随机过程

（第二版）

李龙锁　王　勇　编著

科学出版社

随 机 过 程

(第二版)

李龙锁　王　勇　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书共 13 章. 第 1~4 章主要介绍马尔可夫过程的一般理论及几类典型的随机过程. 第 5~13 章详细介绍一维和多维平稳过程的谱理论和预测理论.

本书可作为高等院校数学专业硕士研究生“随机过程”课程的教材, 也可供理科、工科、财经、师范院校相关专业的硕士生、博士生和教师参考, 还可供有关的科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

随机过程/李龙锁, 王勇编著. —2 版. —北京：科学出版社, 2019.1
ISBN 978-7-03-059619-2

Ⅰ. ①随… Ⅱ. ①李…②王… Ⅲ. ①随机过程-研究生-教材 Ⅳ. ①O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 262892 号

责任编辑: 张中兴 梁 清 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 6 月 第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2019 年 1 月第 二 版 印张: 18
2019 年 1 月第二次印刷 字数: 360 000

定价: 59.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

第二版前言

本书这次再版, 其内容在总的框架之上与第一版基本相同, 只是局部做了一些增删, 改正了一些疏漏和不妥之处, 以便于更符合今后的教学实际情况.

本书第一版出版后, 得到了许多兄弟院校教师的指导和建议, 这次再版的一些修改就来源于此. 在此, 编者向他们表示真诚的感谢! 近几年来听此课的研究生, 发现了许多问题, 在此也对他们表示真诚的感谢! 最后, 编者诚挚地感谢哈尔滨工业大学研究生院、哈尔滨工业大学数学系和科学出版社的张中兴女士, 是他们的支持和帮助使编者完成了本书的再版.

本书虽经不断修改, 但由于编者水平所限, 仍有可能存在不足之处, 编者衷心欢迎各位读者批评和指正!

编　者
2018 年 9 月

第一版前言

经过各国数学家半个多世纪的努力, 随机过程现已成为一门独特又内容丰富的数学学科. 它不仅有完整的理论体系, 而且还广泛应用于工业、农业、军事和科学技术中. 例如, 预测和滤波应用于空间技术和自动控制; 时间序列分析应用于石油勘探和经济管理; 马尔可夫过程与点过程应用于地震预报和气象预报等.

为了满足教学的需要, 作者把近年来给数学系硕士研究生讲授的 "随机过程" 讲义整理成书. 本书不仅可作为高等院校数学专业硕士研究生 "随机过程" 课程的教材, 也可供理科、工科、财经、师范院校相关专业硕士、博士研究生和教师参考.

全书分为 3 个部分: 马尔可夫过程基本理论及几类典型的随机过程 (第 1 ~ 4 章); 一维平稳过程的谱理论和预测理论 (第 5 ~ 9 章); 多维平稳过程的谱理论和预测理论 (第 10 ~ 13 章). 特别要指出的是, 本书对平稳过程理论的介绍是比较详尽的.

在本书的写作过程中, 自始至终都得到了王勇教授的关怀与鼓励, 他审阅了本书的全稿, 并提出了许多宝贵的建议和意见, 在此谨致深深的谢意.

感谢我的硕士导师许承德教授将我带入随机过程领域, 他二十多年来无私的关爱和不倦的教诲是完成此书的动力源泉, 在此对老师致以深深的谢意.

由于作者的水平有限, 书中疏漏及不妥之处在所难免, 恳请读者批评指正.

李龙锁

2011 年于哈尔滨工业大学

符号意义

$\forall$	任取
a.e.	几乎处处
a.e.μ	在测度 μ 意义下几乎处处
$\mathbf{N}$	整数集
$\mathbf{R}$	实数集; 一维 Euclid 空间
$\mathbf{R}^n$	n 维 Euclid 空间
$\mathbf{R}^\infty$	实数序列 $(x_1, x_2, \cdots)$ 全体
$\mathbf{C}$	复数集
$\mathbf{C}^n$	n 维复向量空间
$\Leftarrow$	充分性
$\Rightarrow$	必要性
$A \Rightarrow B$	由 A 成立推得 B 成立
$*) \Rightarrow **)$	$*)$ 式成立, 往证 $**)$ 式成立
$\Leftrightarrow$	充分必要条件
$\varnothing$	空集
$A \triangle B$	$A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$ 称为 A 与 B 的对称差
$\overline{\lim_n} S_n$	集合序列 S_n 的上限集
$\underline{\lim_n} S_n$	集合序列 S_n 的下限集
$\triangleq$	定义

目　　录

第 1 章　离散时间的马尔可夫链

1.1　一般随机过程的基本概念

定义 1.1　设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是概率空间, $(E,\mathscr{E})$ 是可测空间, T 是指标集. 若对任何 $t\in T$, 有 $X_t:\Omega\to E$, 且 $X_t\in\mathscr{F}/\mathscr{E}$, 则称 $\{X_t(\omega),t\in T\}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的取值于 $(E,\mathscr{E})$ 中的随机过程, 在无混淆的情况下简称 $\{X_t(\omega),t\in T\}$ 为随机过程, 称 $(E,\mathscr{E})$ 为状态空间或相空间, 称 E 中的元素为状态, 称 T 为时间域. 对每个固定的 $\omega\in\Omega$, 称 $X_t(\omega)$ 为 $\{X_t(\omega),t\in T\}$ 对应于 ω 的轨道或现实, 对每个固定的 $t\in T$, 称 $X_t(\omega)$ 为 E 值随机元. 有时 $X_t(\omega)$ 也记为

$$X_t(\omega)=X_t=X(t)=X(t,\omega)$$

设 $T\subset\mathbf{R}$, $\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的一族单调增的子 σ 代数 (σ代数流), 即

(1) $\forall t\in T\Rightarrow\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}$, 且 $\mathscr{F}_t$ 是 σ 代数;

(2) $\forall s,t\in T,s<t\Rightarrow\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t$.

若 $X_t\in\mathscr{F}_t/\mathscr{E}(\forall t\in T)$, 则称 $\{X_t,t\in T\}$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应的随机过程, 或适应于 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的随机过程. 特别地, 若令

$$\mathscr{F}_t\triangleq\sigma(X_s,s\leqslant t,s\in T)\triangleq\sigma\left(\bigcup_{\substack{s\leqslant t\\ s\in T}}X_s^{-1}(\mathscr{E})\right)$$

是由 $\{X_s,s\leqslant t,s\in T\}$ 所生成的 σ 代数, 则 $\{X_t,t\in T\}$ 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应的随机过程.

当 $(E,\mathscr{E})=(\mathbf{R},\mathscr{B}_1)$ 时, 称 $\{X_t,t\in T\}$ 为实值随机过程;

当 $(E,\mathscr{E})=(\mathbf{C},\mathscr{B}_{\mathbf{C}})$ 时, 称 $\{X_t,t\in T\}$ 为复值随机过程;

当 $(E,\mathscr{E})=(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}_n)$ 时, 称 $\{X_t,t\in T\}$ 为 n 维随机过程;

当 E 是可列集 (有限集) 时, 称 $\{X_t,t\in T\}$ 为可列 (有限) 随机过程;

当 $T=\mathbf{R},\mathbf{R}^+$ 或 $[a,b]$ 时, 称 $\{X_t,t\in T\}$ 为连续参数的随机过程;

当 $T=\mathbf{N}$ 或 $\mathbf{N}^+$ 时, 称 $\{X_t,t\in T\}$ 为离散参数的随机过程 (随机序列);

当 $T=\mathbf{R}^n,(\mathbf{R}^+)^n,\mathbf{N}^n$ 或 $(\mathbf{N}^+)^n(n\geqslant 2)$ 时, 称 $\{X_t,t\in T\}$ 为随机场.

按参数和状态空间划分, 随机过程有 4 种类型:

(1) 指标集 T 离散, 状态空间 E 离散的随机过程;

(2) 指标集 T 离散, 状态空间 E 连续的随机过程;

(3) 指标集 T 连续, 状态空间 E 离散的随机过程;

(4) 指标集 T 连续, 状态空间 E 连续的随机过程.

然而, 以上分类是表面的, 更深刻的是按随机过程的概率结构来分类. 例如, 分为马尔可夫 (Markov) 过程、平稳过程、独立增量过程、二阶矩过程、正态过程、泊松 (Poisson) 过程、生灭过程、分支过程、更新过程、鞅等.

对于随机过程 $\{X_t, t\in T\}$ 而言, 可以这样设想, 有一个做随机游动的质点 M, 以 X_t 表示在时刻 t 质点 M 的位置. 于是 $\{X_t, t\in T\}$ 描绘了质点 M 所做的随机运动的变化过程, 一般把 "$X_t = x$" 形象地说成 "在时刻 t 质点 M 处于状态 x".

定义 1.2 设 $\{X_t, t\in T\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的、以 $(E, \mathscr{E})$ 为状态空间的随机过程, $T=\mathbf{R}^+$ (或 $\mathbf{R}$ 或直线上的任一区间). 如果 $\forall A\in\mathscr{E}$, 有

$$\{(t,\omega)|(t,\omega)\in T\times\Omega, X(t,\omega)\in A\}\in\mathscr{B}(T)\times\mathscr{F}$$

则称 $\{X_t, t\in T\}$ 是**可测的**.

设 $\{\mathscr{F}_t, t\in T\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的一族单调增的子 σ 代数. 如果 $\forall t\in T, A\in\mathscr{E}$, 有

$$\{(u,\omega)|(u,\omega)\in[0,t]\times\Omega, X(t,\omega)\in A\}\in\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{F}_t$$

则称 $\{X_t, t\in T\}$ 关于 $\{\mathscr{F}_t, t\in T\}$**循序可测**.

命题 1.1 设 $X_t:\Omega\to E$, $X_t\in\mathscr{F}_t/\mathscr{E}\ (\forall t\in T)$, $\{\mathscr{F}_t, t\in T\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的一族单调增的子 σ 代数. 如果 $\{X_t, t\in T\}$ 关于 $\{\mathscr{F}_t, t\in T\}$ 循序可测, 则 $\{X_t, t\in T\}$ 是可测的.

定义 1.3 设 $\{X_t, t\in T\}$ 是随机过程, 称

$$F_t(x)\triangleq P\{\omega|X_t(\omega)\leqslant x\}=P\{X_t\leqslant x\},\quad x\in\mathbf{R},\forall t\in T$$

为随机过程 $\{X_t, t\in T\}$ 的**一维分布函数**; 称

$$F_{t_1,t_2}(x_1,x_2)\triangleq P\{X_{t_1}\leqslant x_1,\ X_{t_2}\leqslant x_2\},\quad x_1,x_2\in\mathbf{R},\forall t_1,t_2\in T$$

为随机过程 $\{X_t, t\in T\}$ 的**二维分布函数**; 一般地, 称

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq P\{X_{t_1}\leqslant x_1,\ X_{t_2}\leqslant x_2,\cdots,X_{t_n}\leqslant x_n\}$$

$$x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R},\quad \forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$$

为随机过程 $\{X_t, t\in T\}$ 的 **n 维分布函数**; 而称

$$F\triangleq\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\,t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,\ n\geqslant 1\}$$

为随机过程 $\{X_t, t\in T\}$ 的**有限维分布函数族**.

随机过程 $\{X_t, t\in T\}$ 的有限维分布函数族 F 具有下列性质:

(1) 对 $\forall n \geqslant 1, \forall t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$, 及 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的任意排列 $t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n}$, 有

$$F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}) = F_{t_1, t_2, \cdots, t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \text{(对称性)}$$

(2) 对 $\forall 1 \leqslant m \leqslant n$, 有

$$F_{t_1, t_2, \cdots, t_m}(x_1, x_2, \cdots, x_m) = F_{t_1, t_2, \cdots, t_m, t_{m+1}, \cdots, t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_m, +\infty, \cdots, +\infty) \quad \text{(相容性)}$$

注 1.1 若知道了随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的有限维分布函数族 F, 便知道了这一随机过程中任意有限个随机变量的联合分布, 也就可以完全确定它们之间的相互关系. 可见, 随机过程的有限维分布函数族能够完整地描述随机过程的统计特征. 但是在实际问题中, 要知道随机过程的有限维分布函数族是不可能的, 因此, 人们想到了用随机过程的某些数字特征来刻画随机过程.

定义 1.4 设 $\{X_t, t \in T\}$ 是实随机过程, 称

$$m(t) \triangleq EX_t = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F_t(x) = \int_{\Omega} X_t(\omega)\, P(\mathrm{d}\omega), \quad t \in T$$

为 $\{X_t, t \in T\}$ 的**均值函数**; 称

$$D(t) \triangleq DX_t = E(X_t - m(t))^2, \quad t \in T$$

为 $\{X_t, t \in T\}$ 的**方差函数**; 称

$$C(s,\ t) \triangleq \operatorname{Cov}(X_s, X_t) = E(X_s - m(s))(X_t - m(t)), \quad s, t \in T$$

为 $\{X_t, t \in T\}$ 的**协方差函数**; 称

$$R(s,\ t) = E(X_s X_t), \quad s,\ t \in T$$

为 $\{X_t, t \in T\}$ 的**相关函数**.

注 1.2 若 $\{X_t, t \in T\}$ 是复值随机过程, 则方差函数的定义为

$$D(t) = E\left|X_t - m(t)\right|^2, \quad t \in T$$

协方差函数的定义为

$$C(s,\ t) = E(X_s - m(s))\overline{(X_t - m(t))}, \quad s,\ t \in T$$

相关函数的定义为

$$R(s,\ t) = E(X_s \overline{X_t}), \quad s,\ t \in T$$

性质 1.1

(1) $C(t,\ t) = D(t), t \in T$;

(2) $C(s,\ t) = R(s,\ t) - m(s)m(t), s,\ t \in T$;

(3) 若 $m(t) \equiv 0$, 则 $C(s,\ t) = R(s,\ t), s,\ t \in T$.

1.2　马尔可夫链的定义

在实际应用中有一类很广泛的随机过程, 其特点是: 过去只影响现在, 而不影响将来. 这种随机过程称为**马尔可夫过程**. 状态离散的马尔可夫过程称为**马尔可夫链**, 本章介绍时间离散的马尔可夫链 (简称马尔可夫链).

马尔可夫过程的研究始于 1906 年, 是随机过程的一个重要分支, 它在近代物理学、生物学、管理科学、信息处理、自动控制、金融保险等方面有着许多重要应用.

在本章中, 无特别声明我们总是假设:

(1) 参数集合 $T=\{0,1,2,\cdots\}$;

(2) 状态空间 $S=\{0,1,2,\cdots\}$ 或 $S=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$ 或其子集.

定义 1.5　设 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机过程, 状态空间为 S. 若对于任意的 $n\geqslant 1$ 及任意的整数 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n<t, i_1,i_2,\cdots,i_n,j\in S$, 有

$$P\{X_t=j\,|X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_n}=i_n\}=P\{X_t=j\,|X_{t_n}=i_n\} \tag{1.2.1}$$

则称 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 为马尔可夫链, 简称马氏链. 等式 (1.2.1) 称为**马氏性**或**无后效性**, 且假定式 (1.2.1) 两端的条件概率都有意义 (以下涉及条件概率的式子都作类似的假定).

定理 1.1　随机过程 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是马尔可夫链的充要条件是对任意的 $n\geqslant 1$ 及任意的 $i_1,i_2,\cdots,i_n,j\in S$, 有

$$P\{X_{n+1}=j\,|X_1=i_1,X_2=i_2,\cdots,X_n=i_n\}=P\{X_{n+1}=j\,|X_n=i_n\}$$

1.3　转 移 概 率

对于马尔可夫链 $\{X_n,n\geqslant 0\}$, 描述它概率性质最重要的是它在时刻 m 的一步转移概率 $p_{ij}(m)=P\{X_{m+1}=j|\,X_m=i\},i,j\in S$.

马尔可夫链是描述某些特定的随机现象的数学模型, 而产生这种特定的随机现象的具体模型一般称为**系统**, 因此我们经常把事件 $\{X_m=i\}$ 说成是在时刻 m 时系统处于状态 i, 把 $P\{X_{m+1}=j|\,X_m=i\}$ 说成已知在时刻 m 时系统处于状态 i, 而在时刻 $m+1$ 时系统转移到状态 j 的概率等.

定义 1.6　设 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是状态空间为 S 的马尔可夫链, 称

$$p_{ij}^{(n)}(m)=P\{X_{m+n}=j|\,X_m=i\},\quad i,j\in S$$

为系统在时刻 m 时处于状态 i 的条件下, 经 n 步转移到状态 j 的 n 步转移概率, 简称**时刻 m 的 n 步转移概率**.

显然, $p_{ij}^{(n)}(m)$ 具有下列性质:

(1) $p_{ij}^{(n)}(m) \geqslant 0, \quad i,j \in S$;

(2) $\sum\limits_{j\in S} p_{ij}^{(n)}(m) = \sum\limits_{j\in S} P\{X_{m+n}=j\,|X_m=i\}=1, i\in S$.

上述性质说明了, 对于任意给定的 $i\in S$ 及 $m\geqslant 0, n\geqslant 1$, $\left\{p_{ij}^{(n)}(m), j\in S\right\}$ 是一个概率分布. 规定

(1) $p_{ij}^{(1)}(m) = p_{ij}(m)$;

(2) $p_{ij}^{(0)}(m) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$

若 $p_{ij}^{(n)}(m)$ 与 m 无关, 则称 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是**时齐的或齐次的马尔可夫链**. 此时, 记 $p_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)}(m), i,j\in S, n\geqslant 1$; 一步转移概率记为 $p_{ij}=p_{ij}^{(1)}, i,j\in S$.

对时齐的马尔可夫链 $\{X_n, n\geqslant 0\}$, 有

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X_{m+n}=j\,|X_m=i\} = P\{X_n=j\,|X_0=i\}, i,j\in S, \forall m\geqslant 0$$

以下恒设马尔可夫链 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是时齐的, 并简称为马尔可夫链.

性质 1.2 马尔可夫链 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 的 n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 具有下列性质:

(1) $\forall i,j\in S, \ p_{ij}^{(n)}\geqslant 0$;

(2) $\forall i\in S, \sum\limits_{j\in S} p_{ij}^{(n)} = 1$.

定理 1.2 (Chapman-Kolmogorov) 设 $p_{ij}^{(n)}$ 是马尔可夫链 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 的 n 步转移概率, 则 $\forall i,j\in S, \ m,n\geqslant 0$, 有

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \quad \text{(C-K方程)}$$

证明
$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(m+n)} &= P\{X_{m+n}=j\,|X_0=i\} = P\left\{\bigcup_{k\in S}\{X_m=k\}, X_{m+n}=j\,|X_0=i\right\} \\
&= P\left\{\bigcup_{k\in S}\{X_m=k, X_{m+n}=j\}\,|X_0=i\right\} \\
&= \sum_{k\in S} P\{X_m=k, X_{m+n}=j\,|X_0=i\} \\
&= \sum_{k\in S} P\{X_m=k\,|X_0=i\} P\{X_{m+n}=j\,|X_0=i\,, X_m=k\} \\
&= \sum_{k\in S} P\{X_m=k\,|X_0=i\} P\{X_{m+n}=j\,|X_m=k\}
\end{aligned}$$

$$=\sum_{k\in S}P\{X_m=k\,|X_0=i\}P\{X_n=j\,|X_0=k\}=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}p_{kj}^{(n)}$$

定理 1.3 马尔可夫链 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 的一步转移概率 p_{ij} 可以确定所有的 n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$.

证明 由 C-K 方程, 显然.

记 $\boldsymbol{P}^{(n)}=(p_{ij}^{(n)})_{i,j\in S},\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{(1)}=(p_{ij})_{i,j\in S}$. 称 $\boldsymbol{P}^{(n)}$ 为马尔可夫链 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 的 n 步转移矩阵, 称 $\boldsymbol{P}$ 为马尔可夫链 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 的 (一步) 转移矩阵. 此时, C-K 方程可表示为 $\boldsymbol{P}^{(m+n)}=\boldsymbol{P}^{(m)}\boldsymbol{P}^{(n)}$ 且 $\boldsymbol{P}^{(n)}=\boldsymbol{P}^{n}$.

定义 1.7 设 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是马尔可夫链, 对任意的 $n\geqslant 0$, 称 $\pi_i(n)=P\{X_n=i\}$, $i\in S$ 为**绝对概率**. 特别地, 称 $\pi_i(0)=P\{X_0=i\},i\in S$ 为**初始概率**.

显然, 绝对概率和初始概率具有下列性质:

$$\begin{cases}\pi_i(n)\geqslant 0,\ i\in S,\\ \displaystyle\sum_{i\in S}\pi_i(n)=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}\pi_i(0)\geqslant 0,\ i\in S\\ \displaystyle\sum_{i\in S}\pi_i(0)=1\end{cases}$$

故对任意 $n\geqslant 0$, $\{\pi_i(n),i\in S\}$ 是概率分布, 通常称为**绝对(概率)分布**; 特别地, $\{\pi_i(0), i\in S\}$ 称为**初始(概率)分布**. 记 $\varPi(0)=\{\pi_i(0)\}_{i\in S},\varPi(n)=\{\pi_i(n)\}_{i\in S}$.

定理 1.4 设 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是马尔可夫链, 则它的任意有限维概率分布完全由初始分布和一步转移概率决定.

证明 对任意的 $n\geqslant 1$, 任意的整数 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$ 及任意的 $i_1,i_2,\cdots,i_n\in S$, 有

$$\begin{aligned}
&P\{X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_n}=i_n\}\\
&=P\left\{\bigcup_{i\in S}\{X_0=i\},X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_n}=i_n\right\}\\
&=P\left\{\bigcup_{i\in S}\{X_0=i,X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_n}=i_n\}\right\}\\
&=\sum_{i\in S}P\{X_0=i,X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_n}=i_n\}\\
&=\sum_{i\in S}P\{X_0=i\}P\{X_{t_1}=i_1\,|X_0=i\}P\{X_{t_2}=i_2\,|X_0=i,X_{t_1}=i_1\}\\
&\quad\cdots P\left\{X_{t_n}=i_n\,\middle|X_0=i,X_{t_1}=i_1,\cdots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\right\}\\
&=\sum_{i\in S}P\{X_0=i\}P\{X_{t_1}=i_1\,|X_0=i\}P\{X_{t_2}=i_2\,|X_{t_1}=i_1\}\\
&\quad\cdots P\left\{X_{t_n}=i_n\,\middle|X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\right\}\\
&=\sum_{i\in S}\pi_i(0)p_{ii_1}^{(t_1)}p_{i_1i_2}^{(t_2-t_1)}\cdots p_{i_{n-1}i_n}^{(t_n-t_{n-1})}
\end{aligned}$$