Shuxue Fenxi

China University of Mining and Technology Press

数学分析

上册

臧子龙 严兴杰 主编

中国矿业大学出版社

数 学 分 析

（上 册）

臧子龙 严兴杰 主编

中国矿业大学出版社

内容提要

本书是为报考硕士研究生的学生，并兼顾正在学习数学分析的学生编写的教材. 目的是帮助他们从概念和方法两方面深化、拓展数学分析所学内容.

全书共分为 8 章，每章由基本概念分析和解题方法分析两部分组成. 前一部分，针对学生学习时易出现的错误，设计编写了各种形式的问题，以引导读者对基本概念、基本理论进行多侧面、多层次、由此及彼、由表及里的思索和辨析；后一部分则着重分析解题思路，探究解题规律，归纳、总结解题方法.

本书对读者掌握分析问题和处理问题的方法和技巧有较好的指导作用. 所选例题、习题，内容广泛，且具有与硕士研究生入学考试相当的水平. 本书对从事数学分析教学和指导大学生数学竞赛的教师也有参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析：全 2 册 / 臧子龙，严兴杰主编.
—徐州：中国矿业大学出版社，2018.9

ISBN 978-7-5646-4147-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①藏… ②严… Ⅲ.①数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 227457 号

书　　名　数学分析
主　　编　臧子龙　严兴杰
责任编辑　王加俊
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
　　　　　　(江苏省徐州市解放南路　邮编 221008)
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885767　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　江苏淮阴新华印刷厂
开　　本　787×1092　1/16　**本册印张** 12.25　**本册字数** 306 千字
版次印次　2018 年 9 月第 1 版　2018 年 9 月第 1 次印刷
总 定 价　39.80 元(上下册)

前　言

数学分析对于大学数学专业和其他许多专业的重要性是无须多言的.同时,由于数学分析课程内容的极度丰富性,要想仅通过一个教程就尽得其精华,往往很难实现.因此,学完这门课的很多人,特别是那些准备报考硕士研究生的学生,都还要进行一次乃至数次再学习.这不仅为了温故而知新,更为了在理解和运用两方面有质的提高.自然,在这样的过程中,除了对原有教材的充分发掘,他们还希望从各种合适的参考书中汲取营养.

作者在兰州城市学院数学学院和中国矿业大学数学学院连续数年讲授数学分析课程,从我们的教学中感到很需要有一本从概念和方法两方面对学生有指导作用的参考书,以便于指导报考硕士生的学生复习,也便于正在学习数学分析的学生提高数学素养.为此,我们编写了此书.其用意在于激励读者独立地思考,形成良好的数学分析思维习惯.一个想法使用一次是一个技巧,经过多次使用就成为一种方法.

本书分为上、下两册,上册由臧子龙主编,下册由严兴杰主编.全书共 8 章,每章由基本概念分析和解题方法分析两部分组成.在基本概念分析中,我们围绕一些重要的定义和定理编写各种形式的问答题并加以分析研讨,借以引导读者对基本概念进行多侧面、多层次、由此及彼、由表及里的思索和辨析;在解题方法分析中,则通过对各类有代表性题目的分析、论证和评注,帮助读者掌握思考问题和处理问题的正确方法.两部分之后均配有一定数量的练习题.例题、习题和问题大都精选自国内外有关资料或由平时教学积累所得,具有与硕士生入学考试大致相当的难度.结合教学经验,部分习题给出完整的解答过程,有的仅仅给出提示,其余留作练习.

近年来国内外数学分析参考书籍的编写相当踊跃,其中颇多佳作.因此,一本不具特色的书也就失去了问世的意义.本书试图在以下两个维度赋予本书以新意:一是站在引导读者独立思考和演练的立场上,而不是系统地讲授知识、概括结论、提供答案,从而使之具有独立于一般教科书而存在的价值.二是努力在"分析"二字上下功夫.在解答问题时,不仅答其然,而且要讲清其所以然;不仅要答其所问,而且要追根溯源,举一反三.在讲解例题时,则把很大篇幅用于分析解题思路和探究解题规律上,至于解答过程则往往叙述较略,以留给读者更多的用武之地.然而,限于我们的水平,这一主观设想的特点可能并未得到充分体现.

在本书的编写过程中,兰州城市学院数学学院和中国矿业大学数学学院的广大教师提出了许多宝贵的意见,尤其是承担数学分析课程教学任务的教师,提出了不少建议,在此我们表示衷心的感谢。本书的出版得到了国家自然科学基金项目(11501560)和中国矿业大学数学学院"十三五"品牌专业教学改革与建设项目的支持.

由于编者水平所限,不妥之处,敬请批评指正.

编者

2018 年 7 月

目　录

1 极限理论

基本概念分析

§1.1 数列极限和函数极限的定义 收敛原理

问题 1.1.1 下列说法可否作为“数列 x_n 以 l 为极限”的定义？

(1) $\forall \varepsilon \in (0,1)$，$\exists$ 实数 A，当 $n>A$ 时，$|x_n-l|\leqslant\varepsilon$；

(2) $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，$|x_n-l|<k\cdot\sqrt{\varepsilon}$，此处 k 为正常数；

(3) $\exists$ 正整数 N，$\forall \varepsilon>0$，当 $n\geqslant N$ 时，$|x_n-l|<\varepsilon$；

(4) $\forall$ 正整数 N，$\exists \varepsilon>0$，当 $n\geqslant N$ 时，$|x_n-l|<\varepsilon$；

(5) $\forall$ 正整数 m，$\exists$ 正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，$|x_n-l|<\dfrac{1}{2^m}$；

(6) $\exists$ 正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，$|x_n-l|<\dfrac{1}{2^n}$；

(7) $\forall \varepsilon>0$，集 $\{n \mid x_n\notin(l-\varepsilon,l+\varepsilon)\}$ 为有限集；

(8) $\forall \varepsilon>0$，集 $\{n \mid x_n\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)\}$ 为无限集.

答：(1)，(2)，(5)，(7)可以.

首先，对比 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$ 的原定义可以看出，这里的 8 种说法或是改变了 ε 的给定方式，或是改变了 N 的作用，又或是改变了 ε 和 N 的相互关系，所以，能否正确判断本题的关键在于对极限定义中 ε 和 N 的作用的理解.

ε 是用来衡量 x_n 与 l 的接近程度的. 为了刻画接近的任意性，ε 必须是任意小的正数. 这是 ε 的本质特征.

ε 是任意小的正数，$k\cdot\varepsilon(k>0)$，$\sqrt{\varepsilon}$，ε^2，… 自然也都是任意小的. 对任意(与 n 无关)的正整数 m，显然 $\dfrac{1}{m}$，$\dfrac{1}{2^m}$… 也是可以任意小的正数. 它们都可以看作是 ε 的等价形式，因此，在极限定义中它们都可以代行 ε 的职能.

ε 是任意小的正数，因此，$|x_n-l|<\varepsilon$ 与 $|x_n-l|\leqslant\varepsilon$ 在描述 x_n 与 l 的无限可接近性上作用是相同的.

对 ε 任意性的要求，实质上是要求 ε 能够任意变小. 因此，预先把 ε 限制在与 0 充分接近的正数范围内，例如令 $\varepsilon\in(0,\alpha)$，同样不会改变定义的本质.

N 的作用则是指出在 n 无限变大过程中有一个“时刻”，使其后的所有正整数 n 都满足 $|x_n-l|<\varepsilon$. 这使得 N 有如下两个主要特征：其一，N 只需存在而不论大小. 实际上，只要有一个符合定义要求的 N，则比 N 大的任意正整数或实数都可以充任这一角色. N 的这种任

意可大性使得 $n>N$ 或是 $n\geqslant N, n>A$,在实质上是没有区别的. 其二,N 只管其后而不问其前,对其后的 n 要求无一例外使 $|x_n-l|<\varepsilon$,而不能用有无穷多个来代替,对其前的 n,则全然不作要求.

此外,从 ε 和 N 的关系看,ε 给出在先,具有与 N(也即与 n)无关的独立性. N 存在于后,一般视 ε 而定,具有对 ε 的依赖性. 对于同一 ε,总是有无穷多个 N,却不能要求存在一个 N,适用于所有的 ε.

上面的分析可以帮助我们做出判断,并且进而写出严格的证明. 仅以(5) 为例:

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$,则 $\forall$ 正整数 m,令 $\varepsilon=\dfrac{1}{2^m}$,$\exists N$,当 $n>N$ 时,$|x_n-l|<\varepsilon$,即(5) 成立. 反之,设(5) 成立,则 $\forall \varepsilon>0$,可取正整数 m,使 $\dfrac{1}{2^m}<\varepsilon$,根据(5),$\exists N$,当 $n>N$ 时,$|x_n-l|<\dfrac{1}{2^m}<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$.

现在再来说明(3),(4),(6),(8)不能作为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$ 的定义.

(3) 是"x_n 以 l 为极限"的充分而非必要条件. 实际上,当数列 $\{x_n\}$ 满足(3) 时,必有 $x_n=l, n=N, N+1, \cdots$ 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$. 反之,以 l 为极限的数列自然不必从某项起恒为 l,例如 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$.

(4) 是"x_n 以 l 为极限"的必要而非充分条件. 不难看出,(4) 是数列 $\{x_n\}$ 有界的等价说法(问题 1.3.1).

(6) 是"x_n 以 l 为极限"的充分而非必要条件.

例如 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 以 0 为极限,但 $|x_n-0|=\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{2^n}, n=1,2,\cdots$.

(8) 是"x_n 以 l 为极限"的必要而非充分条件. 实际上,(8) 是 x_n 以 l 为聚点的等价说法(问题 1.2.3).

数列 $x_n=\dfrac{l}{2}[(-1)^n+1]$ 可以作为(4) 和(8) 的反例.

问题 1.1.2 下列说法中哪些可作为"x_n 不以 l 为极限"的定义?

(1) $\forall \varepsilon>0$,$\exists$ 正整数 N,当 $n>N$ 时,$|x_n-l|\geqslant\varepsilon$;

(2) $\exists \varepsilon_0>0$,$\forall$ 正整数 N,有 $n>N$,使 $|x_n-l|\geqslant\varepsilon_0$;

(3) $\exists \varepsilon_0>0$,使集合 $\{n \mid |x_n-l|\geqslant\varepsilon_0\}$ 为无限集;

(4) $\exists \varepsilon_0>0$,使集合 $\{n \mid x_n\in(l-\varepsilon_0, l+\varepsilon_0)\}$ 为有限集.

答:(2),(3).

只要分析其与极限定义的关系. 对比(2) 与 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$ 的定义,"$\exists \varepsilon_0>0$"和"$\forall \varepsilon>0$","$\forall N$"和"$\exists N$","$\exists n>N$"和"$\forall n>N$","$|x_n-l|\geqslant\varepsilon_0$"和"$|x_n-l|<\varepsilon$"都是相反意义的,因此二者互为否定判断.

(3) $\Leftrightarrow$(2) 是显然的.

现在证明,说法(1) 实际上是 $\{x_n\}$ 为无穷大的定义:若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$,则 $\forall \varepsilon>0$,令 $M=|l|+\varepsilon$,$\exists N$,当 $n>N$ 时,$|x_n|\geqslant M$. 此时 $|x_n-l|\geqslant|x_n|-|l|\geqslant\varepsilon$. 反之,若(1) 成立,则 $\forall M>0$,取 $\varepsilon=M+|l|$,$\exists N, n>N$ 时,$|x_n|\geqslant|x_n-l|-|l|\geqslant M$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$. 于是,任

何非无穷大的发散数列都可以作为(2)$\not\Rightarrow$(1)的例. 例如取 $x_n=(-1)^n, l=1$.

(4)$\Rightarrow$(2),但(2)$\not\Rightarrow$(4). 任何不以 l 为极限但以 l 为聚点的数列可作为这样的例. 例如 $x_n=(-1)^n, l=1$.

问题 1.1.3 下列做法是否改变数列的敛散性?

(1) 任意改变有限项;

(2) 任意重排;

(3) 各项同取绝对值;

(4) 各项乘以同一常数 k.

答:(1),(2)均不改变数列的敛散性 。

利用问题 1.1.1(7)的结果说明这一事实较为方便.

设 $\{x_n\}$ 改变有限项后的数列是 $\{x'_n\}$, $\{x_n\}$ 的某一重排数列为 $\{x''_n\}$. 那么,当 $\{x_n\}$ 收敛于 l 时,对于 $\forall\varepsilon>0$,只有 $\{x_n\}$ 的有限项在 $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ 之外. 由于 $\{x'_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 仅相差有限项, $\{x''_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 的项仅次序不同,所以它们都只有有限项在 $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ 之外. 反之,当 $\{x_n\}$ 发散时,若 $\{x'_n\}$ 或 $\{x''_n\}$ 收敛,因 $\{x_n\}$ 与 $\{x'_n\}$ 仅相差有限项, $\{x_n\}$ 也是 $\{x''_n\}$ 的重排,故分别都能推出 $\{x_n\}$ 收敛. 矛盾,即证.

(3) 当 $\{x_n\}$ 收敛于 l 时,由 $||x_n|-|l||\leqslant|x_n-l|$ 及极限定义即知 $|x_n|$ 收敛于 $|l|$. 逆则不真. 例如 $x_n=(-1)^n$ 发散,但 $\{|x_n|\}$ 收敛.

(4) 决定于 k 是否为 0.

当 $k\neq0$ 时, $x_n\in(l-\varepsilon, l+\varepsilon)\Leftrightarrow kx_n\in(kl-|k|\cdot\varepsilon, kl+|k|\cdot\varepsilon)$. $|k|\cdot\varepsilon$ 和 ε 均为可任意小的正数. 故此时 $\{x_n\}$ 与 $\{k\cdot x_n\}$ 同敛散.

当 $k=0$ 时,易知当 $\{x_n\}$ 发散时 $\{k\cdot x_n\}$ 却是收敛的.

问题 1.1.4 下列说法可否作为“$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$”的定义?

(1) $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<k\cdot\delta$ 时, $|f(x)-l|<k\cdot\varepsilon$,此处 k 为正常数;

(2) $\forall$ 正整数 m, $\exists$ 正整数 n,当 $0<|x-x_0|<\dfrac{1}{n}$ 时, $|f(x)-l|<\dfrac{1}{m}$;

(3) $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\varepsilon\cdot\delta$ 时, $|f(x)-l|<\varepsilon$;

(4) $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)-l|<\varepsilon\cdot\delta$.

答:(1),(2),(3)均可作为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ 的定义. 其分析和证明与问题 1.1.1 是类似的. 故从略.

(4):对于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ 既非必要也非充分. 例如 $f(x)=x$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=x_0$ 存在. 任取 $\varepsilon_0\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,则 $\forall\delta>0$,当 $\dfrac{1}{2}\delta<|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)-x_0|>\varepsilon_0\delta$,即(4) 不成立. 反之, Dirichlet 函数 $D(x)$ 在任一点 x_0 无极限. 但取 $l=1$,则 $\forall\varepsilon>0$,只要取 $\delta>\dfrac{1}{\varepsilon}$,则 $|f(x)-l|<\varepsilon\cdot\delta$ 总是成立的. 不难看出,用任一有界函数代替 $D(x)$,结果都是一样的.

问题 1.1.5 下列等式是否成立? 这里等式成立的含义是:由其中一个极限的存在可推出另一个也存在,且二者相等[假定 $\exists\eta>0, \forall x\in(-\eta,\eta), x\neq0, f(x)$ 有定义].

(1) $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=\lim\limits_{x\to-0} f(-x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(|x|)=\lim\limits_{x\to+0} f(x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)=\lim\limits_{x\to+0} f(x)$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x^3)=\lim\limits_{x\to+0} f(x)$.

答：等式(1),(2),(3)皆成立.以(3)为例证明之.

(3)"$\Rightarrow$". 设$\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)=l$,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使当$0<|x|<\delta$时,$|f(x^2)-l|<\varepsilon$.取$\delta'=\delta^2$,则当$0<x<\delta'$时,$0<\sqrt{x}<\delta$,于是$\left|f(\sqrt{x}^2)-l\right|<\varepsilon$,即$|f(x)-l|<\varepsilon$.此即$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=l$.

"$\Leftarrow$". 设$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=l$,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当$0<x<\delta$时,$|f(x)-l|<\varepsilon$.取$\delta'=\sqrt{\delta}$,当$0<|x|<\delta'$时,$0<x^2<\delta$,于是$|f(x^2)-l|<\varepsilon$.

(4)不难看出,由等式左端可推出右端,反之则不行.实际上,根据函数极限(包括单侧极限)的定义及其几何描述,等式(1)(2)(3)两端所描述的都是相同的极限过程.(4)则不同,$x\to 0$包含了$x\to+0$和$x\to-0$.从而$x^3\to+0$,$x^3\to-0$.所以,

$$\lim_{x\to+0} f(x)=l\Rightarrow\lim_{x\to+0} f(x^3)=l\not\Rightarrow\lim_{x\to 0} f(x^3)=l.$$

例如$f(x)=\operatorname{sgn} x$,$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1$,但是$\lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$不存在.

问题 1.1.6 设$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$.若还分别满足以下条件之一,能否断定$\{x_n\}$收敛?

(1) $\{x_n\}$是单调的;

(2) $\{x_n\}$是有界的;

(3) $\{x_{2n}\}$和$\{x_{2n+1}\}$分别是单调的;

(4) $\{x_{2n}\}$和$\{x_{2n+1}\}$分别是递增和递减的;

(5) $\{x_{2n}\}$和$\{x_{2n+1}\}$之一是收敛的.

答:(1),(2),(3)均不能推出$\{x_n\}$收敛.分别举例如下:

(1),(3)对于$x_n=\sqrt{n}$,则$x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0$,$x_n$单调(从而$\{x_{2n}\}$和$\{x_{2n+1}\}$也单调),但$x_n\to\infty$.

(2) $x_n=\sin\sqrt{n}$.

(4),(5)可保证$\{x_n\}$收敛,我们先证明(4)$\Rightarrow$(5).

不妨设$x_{2n}\uparrow$,$x_{2n+1}\downarrow$,则有$x_{2n}\leqslant x_{2n+1}(n=1,2,\cdots)$.因为假若有$k$,使得$x_{2k}>x_{2k+1}$,则对一切$n>k$,必有

$$x_{2n}\geqslant x_{2k}>x_{2k+1}\geqslant x_{2n+1},\quad x_{2n}-x_{2n+1}\geqslant x_{2k}-x_{2k+1}>0$$

这与$x_{2n}-x_{2n+1}\to 0$矛盾.于是$x_2\leqslant x_{2n}\leqslant x_{2n+1}\leqslant x_1$,即$\{x_{2n}\}$和$\{x_{2n+1}\}$均是单调有界数列,都收敛.

再证明(5)$\Rightarrow\{x_n\}$是收敛的.

若$\{x_{2n}\}$和$\{x_{2n+1}\}$之一收敛.比如$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=l$,则$x_{2n+1}=(x_{2n+1}-x_{2n})+x_{2n}\to l(n\to\infty)$.于是$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=l$,由此即得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$(参看问题1.2.1).

问题 1.1.7 由下列每一条件能否断定$\{x_n\}$收敛?

(1) $\forall$正整数p,$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+p}-x_n)=0$;

(2) 对$\{x_n\}$的任意两个子列$\{x_{n_k'}\}$和$\{x_{n_k''}\}$都有$\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k'}-x_{n_k''})=0$;

(3) $\exists C>0, \forall N, \sum_{n=1}^{N}|x_n-x_{n+1}|<C$;

(4) $\exists C>0$ 和 $r\in(0,1)$, $\forall n, |x_{n+1}-x_n|\leqslant Cr^n$.

答:(2),(3),(4)可以.

(1) 这里的说法与 Cauchy 准则有本质的不同. 这里要求的是对每一固定的 p,可找到与任给正数 ε 有关的 N(一般还与 p 有关)使当 $n>N$ 时, $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$. Cauchy 准则要求的则是 $\forall\varepsilon>0, \exists N$(仅与 ε 有关,对一切 p 适用),使当 $n>N$ 时,不论 p 是何正整数,都有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$. 形式上都有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+p}-x_n)=0$,这里是对取定的每个 p 的普通收敛. Cauchy 准则要求的是对 p 一致收敛. 所以,(1) $\not\Rightarrow\{x_n\}$ 收敛. 例如 $x_n=\sqrt{n}$ 发散,而

$$x_{n+p}-x_n=\frac{p}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}\to 0(n\to\infty), p=1,2,\cdots$$

(2) 推出 $\{x_n\}$ 收敛. 用反证法. 若 $\{x_n\}$ 发散,则不满足 Cauchy 准则. 即 $\exists\varepsilon_0>0, \forall N$,有 $n,m>N$,使 $|x_n-x_m|\geqslant\varepsilon_0$. 特别, $N=1$ 时,有 $n_1>m_1>1$, $|x_{n_1}-x_{m_1}|\geqslant\varepsilon_0$. 对 $N=n_1$,有 $n_2>m_2>n_1$,使 $|x_{n_2}-x_{m_2}|\geqslant\varepsilon_0$. 如此继续下去,可得 $m_1<n_1<m_2<n_2<\cdots<m_k<n_k<\cdots$ 使 $|x_{n_k}-x_{m_k}|\geqslant\varepsilon_0$. 于是对子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x_{m_k}\}$,不能有 $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k}-x_{m_k})=0$.

(3) 根据所给条件,数列 $y_n=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$ 单调有界,故收敛,从而满足 Cauchy 准则. 于是可推知 $\{x_n\}$ 满足 Cauchy 准则. 事实上,称满足(3)的数列 $\{x_n\}$ 为有界变差数列,可以证明:有界变差数列一定收敛. 令 $y_1=0$,则

$$y_n=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|, n\geqslant 2$$

则数列 $\{y_n\}$ 单调递增有界,从而 $\{y_n\}$ 收敛. 由 Cauchy 准则, $\forall\varepsilon>0, \exists N>0$,当 $n>m>N$ 时,有

$$|y_n-y_m|<\varepsilon.$$

但是

$$y_n-y_m=|x_n-x_{n-1}|+|x_{n-1}-x_{n-2}|+\cdots+|x_{m+1}-x_m|,$$
$$x_n-x_m=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_{m+1}-x_m),$$

故有

$$|x_n-x_m|\leqslant|x_n-x_{n-1}|+|x_{n-1}-x_{n-2}|+\cdots+|x_{m+1}-x_m|=|y_n-y_m|<\varepsilon,$$

从而当 $n>m>N$ 时,有

$$|x_n-x_m|<\varepsilon.$$

(4) 显然(4)$\Rightarrow$(3).

问题 1.1.8 下列说法中,哪些是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件?

(1) $\forall\{x_n\}: x_n\to x_0, x_n\neq x_0, \lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在;

(2) $\forall$ 严格单调的 $\{x_n\}: x_n\to x_0, \lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在;

(3) 在(2)中还假定所有的 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都相等;

(4) $\forall\{x_n\}: x_n\to x_0, x_n\neq x_0$,都有 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$,使 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})$ 存在;

(5) $\forall\{x_n\}: x_n\to x_0, x_n\neq x_0, \{f(x_n)\}$ 满足 Cauchy 准则.

答:(1),(3),(5)为充要条件.

(1) 只要证明,所有的$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都相同,即满足海涅定理[①]的条件. 如若不然,有$x_n\to x_0$,$x_n\neq x_0$,$y_n\to x_0$,$y_n\neq x_0$,使$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$,则对$z_n$,其中$z_{2n}=x_n$,$z_{2n+1}=y_n$,仍有$z_n\to x_0$,但$\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)$不再存在(参看问题 1.2.1),这与(1)矛盾. 所以,(1)与海涅定理等价.

(3) 显然(1)⇒(3). 反之,若(3)成立,且设$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$. 我们来证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$. 如若不然,$\exists\varepsilon_0>0$,$\forall\delta>0$,有$x'$,$0<|x'-x_0|<\delta$,使$|f(x')-l|\geqslant\varepsilon_0$. 特别当$\delta=1$时,$\exists x_1$,$0<|x_1-x_0|<1$,$|f(x_1)-l|\geqslant\varepsilon_0$;$\delta=\min\left\{\frac{1}{2},|x_1-x_0|\right\}$时,$\exists x_2$,$0<|x_2-x_0|<\frac{1}{2}$且$0<|x_2-x_0|<|x_1-x_0|$,使$|f(x_2)-l|\geqslant\varepsilon_0$;…… 如此继续下去,可得到$\{x_n\}$,适合$0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$,且$|x_1-x_0|>|x_2-x_0|>\cdots>|x_n-x_0|>\cdots$使$|f(x_n)-l|\geqslant\varepsilon_0$. 所有这些$\{x_n\}$中一定有无穷多个落在$x_0$的一侧,取它们作为新的数列,仍记作$\{x_n\}$. 则$\{x_n\}$为严格单调数列,$x_n\to x_0$,但$|f(x_n)-l|\geqslant\varepsilon_0$,矛盾.

(5) $\{f(x_n)\}$满足柯西准则,必收敛,故(5)⇔(1).

现在说明(2),(4)均为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的必要而非充分条件.

(2) 此种情况下,对于合乎条件的不同的$\{x_n\}$,$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$可以不相等. 例如,选一$f(x)$,使$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$. 任取$\{x_n\}$和$\{y_n\}$为满足所给条件的递增和递减数列,则

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0-0),\lim_{n\to\infty}f(y_n)=f(x_0+0).$$

但不难证明:$f(x_0-0)$存在的充要条件是对任意严格递增数列$\{x_n\}$:$x_n\to x_0$,$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都存在.

(4) 仅由所给条件尚不足以保证$\{f(x_n)\}$收敛. 实际上,只要$f(x)$在x_0某邻域有界,就总是满足(4)的.

§1.2 子列、聚点和上(下)极限

问题 1.2.1 下列说法哪些是$\{x_n\}$收敛的充要条件?

(1) $\{x_n\}$的任一子列都收敛于同一个实数;

(2) $\{x_n\}$的任一子列都收敛;

(3) $\{x_n\}$的任一子列都有收敛子列;

(4) $\{x_n\}$的任一子列都有收敛子列,并且它们有相同的极限;

(5) $\{x_{2n}\}$和$\{x_{2n+1}\}$皆收敛且极限相同.

答:(1),(2),(4),(5)皆为充要条件,(3)仅必要但不充分.

为叙述方便,把$\{x_n\}$收敛叫作(0). 则显然(1)~(5)皆可由(0)推出. 下面分析由(1)~(5)可否推出(0).

---

① 海涅定理通常叙述为:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$的充要条件是对任何$x_n\to x_0$,$x_n\neq x_0$,都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$.

(1) 因为$\{x_n\}$也是自己的子列,故(1)⇒(0).所以(1)⇔(0).

(2) 显然(1)⇒(2).若(2)成立,会不会有两个子列收敛于不同的实数呢?不会,因为那样的话,这两个子列合成的新子列(即两子列依在原数列中的顺序排列且重复的项看作一项)将不会收敛.

(3) 根据致密性定理:"任何有界数列都有收敛子列"以及有界数列的子列仍有界,可知"$\{x_n\}$有界"⇒(3).所以(0)⇒(3).但(3)$\nRightarrow$(0),否则得出$\{x_n\}$有界必收敛.

(4) 由(3)$\nRightarrow$(0)的原因是有界数列可以有极限不同的子列.当(3)被加强为(4)时就不存在这个问题了.

(5) 利用极限定义容易证明(5)⇒(0).不仅如此,我们还可以写出更一般的结果:如果数列的项分属于有限个子列,且这些子列有相同的极限(有穷或无穷),则数列本身也有同一极限.

问题 1.2.2 下列说法是否正确?(此处把仅有有限项取自原数列不同位置的子列看作是相同的)

(1) 有界数列必有无穷多个收敛子列;

(2) 任何数列必有无穷多个单调子列;

(3) 任何发散数列都包含无穷多个发散子列;

(4) 若$\{x_n\}$是一单调数列且有子列$x_{n_k}\to l$(或$+\infty,-\infty$),则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$(或$+\infty,-\infty$).

答:四种说法均正确.

对于(1)~(3),只要注意这样一个基本事实:子列的任一子列仍是原数列的子列,这种选子列的过程是无穷尽的.因此,如果所要求的子列有了"一个",当然也就有了"无穷多".

于是,(1)可由致密性定理得出,(2)是例1.5.1的直接结果,(3)是问题1.2.1(2)的逆否命题.

最后,(4)可直接由极限定义证明.这一结果表明,单调数列的极限状况完全由其任一子列决定.

问题 1.2.3 下列说法可否作为l是$\{x_n\}$的聚点[①]的定义?(此处l为有限数)

(1) $\forall\varepsilon>0$,在$(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$中有$\{x_n\}$的无穷多项;

(2) $\forall\varepsilon>0$,在$(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$中有$\{x_n\}$的至少一项;

(3) $\forall\varepsilon>0$,在$(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$中至少有一项$x_n\neq l$.

答:(1),(3)可以.

先分析这三种说法的异同:显然(1)⇒(2),(1)⇒(3).反之,由ε的任意性,当(3)成立时,这样的x_n不能只有有限项.如若不然,对某一$\varepsilon_0>0$,在$(l-\varepsilon_0,l+\varepsilon_0)$中只有$x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k}$这$k$项,且$x_{n_i}\neq l,i=1,2,\cdots,k$.令$\varepsilon=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{|x_{n_i}-l|\}$,则$\varepsilon>0$,而在$(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$中再没有异于$l$的$\{x_n\}$的项.这与(3)矛盾.所以,(3)⇒(1).

(2)与(3)的区别在于,当l为$\{x_n\}$中的一项,比如$l=x_k$,且x_k仅在$\{x_n\}$中出现有限次时,尽管(2)总是对的,却不能保证(3)也是对的,例如在$x_n=n,l=1$时.

现在只要证明(1)可作为l是$\{x_n\}$聚点的定义.

① 聚点:数列的一个收敛子列的极限称为数列的聚点.有时,子列的无穷极限$\pm\infty$也叫作数列的无穷聚点.

设 l 是 $\{x_n\}$ 的聚点，则有子列 $x_{n_k}\to l$. 故 $\forall \varepsilon>0$，$\exists K$，当 $k>K$ 时，$x_{n_k}\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$. 即(1) 成立.

反之，设(1) 成立，则 $\forall \varepsilon>0$，在 $(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$ 中有 $\{x_n\}$ 的无穷多项. 于是，可选 $x_{n_1}\in(l-1,l+1)$，然后在 $\left(l-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}\right)$ 中所含的 $\{x_n\}$ 的无穷多项中，选一项 $x_{n_2}\in\left(l-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}\right)$，$n_2>n_1$，…，如此继续下去，即可选得 $\{x_{n_k}\}$，$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ 满足 $|x_{n_k}-l|<\frac{1}{k}$. 显然 $x_{n_k}\to l(k\to\infty)$，此即 l 为 $\{x_n\}$ 的聚点.

问题 1.2.4 是否存在数列，其全体有穷聚点成集 A

(1) 为空集；

(2) 为无限集；

(3) 无界；

(4) 为一区间；

(5) 为一有界开区间.

答：(1) ～ (4) 均是存在的.

无穷大数列显然没有有穷聚点，即 $A=\varnothing$. 对(2) ～ (4)，我们只具体写出 $A=(-\infty,+\infty)$ 的数列如下：$x_0=0$，$x_n=\frac{P}{Q}$，$|P|+Q=1,2,\cdots$，其中，P 为非零整数，Q 为正整数. 此数列可按如下方式排列：

$$
\begin{array}{cr}
0, & \\
1,-1, & (|P|+Q=2)\\
\frac{2}{1},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{2}{1}, & (|P|+Q=3)\\
\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{2},-\frac{3}{1}, & (|P|+Q=4)\\
\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{2}{3},-\frac{3}{2},-\frac{4}{1}, & (|P|+Q=5)\\
\cdots & (\cdots)
\end{array}
$$

对于(5)，若 $(a,b)\subset A$，a,b 为有穷数，则 $a\in A$，$b\in A$. 即 A 不可能是有界开区间.

$\forall \varepsilon>0$，$\varepsilon<b-a$，令 $a'=a+\frac{\varepsilon}{2}$，则 $a'\in A$. 即 a' 为 $\{x_n\}$ 的聚点. 故对 $\frac{\varepsilon}{2}$ 和任意正整数 N，$\exists n>N$，使 $x_n\in\left(a'-\frac{\varepsilon}{2},a'+\frac{\varepsilon}{2}\right)$，从而 $x_n\in(a,a+\varepsilon)$，这正表明 $a\in A$. 同理 $b\in A$.

问题 1.2.5 设 $\{x_n\}$ 有界. 下列说法可否作为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=L$[①] 的定义？

(1) $\forall \varepsilon>0$，有无穷多个 n 使 $x_n>L-\varepsilon$，同时至多有有限个 n 使 $x_n\geqslant L+\varepsilon$；

---

① 上极限和下极限：若 $\{x_n\}$ 为有界数列，A 是其聚点集，则称 $\sup A$ 为 $\{x_n\}$ 的上极限，$\inf A$ 为 $\{x_n\}$ 的下极限. 分别记作 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$（由前题(5) 知 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=\max A$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}=\min A$），$\{x_n\}$ 无上界时，定义 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=+\infty$；无下界时，定义 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}=-\infty$.

(2) $L = \lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}$;

(3) $L = \inf\limits_{k\geqslant 1} \sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}$;

(4) 在 L 右方只有 $\{x_n\}$ 的有限项而同时有 $\{x_n\}$ 的一个子列 $x_{n_k} \leqslant L$,使 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = L$.

答:(1),(2),(3) 可以.

为叙述方便,把 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = L$ 记作说法(0).则:

(1)$\Leftrightarrow$(0).设(1) 成立,则 $\forall \varepsilon > 0$,有无穷多个 $x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.从而 $L \in A$.此处 A 为 $\{x_n\}$ 的聚点集又对任意的 $L' > L$ 不能是 $\{x_n\}$ 的聚点.否则,取 $2\varepsilon < L'-L$,则有无穷多个 $x_n > L'-\varepsilon > L+\varepsilon$,矛盾.所以 $L = \max A$.反之,当(0) 成立时,L 为 $\{x_n\}$ 的聚点.于是 $\forall \varepsilon > 0$,$\{n \mid x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)\}$ 为无限集,只要再证 $\{n \mid x_n \in (L+\varepsilon, +\infty)\}$ 为有限集.如若不然,与这个集合对应的 x_n 可排成 $\{x_n\}$ 的有界子列,从而必有聚点 $L' \geqslant L+\varepsilon$,$L'$ 也是 $\{x_n\}$ 的聚点.这与 $L = \max A$ 矛盾.

(2)$\Leftrightarrow$(0).证明略(也可由下一结果推出).

(3)$\Leftrightarrow$(1).设(1) 成立,则 $\forall \varepsilon > 0$,有无穷多个 $x_n > L-\varepsilon$,从而对任意 k,一定有 $n \geqslant k$,使 $x_n > L-\varepsilon$.于是

$$\sup_{n\geqslant k}\{x_n\} > L-\varepsilon, \inf_{k\geqslant 1}\sup_{n\geqslant k}\{x_n\} \geqslant L-\varepsilon$$

由 ε 的任意性,$\inf\limits_{k\geqslant 1}\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\} \geqslant L$.另一方面,$\exists k$,$n \geqslant k$ 时,$x_n < L+\varepsilon$,$\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\} \leqslant L+\varepsilon$.因此 $\inf\limits_{k\geqslant 1}\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\} \leqslant L+\varepsilon$.仍由 ε 的任意性得 $\inf\limits_{k\geqslant 1}\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\} \leqslant L$.这样

$$L = \inf_{k\geqslant 1}\sup_{n\geqslant k}\{x_n\}$$

即(3) 成立.反之,设 $L = \inf\limits_{k\geqslant 1}\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}$,则由下确界定义,$\forall \varepsilon > 0$,$\forall k$,$\sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\} > L-\varepsilon$.故 $\forall k$,$\exists$(与 k 相应的)n,使 $n \geqslant k$ 且 $x_n > L-\varepsilon$.因此满足 $x_n > L-\varepsilon$ 的 x_n 有无穷多.另一方面,$\exists k_0$,使 $\sup\limits_{n\geqslant k_0}\{x_n\} < L+\varepsilon$.于是 $n \geqslant k_0$ 时,$x_n < L+\varepsilon$,即在 $L+\varepsilon$ 右边只有 $\{x_n\}$ 的有限项.这就是说,(3)$\Rightarrow$(1).

(4)$\Rightarrow$(1),但(1)$\nRightarrow$(4),例如 $x_n = \dfrac{1}{n}$,$L = 0$.

问题 1.2.6 下列说法是否正确?(设 $\{x_n\}$ 为有界的)

(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n < \sup\limits_{n}\{x_n\}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在的充要条件是 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n - \dfrac{1}{n}$,$n = 1,2,\cdots$;

(3) 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n > 0$,必有 $\{x_n\}$ 的无穷多项为正;

(4) 若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n > l$,必有 $\{x_n\}$ 的无穷多项大于 l.

答:(2),(3),(4) 正确.(1) 可能成为等式.

(1) 显然有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \sup\limits_{n}\{x_n\}$.另一方面,由定义易知,当 $\{x_n\}$ 为单调递增数列时,

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \sup_{n}\{x_n\}$$

(2) 注意对有界数列而言,$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ 和 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ 是两个固定数而 $\dfrac{1}{n}$ 可任意小.所以,这里的说法等价于 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$,也就是 $\{x_n\}$ 的聚点为有穷数且是唯一的.这正是有界数列收敛的

充要条件.

(3) 这时有 x_n 的子列 $x_{n_k}\to l>0$. 由极限保号性质即得.

(4) 与(3) 类似.

问题 1.2.7 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 有界,试比较下列每一对极限的大小:

(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 和 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$;

(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)$ 和 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n(x_n\geqslant 0,y_n\geqslant 0)$;

(3) 设 $x_n\geqslant y_n,n=1,2,\cdots,\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$;

(4) 设 $x_n\geqslant y_n,n=1,2,\cdots,\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$.

答:(1) $\geqslant$;(2) $\geqslant$;(3) $\geqslant$;(4) $\geqslant$.

仅对(1),(3) 做出说明.(2) 与(1),(4) 与(3) 是类似的.

(1) 设 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=a,\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n=b$. 若 c 为 $\{x_n+y_n\}$ 的任一聚点,则存在子列 $\{x_{n_k}+y_{n_k}\}\to c$. $\{x_{n_k}\}$ 为有界子列,故有聚点 $a'\geqslant a$ 以及子列 $x_{n_{k_i}}\to a'(i\to\infty)$. $\{y_{n_{k_i}}\}$ 有聚点 $b'\geqslant b$ 及子列(不妨认为就是它自己)$y_{n_{k_i}}\to b'(i\to\infty)$. 于是

$$x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}}\to a'+b'=c\geqslant a+b$$

由此即知 $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$. 另一方面,可举例说明,等号及严格的不等号都是可能的.

(3) 由 $x_n\geqslant y_n,\inf\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}\geqslant\inf\limits_{n\geqslant k}\{y_n\}$. 取极限即知 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$.

问题 1.2.8 下列等式是否成立?

(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(-x_n)=-\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$;

(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}$(假定 $x_n\neq 0,n=1,2,\cdots$);

(3) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在时,$\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$;

(4) $\varliminf\limits_{n\to\infty}|x_n|=|\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n|$.

答:(1),(3) 成立;(2),(4) 则未必.

(1) 设 $\varlimsup\limits_{n\to}x_n=L$,则有子列 $x_{n_k}\to L$,从而 $-x_{n_k}\to -L$,即 $-L$ 是 $\{-x_n\}$ 的聚点. 再证 $-L$ 是最小聚点. 若 K 是 $\{-x_n\}$ 的另一聚点,则 $-K$ 是 $\{x_n\}$ 的聚点. 于是 $-K\leqslant L,K\geqslant -L$. 这表明 $-L$ 是 $\{-x_n\}$ 的最小聚点,所以 $\varliminf\limits_{n\to\infty}(-x_n)=-L$.

(2) 不一定. 例如 $x_n=(-1)^n$,则 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=-1,\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=1$.

(3) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=K$. 则当 L 是 $\{y_n\}$ 的任一聚点时,有 $y_{n_k}\to L$. 从而 $x_{n_k}+y_{n_k}\to K+L$. 即 $K+L$ 是 $\{y_n+x_n\}$ 的聚点. 反之,当 L' 是 $\{x_n+y_n\}$ 的任一聚点时,$L'-K$ 一定是 $\{y_n\}$ 的聚点. 由此可知,$\{x_n+y_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的聚点集合是数轴上的相互平移. 当 $L=\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$ 时,

$$L+K=\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)$$

(4) 不一定. 例如数列 $-1,0,-1,0,\cdots$. 则

$$\varliminf_{n\to\infty}x_n=-1,\varliminf_{n\to\infty}|x_n|=0.\ \varliminf_{n\to\infty}|x_n|<|\varliminf_{n\to\infty}x_n|$$

注:1° 如果规定一个有穷的聚点总是比 $-\infty$ 大,比 $+\infty$ 小,则无论是有界数列还是无界数列,上(下) 极限可统一定义为最大(小) 聚点. 于是,数列的上(下) 极限总是存在的,并且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$(有限数或 $+\infty$, $-\infty$) 的充要条件是 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = l$. 这正是在有些情况下用上(下) 极限讨论数列极限的方便之处.

对于上面在有界的条件下讨论的问题,有些对无界数列也是适用的,另一些则失去意义,我们不再一一指明.

2° 问题 1.2.7(1),(2) 的更完整的结果是:若 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是两个有界数列,则有

① $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

② 若 $x_n \geqslant 0, y_n \geqslant 0 (n = 1,2,\cdots)$,则

$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

③ 当 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 之一收敛时,上述不等式变为等式.

§1.3 极限的性质

问题 1.3.1 下列说法中哪些与"数列 $\{x_n\}$ 有界"等价?

(1) $\exists x_0$ 和 $M \geqslant 0$,使 $|x_n - x_0| \leqslant M, n = 1,2,\cdots$;

(2) $\exists$ 正整数 N,使数列 $\{x_{n+N}\}$ 有界;

(3) 数列 $\{x_n + C\}$ 有界,此处 C 为任一常数;

(4) 数列 $\{|x_n|\}$ 有界;

(5) $\{x_n\}$ 的任一子列有界;

(6) $\{x_n\}$ 只有有穷的聚点.

答:上述六种说法均与"数列 $\{x_n\}$ 有界"等价. 事实上,根据数列有界的定义,(1),(3),(4) 是显然的. 对于(2),只要注意到数列 $\{x_{n+N}\}$ 为数列 $\{x_n\}$ 去掉前 N 项得到即可.

有了前面关于聚点和子列的讨论,(5),(6) 也是明显的.

问题 1.3.2 若 $\{x_n\}$ 是无界数列,能否断定:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$;

(2) $\{x_n\}$ 有一子列 $x_{n_k} \to \infty (k \to \infty)$;

(3) $\{x_n\}$ 的任一子列无界;

(4) 若 $\{y_n\}$ 无界,则 $\{x_n + y_n\}$ 也无界;

(5) 若 $\{y_n\}$ 无界,则 $\{x_n y_n\}$ 也无界.

答:除(2) 外,其余均不能断定. 无穷大是比无界更强的概念. 从子列的观点来看,前者要求的是一切子列皆有无穷极限,后者要求的是至少有一个子列有无穷极限. 换言之,后者可以容许有有界的(从而有收敛的) 子列. 由此易知在(1) ~ (3) 中只有(2) 是可以断定的. 而 $x_n = n^{(-1)^n}$ 可作为(1),(3) 的反例.

(4) 若 $\{x_n\}$ 为无界数列,则 $\{-x_n\}$ 也无界,而它们之和自然有界.

(5) 若 $\{u_n\}$ 为任一无界数列,$x_n = \begin{cases} u_n, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k+1, \end{cases}$ $y_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ u_n, & n = 2k+1; \end{cases}$ 则 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 皆有无界子列,从而都是无界数列. 但 $x_n \cdot y_n = 0 (n = 1,2,\cdots)$ 是有界的.