修订本

高等数学解题指南

GAODENG SHUXUE JIETI ZHINAN

主编　朱砾　王文强

湘潭大学出版社

修订本

高等数学解题指南

GAODENG SHUXUE JIETI ZHINAN

主　编　朱　砾　王文强

副主编（按姓氏拼音字母为序）

唐树江　熊　颖　杨　柳　朱少茗

湘潭大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指南 / 朱砾，王文强主编. —修订本
. —湘潭：湘潭大学出版社，2016.8
ISBN 978-7-81128-870-4
Ⅰ.①高… Ⅱ.①朱… ②王… Ⅲ.①高等数学—高等学校—题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 244254 号

GAODENG SHUXUE JIETI ZHINAN
高等数学解题指南(修订本)
朱 砾 王文强 主编

责任编辑：丁立松
装帧设计：张丽莉
出版发行：湘潭大学出版社
社　　址：湖南省湘潭市 湘潭大学出版大楼
电话(传真)：0731-58298966　邮编：411105
网　　址：http://press.xtu.edu.cn
印　　刷：长沙鸿和印务有限公司
经　　销：湖南省新华书店
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：27.5
字　　数：687 千字
版　　次：2016 年 8 月第 1 版
印　　次：2016 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-81128-870-4
定　　价：48.00 元

前 言

高等数学是一门非常重要的公共基础课，对于广大文科类专业（含经济类、管理类）的学生而言，怎样学好高等数学却是一桩很困难的事情。作为学生如果面对一道数学题，当自己冥思苦想后依旧解答不出来时，而老师却给出了一个绝妙的解法，此时他最希望知道的就是“老师是怎么想出来的呢?”尤其是当解法事实上还很容易时，他又总会感叹“自己本来完全应当想到的，但为什么却总是想不到?”美国著名数学教育家波利亚主张数学教育要培养学生思考问题和分析问题的能力，根本宗旨是“教会年轻人思考”，掌握数学就意味着要善于解题。此外，在一线教学的教师，经常会碰到很多学生提到希望能有一本与教材配套的辅导用书，为了帮助学生更好地学好高等数学，我们组织部分经验丰富的一线骨干教师编写了这本高等数学解题指南（修订本）。该修订版对原来的版本进行了部分修改，增加了部分章节的内容，更新了部分数学三的考研真题，拓展了部分习题的解题方法等，试图帮助学生解决如下三个问题：

1. 找不到与教材配套的辅导书

本书主要是为教材《高等数学（基础版）》和《高等数学（加强版）》第二版（朱砾、王文强、刘韶跃主编，科学出版社出版）配套而编写的。为更好地方便学生进行同步学习，本书在编写时完全按照教材的章节进行，并且完整地给出教材中习题的详细解法，帮助学生自己找出学习中的不足之处，进一步加深理解教材中的相关内容。

2. 找不到解题方法与不会做题

高等数学通常开设在大一新生阶段，多数学生还来不及适应大学生活，刚进来就面对比较难学的高等数学课程，而由于教学内容的突增和教学方法的不同，常常被弄得晕头转向，使得怕数学的变得更怕，不怕数学的变得困惑——不会解题。为此我们在每章节的内容中，先是对解题方法进行综合性叙述，再以典型例题选讲的形式加深理解。在每道题的具体解题过程中力求先给出分析过程，然后进行详细的解答和分析，通过对解题方法进行示范，帮助学生理解解题的思路与方法。

3. 如何进行考研前的练习与准备

在本书中，尽量将近年数学三的考研真题按照知识点的分布情况编排在不同的章节中，通过对真题的分析与解答，帮助学生了解考研的要求与难度，有针对性地找出自己学习中的不足之处，及时调整学习计划，为将来的成功奠定基础。

本书的编写得到了湘潭大学出版社、湘潭大学教务处和湘潭大学数学与计算科学学院的大力支持，得到了湖南省教改项目的资助，在此深表谢意！

由于编者水平有限，书中难免有疏漏与不足之处，恳请大家批评指正！

编　者

2016 年 7 月

内容简介

本书主要是为教材《高等数学(基础版)》和《高等数学(加强版)》第二版(朱砾、王文强、刘韶跃主编,科学出版社出版)配套而编写的一部辅导用书。全书与教材同步配套分为8章:基础版和加强版各4章,主要内容包括函数与极限基础、函数微分学基础、一元函数积分学基础、微分方程初步、极限、连续与导数续论、微分中值定理与导数的应用、多元函数积分学与无穷级数、微分方程与差分方程。在每节中设有内容简介、学习方法指导与典型例题选讲、教材每节后面的习题详解。每道题目均提供分析与详细解答过程,引导和帮助学生寻找解题的方法。

本书可作为高等院校文科类专业(含经济类和管理类)本科生学习高等数学的学习辅导书。对新担任高等数学教学任务的青年教师,本书是较好的教学参考书;对报考硕士研究生需要考数学三的学生来说,本书也是考前复习的良师益友。

目录

第一篇　基础版

第二篇 加强版

第一篇 基础版

第1章 函数与极限基础

1.1 $\mathbf{R}^n$空间简介

★内容简介

一、基本概念

1. 数轴

在直线上，任意选定一个原点 O，一个正向（正向有两种可能的情形）和一个单位长度，该直线就称为**数轴**.

2. 坐标

一维情形 对应于数轴上一点 P 的实数 x 也称为 **P 点的坐标**，数轴也可以称为**坐标轴**，用 Ox 表示，对应地称为 **x 轴**.

二维情形 对应于平面上一点 P 的有序实数对（x，y）称为**点 P 的坐标**，数轴称为**坐标轴**，分别用 Ox 和 Oy 表示，对应地分别称为 **x 轴**和 **y 轴**，或**横轴**和**纵轴**.

三维情形 对应于空间上一点 P 的有序实数组（x，y，z）也称为 **P 点的坐标**，三条相互垂直的数轴也称为**坐标轴**，分别用 Ox，Oy 和 Oz 表示，对应地分别称为 **x 轴**，**y 轴**和 **z 轴**，或**横轴**，**纵轴**和**竖轴**.

以右手握住 z 轴，让右手的四指从 x 轴的正向，以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向，这时大拇指所指的方向就是 z 轴的正向，这个法则称为**右手法则**.

3. n 维空间

所有 n 维实数组（x_1，x_2，…，x_n）构成的集合称为 **n 维空间**，记为 $\mathbf{R}^n$，即

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

其中 n 维实数组（x_1，x_2，…，x_n）称为 **n 维向量**，通常用 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$，…或粗体的 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$，…表示，$x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为**向量的第 i 个分量**（**或第 i 个坐标**）.

注：空间的点与向量形成了"一一对应"，只要不会引起混淆，常常不再加以区分.

4. 距离

在 $\mathbf{R}^n$中，若点 P 的坐标为（x_1，x_2，…，x_n），点 Q 的坐标为（y_1，y_2，…，y_n），定义点 P 与 Q 之间的**距离**为

$$\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2},$$

记为 $|PQ|$，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 或 d（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$），即

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

特别地，当点 Q 与原点 O 重合时，即 $(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (0, 0, \cdots, 0)$ 时，有

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \cdots + x_n^{\ 2}}.$$

我们称 $|\boldsymbol{x}|$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 的模或长度．

5. 邻域

点 $\boldsymbol{x}_0$ 的 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域是指位于定点 $\boldsymbol{x}_0$ 周围的点的集合，其中每个点 $\boldsymbol{x}$ 与定点 $\boldsymbol{x}_0$ 的距离小于定长 δ. 在 $\mathbf{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{x}_0$ 的 δ 邻域 $U(\boldsymbol{x}_0, \delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta\}$. 点 $\boldsymbol{x}_0$ 的去心 δ 邻域：$\mathring{U}(\boldsymbol{x}_0, \delta) = \{\boldsymbol{x} \mid 0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta\}$；$\infty$ 的邻域：$U(\infty) = \{\boldsymbol{x} \mid |\boldsymbol{x}| > M, M > 0\}$.

特别在 $\mathbf{R}^1$ 中有：

点 x_0 的 $\boldsymbol{\delta}$ 右邻域：$U_+(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 \leqslant x < x_0 + \delta\}$；

点 x_0 的去心 $\boldsymbol{\delta}$ 右邻域：$\mathring{U}_+(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 < x < x_0 + \delta\}$；

点 x_0 的 $\boldsymbol{\delta}$ 左邻域：$U_-(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x \leqslant x_0\}$；

点 x_0 的去心 $\boldsymbol{\delta}$ 左邻域：$\mathring{U}_-(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0\}$；

$+\infty$ 的邻域：$U(+\infty) = \{x \mid x > M, M > 0\}$；

$-\infty$ 的邻域：$U(-\infty) = \{x \mid x < -M, M > 0\}$.

特别地，若不需要指明邻域的大小，常用 $U(\boldsymbol{x}_0)$ 表示 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域．

二、基本运算及性质

1. 向量的加法与数乘

设 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{\beta} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$，$c$ 为实数，则

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)\text{；} \qquad \text{(向量的加法)}$$

$$c\boldsymbol{\alpha} = c(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (cx_1, cx_2, \cdots, cx_n). \qquad \text{(向量的数乘)}$$

向量的加法运算和向量与数的乘法运算统称为**向量的线性运算**．

2. 向量模的基本性质

设 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量，c 为实数，则有：(1) $|\boldsymbol{x}| \geqslant 0$，$|\boldsymbol{x}| = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = 0$；(2) $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$；(3) $|c\boldsymbol{x}| = |c|\,|\boldsymbol{x}|$.

★学习方法指导与典型例题选讲

本节学习的关键是弄明白空间的定义．理解空间是一类特殊的集合，即只有当集合中的元素满足一定的运算规律时，才能称为空间，空间的元素称为向量．空间中点与点之间的联系，常常依赖于距离来作出判断，因此距离也是一个非常基本的概念，因而我们通常碰到的空间也称为距离空间．明白邻域是空间的一类特殊子集，从图形上来理解，如果某一点的邻域，那么意味着到该点的距离在指定范围内的点都属于此邻域（只有该点在去心邻域中可以例外）．教材中的基本概念都是平常生活中的概念用数学的方式表述出来，然后将其推广到较为抽象的 n 维空间 $\mathbf{R}^n$.

例 1 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{AD} = \boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\boldsymbol{MA}$、$\boldsymbol{MB}$、$\boldsymbol{MC}$、$\boldsymbol{MD}$，其中 M 是平行四边形对角线的交点，如图 1.1 所示．

分析 回顾中学所学知识，利用向量的运算规律．

解 由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}=2\boldsymbol{AM}=-2\,\boldsymbol{MA},$$

于是

$$\boldsymbol{MA}=-\frac{1}{2}\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b});\quad \boldsymbol{MC}=-\boldsymbol{MA}=\frac{1}{2}\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

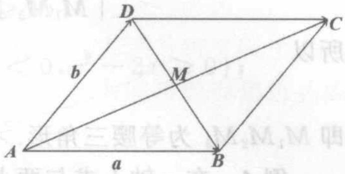

图 1.1

因为

$$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{BD}=2\,\boldsymbol{MD},$$

所以

$$\boldsymbol{MD}=\frac{1}{2}\ (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a});\ \boldsymbol{MB}=-\boldsymbol{MD}=\frac{1}{2}\ (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$

例 2　已知两点 $A\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ 和 $B\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$，在直线 AB 上求一点 M，使得

$$\boldsymbol{AM}=\lambda\,\boldsymbol{MB}.$$

分析　此题主要考查利用向量的运算规律推导定比分点公式．

解　**方法 1**　由于

$$\boldsymbol{AM}=\boldsymbol{OM}-\boldsymbol{OA},\quad \boldsymbol{MB}=\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OM},$$

因此

$$\boldsymbol{OM}-\boldsymbol{OA}=\lambda\ (\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OM}),$$

从而

$$\boldsymbol{OM}=\frac{1}{1+\lambda}\ (\boldsymbol{OA}+\lambda\,\boldsymbol{OB})\ =\ (\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}),$$

这就是点 M 的坐标．

方法 2　设所求点为 $M\ (x,\ y,\ z)$，则

$$\boldsymbol{AM}=\ (x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1),\ \boldsymbol{MB}=\ (x_2-x,\ y_2-y,\ z_2-z).$$

依题意有 $\boldsymbol{AM}=\lambda\,\boldsymbol{MB}$，即

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z),$$

因此

$$(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)=\lambda(x_2,y_2,z_2)-\lambda(x,y,z),$$

则有

$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2),$$

即

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

点 M 称为有向线段 $\boldsymbol{AB}$ 的定比分点.当 $\lambda=1$ 时，点 M 是有向线段 $\boldsymbol{AB}$ 的中点，其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

例 3　试证以点 $M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

分析　此题的关键是将证明两边相等转化为证明向量的模相等．

解　因为

$$|\ \boldsymbol{M_1M_2}\ |^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$

$$|\boldsymbol{M_2M_3}|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|\boldsymbol{M_1M_3}|^2=(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6,$$

所以

$$|\boldsymbol{M_2M_3}|=|\boldsymbol{M_1M_3}|,$$

即 $M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例 4　在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 M.

分析　此题的关键是利用两点之间的距离公式.

解　设所求的点为 $M(0,0,z)$,依题意有

$$|\boldsymbol{MA}|^2=|\boldsymbol{MB}|^2,$$

即

$$(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2=(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2.$$

解方程得 $z=\dfrac{14}{9}$,所以,所求的点为 $M(0,0,\dfrac{14}{9})$.

★习题详解

A 组

1. 在 $\mathbf{R}^2$ 中点集

$$A=\{(x,y)|1<x<3,1<y<3\}$$

包含点（1，1）的一个邻域吗？包含点（2，2）的一个邻域吗？请说明理由.

解　点集 A 不包含点（1，1）的一个邻域，因为点 $x_0=(1,1)$ 的任意一个邻域 $U(x_0,\delta)$ 都包含不属于 A 的点 $\left(1-\dfrac{\delta}{2},1-\dfrac{\delta}{2}\right)$. 点集 A 包含点 $x_1=(2,2)$ 的一个邻域，因为当取半径 $\delta=\dfrac{1}{2}$ 时，则 $U(x_0,\delta)\subset A$.

2. 试比较在 $\mathbf{R}^1$ 中的邻域与开区间、闭区间之间的区别与联系？

答　邻域 $U(x_0,\delta)$ 就是一个开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，同样开区间 (a,b) 可以视为中点 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$，半径为 $\delta=\dfrac{b-a}{2}$ 的一个邻域 $U(x_0,\delta)$；开区间 (a,b) 与闭区间 $[a,b]$ 的区别在于端点 a,b 属于闭区间 $[a,b]$，而不属于开区间 (a,b)，且 $(a,b)\subset[a,b]$.

3. 试问 $\mathbf{R}^3$ 中点 $\boldsymbol{x}_0$ 的 δ 邻域 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 是什么形状？

答　在 $\mathbf{R}^3$ 中邻域 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 是球心为 $\boldsymbol{x}_0$，半径为 δ 的球体，但不包括球体的表面.

4. 试举例说明生活中什么地方用到了 $\mathbf{R}^n$（$n>3$）空间的向量来表示？

解　例如中学生的各科成绩：语文、数学、英语、政治、历史、生物、物理、化学、音乐、体育依次为 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}$，即可表示为向量

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}).$$

如果一学生的成绩表示为（98，95，90，99，88，94，96，97，80，85），则可知该学生的成绩语文为 98 分，历史为 88 分，体育为 85 分，等等.

5. 在数轴上画出下列数集所表示的区间：

(1) $\{x \mid (x-2)(x-3)<0\}$；　　(2) $\{x \mid x^2+x \geqslant 1\}$；

(3) $\left\{x \mid \dfrac{2}{x-2}<5\right\}$；　　(4) $\{x \mid x^2-16<0, x^2-2x \geqslant 0\}$；

(5) $U(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$；　　(6) $\mathring{U}(5,3)$.

解　(1) $\{x \mid (x-2)(x-3)<0\}$ 所表示的区间为 $(2,3)$，如图 1.2 所示；

(2) $\{x \mid x^2+x \geqslant 1\}$ 根据一元二次方程的求根公式可得所表示的区间为 $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty)$，如图 1.3 所示；

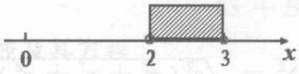

图 1.2

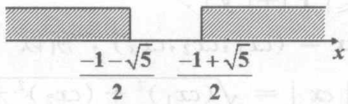

图 1.3

(3) $\left\{x \mid \dfrac{2}{x-2}<5\right\}$ 所表示的区间为 $(-\infty,2) \cup (\frac{12}{5},+\infty)$；

(4) $\{x \mid x^2-16<0, x^2-2x \geqslant 0\}$ 所表示的区间为 $(-4,0] \cup [2,4)$；

(5) $U(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ 所表示的区间为 $(-\frac{1}{6},\frac{5}{6})$；

(6) $\mathring{U}(5,3)$ 所表示的区间为 $(2,5) \cup (5,8)$.

(3) ～ (6) 的具体图形略.

6. 设 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量，c 为实数，试证：

(1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$；　　(2) $c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=c\boldsymbol{y}+c\boldsymbol{x}$.

证　设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n) \in \mathbf{R}^n$，$c$ 为实数，则

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)=(y_1+x_1,y_2+x_2,\cdots,y_n+x_n)=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x};$$

$$c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=c(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)=(cx_1+cy_1,cx_2+cy_2,\cdots,cx_n+cy_n)=c\boldsymbol{y}+c\boldsymbol{x}.$$

7. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 下，求 $M(a,b,c)$，$P(2,-3,-1)$ 关于 (1) 坐标平面；(2) 坐标轴；(3) 坐标原点的各个对称点的坐标.

解　(1) $M(a,b,c)$、$P(2,-3,-1)$ 关于 xOy 平面的对称点坐标分别为 $(a,b,-c)$、$(2,3,1)$，$M(a,b,c)$、$P(2,-3,-1)$ 关于 yOz 平面的对称点坐标分别为 $(-a,b,c)$、$(-2,-3,-1)$，$M(a,b,c)$、$P(2,-3,-1)$ 关于 xOz 平面的对称点坐标分别为 $(a,-b,c)$、$(2,3,-1)$；

(2) $M(a,b,c)$、$P(2,-3,-1)$ 关于 x 轴的对称点坐标分别为 $(a,-b,-c)$、$P(2,3,1)$，$M(a,b,c)$、$P(2,-3,-1)$ 关于 y 轴的对称点坐标分别为 $(-a,b,-c)$、$(-2,-3,1)$，$M(a,b,c)$、$P(2,-3,-1)$ 关于 z 轴的对称点坐标分别为 $(-a,-b,c)$、$(-2,3,-1)$；

(3) $M(a,b,c)$、$P(2,-3,-1)$ 关于关于坐标原点的对称点坐标分别为 $(-a,-b,-c)$、$(-2,3,1)$.

B 组

1. 设 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的向量，c 为实数，试证：

(1) $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$；　　(2) $|c\boldsymbol{x}|=|c|\,|\boldsymbol{x}|$.

证 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbf{R}^3$，$c$ 为实数，

(1) 因为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3),$$

因此根据柯西不等式可知

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2&=(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+(x_3+y_3)^2\\&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1y_1+2x_2y_2+2x_3y_3+y_1^2+y_2^2+y_3^2\\&=|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2+2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)\\&\leqslant|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2+2\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\\&=|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2+2|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|=(|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|)^2,\end{aligned}$$

所以 $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$.

(2) 因为 $c\boldsymbol{x}=(cx_1,cx_2,cx_3)$，所以

$$\begin{aligned}|c\boldsymbol{x}|&=\sqrt{(cx_1)^2+(cx_2)^2+(cx_3)^2}=\sqrt{c^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}\\&=|c|\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=|c||\boldsymbol{x}|.\end{aligned}$$

2. 请思考：空间与集合的关系，区间与邻域的关系.

答 空间是一个特定的集合，是一个必须满足一定运算关系的集合；而一般的集合却并不是空间．邻域是一个特定的区间，而且是一个开区间；但一般的区间却并不是邻域．

1.2 空间解析几何简介

★内容简介

一、基本概念

1. 曲面及其方程

如果曲面 S 与三元方程

$$F(x,y,z)=0$$

有下述关系：

① 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$；

② 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 $F(x,y,z)=0$.

那么方程 $F(x,y,z)=0$ 就叫做**曲面 S 的方程**，而曲面 S 就叫做**方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形**.

与平面解析几何中规定的二次曲线相类似，我们将三元二次方程所表示的曲面称为**二次曲面**，将平面称为**一次曲面**.

几种常见的曲面：

1) 旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做**旋转曲面**，这条定直线叫做**旋转曲面的轴**.

2) 柱面

平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫做**柱面**，定曲线 C 叫做柱面的**准线**，动直线 L 叫做柱面的**母线**.

一般地，只含 x、y 而缺 z 的方程 $F(x,y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线是坐标平面 xOy 上的曲线 $C:F(x,y)=0$.

3）平面

如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的**法线向量**.

平面的**点法式方程**

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

其中，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为平面上的一定点，法线向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，整理可以得到平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

2. 空间曲线及其方程

1）一般方程

空间曲线 C 的一般方程

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$$

其中曲面 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 的交线为 C.

特别地，空间直线 L 的一般方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

其中平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的交线为 L.

2）参数方程

空间曲线 C 的参数方程

$$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t),\end{cases}$$

其中 t 为参数.

二、基本运算及性质

1. 研究曲面的两个基本问题

① 已知一曲面作为点的几何轨迹时，建立这曲面的方程；

② 已知坐标 x、y 和 z 满足一个方程时，研究这方程所表示的曲面的形状.

2. 怎样了解三元方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示的曲面的形状

方法之一是用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，考查其交线的形状，然后加以综合，从而了解曲面的立体形状，这种方法叫做**截痕法**.

3. 求解旋转曲面的方程

在曲线 C 的方程 $\begin{cases}f(y,z)=0,\\x=0,\end{cases}$ 中将 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

4. 求解空间直线的一般方程

通过空间一直线 L 的平面有无限多个，只要在这无限多个平面中任意选取两个，把它们的方程联立起来，所得的方程组就表示空间直线 L.

★学习方法指导与典型例题选讲

数形结合是一种非常重要的数学思想，恰当地将数和形结合起来解决问题，可以使复杂的问题变得更简单，使抽象的问题变得更直观．空间解析几何会让数形结合变得容易，几何形状中的曲面和曲线，对应于数学抽象的方程，怎样实现它们彼此之间的相互转化将是本节学习中的难点与重点.

例 1　试指出曲面 $x^2+4y^2-16z^2=64$ 与三个坐标面的交线分别是什么曲线?

分析　直接利用曲线及其方程，数与形相结合即可.

解　曲面 $x^2+4y^2-16z^2=64$ 与 xoy 面($z=0$)的交线方程为

$$\begin{cases}x^2+4y^2-16z^2=64,\\ z=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+4y^2=64,\\ z=0.\end{cases}$$

即为中心在原点，长轴在 x 轴上，且处在 xoy 面上的椭圆.

类似可得，曲面 $x^2+4y^2-16z^2=64$ 与 yoz 面($x=0$)及 zox 面($y=0$)的交线方程分别为

$$\begin{cases}x^2+4y^2-16z^2=64,\\ x=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2-4z^2=16,\\ x=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+4y^2-16z^2=64,\\ y=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-16z^2=64,\\ y=0.\end{cases}$$

即分别为中心在原点，实轴在 y 轴，且处在 yoz 面上的双曲线，以及中心在原点，实轴在 x 轴，且处在 zox 面上的双曲线.

例 2　将圆

$$\Gamma:\begin{cases}(y-b)^2+z^2=a^2,\\ x=0,\end{cases}\quad(b>a>0)$$

绕 z 轴旋转，求所得旋转曲面方程.

分析　直接利用求解旋转曲面公式即可.

解　所得旋转曲面方程为：

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2}-b)^2+z^2=a^2.$$

化简整理得

$$(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2=4b^2(x^2+y^2).$$

此曲面叫**环面**，如图 1.4 所示，其形状像救生圈．

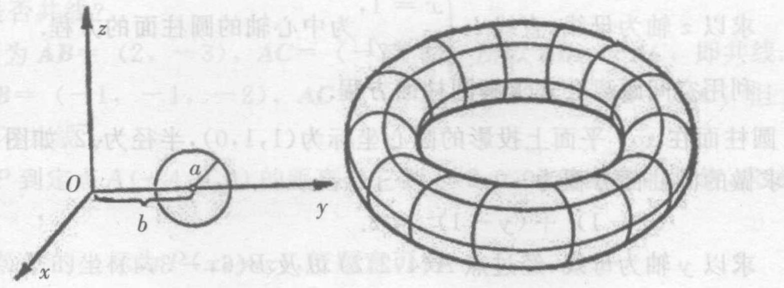

图 1.4

例 3　设椭圆曲线 $C:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0,\end{cases}$　$(a>b)$，分别求绕其长轴（x 轴）和短轴（y 轴）旋转所得旋转曲面方程.

分析　利用旋转曲面与平面曲线之间的内在联系，将其转化为例 1 的类似情形.

解　设 $M(x,y,z)$ 为曲面上任一点，它是椭圆曲线 C 上点 $M_1(x_1,y_1,0)$ 绕 x 轴旋转而得到的，因此有如下关系等式：

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\quad x=x_1,\quad |y_1|=\sqrt{y^2+z^2},$$

所以旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

同理可得，绕其 y 轴旋转所得旋转曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1.$$

如图 1.5 所示，旋转曲面的图形分别叫做长形旋转椭球面和扁形旋转椭球面.

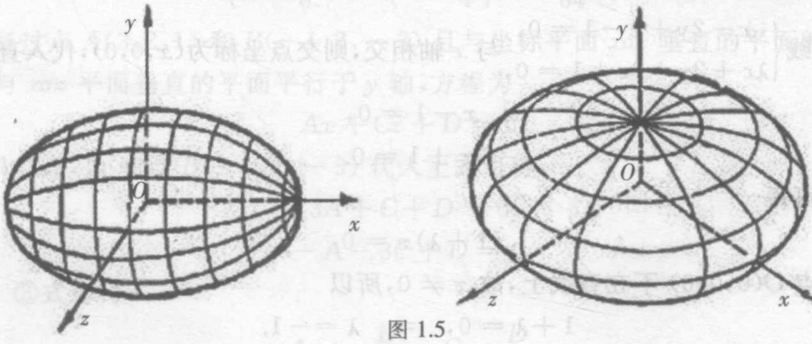

图 1.5

例 4　一动点 P 到定点 $A(-4,0,0)$ 的距离是它到 $B(2,0,0)$ 的距离的两倍，求该动点的轨迹方程.

分析　利用空间距离公式求解曲面方程.

解　设动点 P 的坐标为 $P(x,y,z)$，依题意可得

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2},$$

化简得

$$x^2+y^2+z^2-8x=0.$$

例 5 求以 z 轴为母线，直线 $l:\begin{cases}x=1,\\ y=1\end{cases}$ 为中心轴的圆柱面的方程.

分析 利用空间距离公式求解圆柱面方程.

解 圆柱面在 xoy 平面上投影的圆心坐标为 $(1,1,0)$，半径为 $\sqrt{2}$，如图 1.6 所示. 所以求做的圆柱面方程为

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2.$$

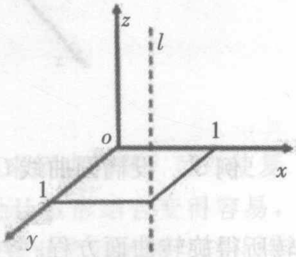

图 1.6

例 6 求以 y 轴为母线，经过点 $A(4,2,2)$ 以及 $B(6,-3,4)$ 的圆柱面的方程.

分析 利用待定系数求解圆柱面方程.

解 设以 y 轴为母线的柱面方程为

$$(x-a)^2+(z-b)^2=R^2. \quad ①$$

因为点 $A(4,2,2)$ 以及 $B(6,-3,4)$ 在柱面上，则有

$$(4-a)^2+(2-b)^2=R^2, \quad ②$$

$$(6-a)^2+(4-b)^2=R^2, \quad ③$$

并且

$$(a-0)^2+(b-0)^2=R^2. \quad ④$$

联立②、③、④式可求出

$$a=-3,\quad b=11,\quad R^2=130.$$

代入①式得所求的柱面方程为

$$(x+3)^2+(z-11)^2=130.$$

例 7 试求 λ 取何值时，直线 $\begin{cases}x-2y+z-1=0,\\ \lambda x+2y+3z+1=0,\end{cases}$ 与 x 轴相交？

分析 利用直线及其方程之间的联系.

解 直线 $\begin{cases}x-2y+z-1=0,\\ \lambda x+2y+3z+1=0,\end{cases}$ 与 x 轴相交，则交点坐标为 $(x,0,0)$，代入直线方程为

$$x-1=0, \quad ①$$

$$\lambda x+1=0. \quad ②$$

①＋②可得

$$(1+\lambda)x=0.$$

又因原点 $O(0,0,0)$ 不在直线上，故 $x\neq 0$，所以

$$1+\lambda=0,\Rightarrow\quad \lambda=-1.$$

★习题详解

A 组

1. 已知 A,B,C 三点坐标如下：

(1) 在平面直角坐标系 Oxy 下，$A(0,1),B(2,-2),C(-2,4)$；

(2) 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 下，$A(0,1,0),B(-1,0,-2),C(-2,3,4)$.