刀具磨损表面的分形特性                     | 44 |
| 3.1.1 分形维数在刀具磨损中的应用                 | 44 |
| 3.1.2 白光干涉法在表面形貌测量中的应用              | 45 |

|       |                  |     |
|-------|------------------|-----|
| 3.2   | 刀具磨损表面模型的建模研究    | 48  |
| 3.3   | 刀具切削加工分形与切削力特性研究 | 50  |
| 3.4   | 刀具磨损表面粗糙度的分形特性研究 | 58  |
| 第4章   | 车削加工分形研究         | 63  |
| 4.1   | 涂层刀具车削加工分形研究     | 63  |
| 4.1.1 | 切削过程有限元仿真        | 63  |
| 4.1.2 | 仿真结果分析           | 70  |
| 4.1.3 | 基于切削力的干车削性能实验研究  | 76  |
| 4.2   | 非涂层刀具车削加工分形研究    | 94  |
| 4.2.1 | 切削过程有限元仿真        | 94  |
| 4.2.2 | 仿真结果分析           | 103 |
| 4.2.3 | 切削实验与仿真结果对比分析    | 113 |
| 4.3   | 切削力分形特性研究        | 115 |
| 4.3.1 | 切削过程有限元仿真        | 115 |
| 4.3.2 | 切削实验与仿真结果对比分析    | 120 |
| 4.3.3 | 切削力的分形特性分析       | 125 |
| 第5章   | 钻削加工分形研究         | 133 |
| 5.1   | 对45号钢的钻削过程有限元仿真  | 133 |
| 5.1.1 | 有限元模型的建立         | 133 |
| 5.1.2 | 仿真模拟过程           | 137 |
| 5.2   | 仿真结果分析           | 144 |
| 5.2.1 | 不同钻削速度下的切屑成形     | 144 |
| 5.2.2 | 温度场分析            | 146 |
| 5.2.3 | 应力场分析            | 148 |
| 5.3   | 钻削加工的分形特征研究      | 151 |
| 5.3.1 | 45号钢钻削加工实验       | 151 |
| 5.3.2 | 实验结果分析           | 152 |
| 第6章   | 铣削加工分形研究         | 158 |
| 6.1   | 二维铣削有限元仿真及结果分析   | 158 |
| 6.1.1 | 二维铣削过程有限元仿真计算    | 158 |
| 6.1.2 | 二维铣削仿真结果分析       | 160 |
| 6.2   | 三维铣削有限元仿真及结果分析   | 162 |
| 6.2.1 | 三维铣削过程有限元仿真计算    | 162 |
| 6.2.2 | 三维铣削仿真结果分析       | 175 |

---

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 6.3 铣削实验与结果分析 ..... | 182 |
| 6.3.1 铣削实验 .....    | 182 |
| 6.3.2 实验结果分析 .....  | 183 |
| 参考文献 .....          | 186 |

# 第 1 章 绪 论

## 1.1 概 述

我国工业化的不断发展,对机床制造业的要求越来越高,数控机床加工中心不断向高效率、高速度加工方向发展,加工能力得到极大提高,同时对刀具提出了更高的要求。刀具表面涂层技术是近几十年发展起来的材料表面改善技术,有效地提高了切削刀具的使用寿命,解决了刀具材料的硬度、耐磨性与强度、韧性之间的矛盾,改善了刀具的综合力学性能,提高了机械加工效率。目前已有研究表明,采用涂层刀具进行加工,不仅可以满足零件的加工质量要求,还可以实现绿色加工,涂层刀具将有十分广阔的应用前景。

随着机械制造业的高速发展,寻求新的制造模式以实现制造业的可持续发展,是当前制造业面临的一个巨大挑战。绿色制造的目标就是对资源的合理利用,降低成本,减少对环境的污染,以实现制造业的可持续发展。如何在实际生产中实现机械零件的绿色制造,是机械行业技术人员主要面对的难题。在切削加工中,使用切削液对提高加工效率与加工工件表面质量具有重要作用,但它也是造成环境污染的一个重要根源。因此,在切削加工中合理、适当地选用干切削技术,对企业经济效益和社会效益协调优化发展起到相当重要的作用。

干切削技术是在机械加工中为保护环境、降低成本而有意识地减少或完全停止使用切削液的加工方法。干切削在实质上并不是简单地停止切削液的使用,而是在停止切削液使用的同时,还要保证产品的高质量、生产的高效率、刀具的高耐用度及其切削过程的高可靠性,这就需要性能优良的机床、干切削刀具及辅助设施代替切削液,从而实现真正意义上的干切削加工。

干切削不同于以往的传统切削,它对刀具材料提出了更高的要求。干切削刀具材料必须具有极高的红硬性和热韧性,良好的耐磨性、耐冲击性和抗黏结性等性能。陶瓷刀具、聚晶金刚石刀具、涂层刀具等是目前用于干切削加工的主要刀具。陶瓷刀具不仅硬度高、耐磨性高、高温性能好,而且抗黏结性能和化学稳定性优良,摩擦系数低,但陶瓷材料脆性大、强度及韧性差,在很大程度上限制了陶瓷刀具的应用范围,尤其在干切削中的应用;聚晶金刚石刀具具有高硬度、高耐磨性、高导热性、低摩擦系数、低热膨胀系数等优异性能,主要应用于干式加工铜、铝及铝合金工

件。近年来,刀具涂层技术发展迅猛,涂层工艺越来越成熟,成为提高刀具性能的重要途径,也解决了涂层与基体材料结合强度低的技术难题,目前刀具中有40%是涂层刀具。涂层刀具最适宜于干车削加工,涂层有类似切削液的功能,在干切削中主要起到的作用是:一方面,它能有效地改善切削过程的摩擦和黏附作用,降低切削热的生成;另一方面,它具有比刀具基体和工件材料低得多的热导率,减弱了刀具基体的热作用。刀具涂层在干切削技术中发挥着非常重要的作用。

涂层刀具因其优良的切削性能一直为人们所关注,但目前我国对涂层刀具的研究和使用与国外相比还有一定的差距,所以对涂层刀具切削性能的研究与探索具有重要的实际生产意义。

本书主要开展以下研究工作:

(1) 干切削刀具设计与制备。基于元胞自动机模型,对复合刀具材料微观结构与力学性能进行模拟及预测;基于扩展有限元,对复合陶瓷材料多重增韧机制进行研究;进行 AlZrCrN 复合双梯度涂层刀具的设计及其制备。

(2) 干切削刀具磨损表面分形研究。基于分形理论和有限元理论,对刀具磨损表面模型的建模、刀具切削加工分形与切削力特性、刀具磨损表面粗糙度的分形特性三个方面进行研究。

(3) 车削加工分形研究。将仿真模拟和切削实验相结合,分别对涂层刀具和非涂层刀具的车削加工进行分形研究,并针对切削力分形特性进行研究。

(4) 钻削加工分形研究。以 45 号钢为研究对象,将仿真模拟和钻削实验相结合,对不同钻削速度下的切屑成形、加工表面分形特征进行研究。

(5) 铣削加工分形研究。将仿真模拟和铣削实验相结合,分别对二维铣削过程和三维铣削过程进行研究。

## 1.2 干切削刀具的性能与特点

### 1.2.1 切削加工基本概念

金属切削加工是用刀具切除工件上预留的金属材料,从而使工件的形状、尺寸精度及表面质量都合乎规定要求的加工方法。由刀具切除的多余金属成为切屑而脱离工件。金属切削过程就是刀具与工件之间发生相对运动并相互作用的过程。切削运动按照其在切削过程中所起作用的不同可以分为主运动和进给运动。主运动使刀具切削刃及其毗邻的刀具表面切入工件材料,使被切削工件表面转变为切屑,从而形成新工件表面。进给运动则配合主运动依次地或连续不断地切除切屑,同时形成具有所需几何特性的已加工表面。

图 1-1 为金属切削变形区的划分。在切削过程中切削刃起切割作用,刀面起推挤作用。金属切屑的形成过程就是切削层金属的变形过程。切削层的金属变形按照扩展的切削模型可划分为三个变形区:第一变形区(剪切滑移)、第二变形区(纤维化)、第三变形区(纤维化与加工硬化)。三个变形区的交汇处即刃区的情况更为复杂:一方面是锋利切削刃的作用,造成应力集中;另一方面是刃口钝圆半径的存在,使之形成比其他区域更为强烈的挤压和摩擦,从而使该区金属剧烈变形或断裂而与工件母体分离。

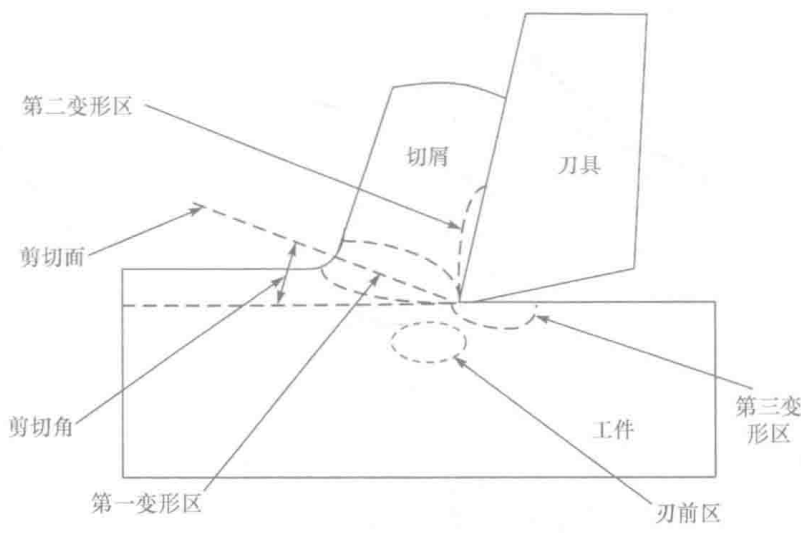


图 1-1 金属切削变形区的划分

加工普通塑性金属时,剪切变形的大小可以用剪切角来衡量。剪切角越小,则剪切变形越大。图 1-2 为切屑类型划分,由于工件材料和切削条件的不同,从而根据剪切变形的不同,可以将切屑分为带状切屑、挤裂切屑、单元切屑和崩碎切屑。其中,前三种类型的切屑一般是在切削塑性金属材料时产生的,而崩碎切屑则一般是切削脆性金属时产生的。

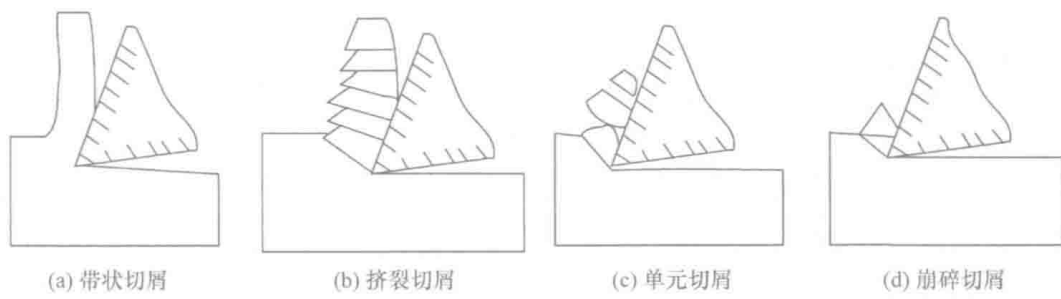


图 1-2 切屑类型划分

在切削加工时,刀具切入工件,使被加工材料产生弹性变形和塑性变形而形成切屑所需的力称为切削力。通常将切削力  $F$  分解为三个相互垂直的分力,即主切削力  $F_z$ 、切深抗力  $F_y$ 、进给抗力  $F_x$ ,如图 1-3 所示。影响切削力的因素包括工件材料、进给量、背吃刀量、切削速度、刀具前角、主偏角、刀尖圆弧半径、刀具材料、刀具磨损和切削液等。

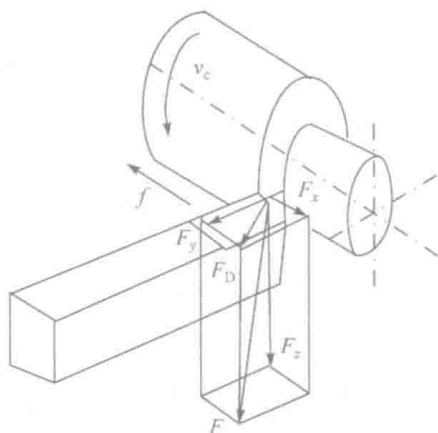


图 1-3 切削力的分解

切削力的测量工具主要为测力仪。其中压电式测力仪的测量原理是利用  $F_{ny}$  切削力作用在压电晶体上产生的电荷,经过电荷放大器转换成相应的电压参数继而获得对应的切削力值。瑞士 Kistler 公司的压电式三向测力仪技术成熟、性能稳定、测量精度高,在国内外切削加工研究中应用较为广泛。

在刀具作用下被切削材料发生塑性变形时产生的功、切屑与前刀面以及工件与后刀面之间的摩擦力所做的功绝大部分转变为切削热。因此,切削时共有三个产生热量的区域,即剪切滑移区、切屑和前刀面接触区、后刀面与工件表面接触区。若忽略进给运动所消耗的功,同时假定主运动所消耗的功全部转化为热能,则单位时间内产生的切削热可由式(1-1)算出:

$$Q = F_z v_c \quad (1-1)$$

式中, $Q$  为每秒钟产生的切削热(J);  $F_z$  为主切削力(N);  $v_c$  为切削速度(m/s)。

切削区域产生的热量分别被切屑、工件、刀具和周围介质传导出,如图 1-4 所示。各部分传出热量的百分比,随不同的工件材料、刀具材料、切削用量、刀具几何角度及加工方式而异。切削过程中某时刻工件、切屑、刀具上各点的温度通常是不相同的,而且温度的分布也随时间而变化。一般说的切削温度是指刀具前刀面与切屑接触区域的平均温度。它不但测量方便,且与刀具磨损、积屑瘤的生长和消失以及已加工表面的质量有密切关系。

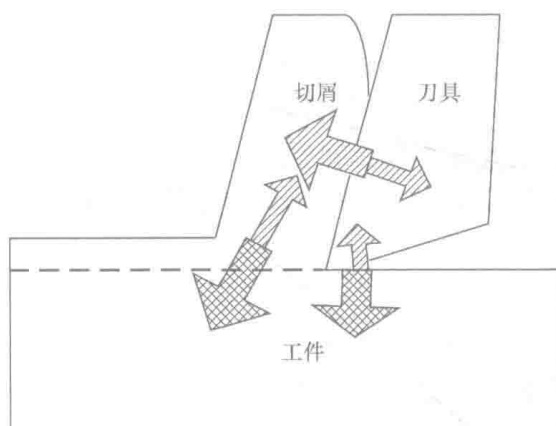


图 1-4 切削区热量的传导

### 1.2.2 刀具几何参数的选择

刀具的几何参数包括刀具的切削角度(如前角、后角、主偏角、副偏角、刃倾角等)、刀面的形式(如平前刀面,带卷屑、断屑槽的前刀面,波形刀面等)以及切削刃的形状(直线形、折线形、圆弧形等)。

刀具的几何参数对切削变形、切削力、切削温度和刀具磨损都有显著影响,从而影响切削加工生产率、刀具耐用度、加工质量和加工成本。为充分发挥刀具的切削性能,除应正确选用刀具材料外,还应合理选择刀具几何参数。

选择刀具合理几何参数主要取决于工件材料、刀具材料、刀具类型,也与切削用量、工艺系统刚性和机床功率等因素有关。

#### 1. 前角的选择

前角是刀具上重要的几何参数之一,它的大小取决于切削刃的锋利程度和强度,直接影响切削过程。前角的作用是:减小切屑的变形;减小前刀面与切屑之间的摩擦力。所以,当前角增大时将会:①减小切削力和切削热;②减小刀具的磨损;③提高工件的加工精度和表面质量。加工塑性材料和精加工时取大前角,加工脆性材料和粗加工时取小前角,前角可正、可负,也可以为零。

#### 2. 后角的选择

后角的主要作用是减小工件加工表面与主后刀面之间的摩擦力,所以增大后角可以:①减小切削力和切削热;②减小刀具的磨损;③提高工件的加工精度和表面质量。加工塑性材料和精加工时取大后角,加工脆性材料和粗加工时取小后角,后角只能是正的。

### 3. 主偏角的选择

主偏角的主要作用是改善切削条件,提高刀具寿命。减小主偏角,当进给量、背吃刀量不变,且其切削宽度提高、切削厚度降低时,可使切削条件得到改善,提高刀具寿命。系统刚性好时,取较小的主偏角;系统刚性差时,取较大的主偏角。

### 4. 刃倾角的选择

刃倾角的作用是:①影响切削刃的锋利程度;②影响切屑流出方向;③影响刀头强度和散热条件;④影响切削力的大小和方向。其选择主要是精加工时取正,粗加工时可取零或负。

## 1.3 分形理论及其应用

### 1.3.1 分形的概念及特性

#### 1. 分形的概念

在实际生产中,不管是对故障进行诊断,还是对工况进行检测,都需要从现场采集各种物理信号,如机床的振动信号、切削力的电压信号等。人们不能直接从这些物理信号上提取有关信息,需要对信号进行处理,包括对有用信息的放大、提取、保存或传输,即将有用信息分离出来。信号处理技术的快速发展为人们提供了很多有用的信号特征提取方法,如快速傅里叶变换法、小波分析法等,必须根据实际情况选择一种最合适有效的方法。

信号分析的经典方法包括时域分析法和频域分析法。时域分析又称波形分析,是利用信号幅值随时间变化的图形或者表达式对信号进行分析,得到信号任意时刻的均值、最大值、最小值、瞬时值等。通过信号的时域分析,可以研究信号的稳态分量及波动分量。频域分析是将信号的幅值、能量或相位变换到频率坐标轴进行表示,再分析其频率特性的一种信号处理方法,即又称为频谱分析。现实世界中存在非线性、随机性、相似性等复杂系统,而近年来兴起的分形理论为处理这些复杂系统提供了一种非常有效的方法。

20 世纪 70 年代,著名科学家 Mandelbrot 为了表征科学领域的一些复杂图形和复杂过程,引入了分形(fractal)一词,从对其词义简单地理解可知,它具有不规则和破碎的含义。到目前为止,对于分形并没有完整的数学定义。1982 年,Mandelbrot 起初定义分形为分形维数  $D_f$  大于拓扑维数  $D_t$  的集合,后来又考虑到对于普通的规则几何对象, $D_f$  等于  $D_t$ ,所以把分形定义为使不等式  $D_f \geq D_t$  成立的几

何对象。这个定义说明,要判断一个集合是不是分形,只要计算  $D_f$  和  $D_t$ ,再根据不等式  $D_f \geq D_t$  判断即可,而实际上一个集合的  $D_f$  和  $D_t$  的计算是比较复杂和困难的。1986年,Mandelbrot 给出了一个更广泛、更通俗的定义:分形是局部和整体有某种方式相似的形。

关于分形的含义,英国数学家 Falconer 认为它应该以生物学给出“生命”定义的一样方法给出,即不探求分形的确切简明定义,而寻求分形的特性。因此,他将分形看作具有下列性质的集合  $F$ :

- (1)  $F$  有“精细结构”,即含有任意小比例的细节;
- (2)  $F$  局部和整体的几何性质是不规则的,因此难以用传统的术语来描述;
- (3)  $F$  自身的结构具有自相似性;
- (4)  $F$  的“拓扑维数”小于它的“分形维数”;
- (5) 在许多情况下, $F$  可以由迭代方法产生。

由上所述,分形是具有无标度性和自相似性的不规则几何体,一般分形维数大于拓扑维数。但这只是分形的一般概念,为了更好地理解分形的概念,必须进一步理解分形的无标度性和自相似性。

## 2. 分形的特性

### 1) 分形的无标度性

分形的无标度性是指在描述某类事物时同时存在许多尺度,例如,海岸线的长度、地球的形貌、气候变化的周期等自然界分形现象都具有无标度性的特点。下面以 Mandelbort 于 1967 年提出的“英国海岸线有多长”的问题为例,来具体解释分形的无标度性。将海岸线视为特殊的分形曲线——科赫曲线,即在直线段上将其三等分,中间的线段换成一个去掉底边的等边三角形,依次类推,如图 1-5 所示。

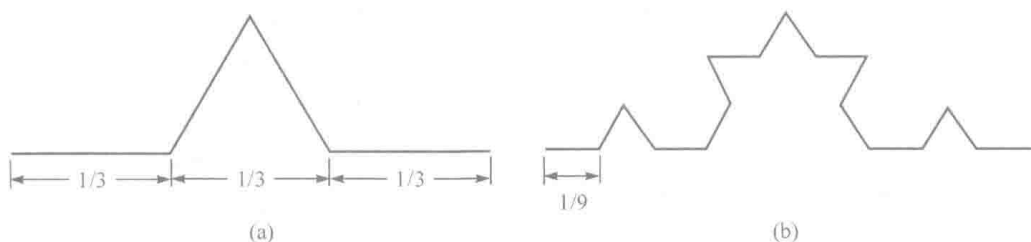


图 1-5 一种典型的分形特征图

图 1-5(a)和(b)的尺度  $k$  分别是  $\frac{1}{3}$  和  $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ , 那么测量出的海岸线长度  $L$  分别为  $\frac{4}{3}$  和  $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ 。照这样计算下去得出:若海岸线用尺度  $k = \left(\frac{1}{3}\right)^n$  去度量,则它的

长度  $L = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ 。

设  $L$  和  $k$  的关系为

$$L = k^\lambda = N(k) \cdot k \tag{1-2}$$

式中,  $N(k)$  是用尺度  $k$  去测量海岸线时得到的长度为  $k$  的段数。将  $k = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 、

$L = \left(\frac{4}{3}\right)^n$  代入式(1-2), 再对两边取对数, 可以求得式(1-2)中的系数  $\lambda$ , 即

$$\lambda = 1 - \frac{\lg 4}{\lg 3} = -0.2618 \tag{1-3}$$

则海岸线的长度  $L$  和尺度  $k$  的关系式可写为

$$L = k^{-0.2618} \tag{1-4}$$

由式(1-4)可以看出, 海岸线的长度  $L$  随着测量尺子的尺度  $k$  变小而越来越长, 从数学意义上说海岸线是趋于无限长的。对于海岸线这种没有特征尺度的事物, 无法运用经典几何中的长度、面积、体积等作为尺度标准去度量, 而用分形描述它更为合适。

2) 分形的自相似性

分形的自相似性是指某个对象的局部与整体在形状、结构方面具有惊人的相似性, 即对象的外观在不同的放大缩小级别上, 几何体的形态是相似的。自然界的分形大致可分为规则分形和无规则分形两类, 图 1-6 是两种典型的规则分形图案。

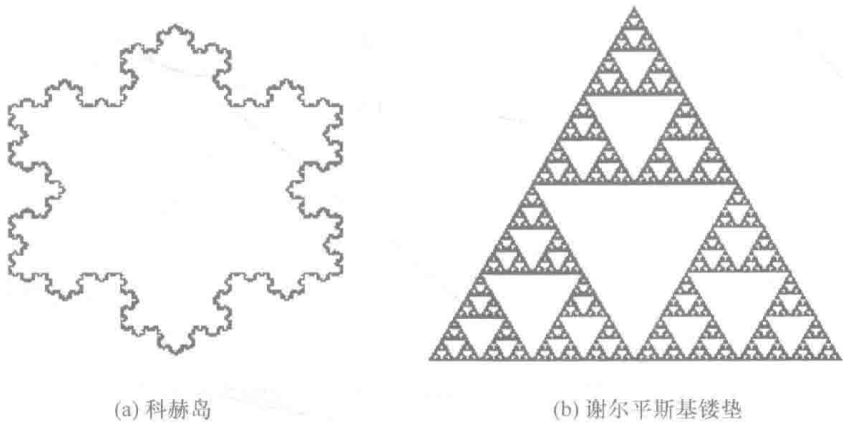


图 1-6 规则分形图案

从图 1-6 中可以看出, 分形图形即图 1-6(a)和(b)是严格自相似的, 它们是由数学模型生成的, 如果放大图中局部的任意部分到原始图形的尺寸, 会发现局部是整体的复制, 像这种严格的自相似分形称为规则分形。但自然界中实际的分形体