集中紧性原理在NLS方程研究中的应用

郭　青◎著

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

中央民族大学青年教师博士文库

Jizhong Jinxing Yuanli Zai NLS Fangcheng Yanjiu Zhong De Yingyong

中央高校基本科研业务费资助出版

集中紧性原理在NLS方程研究中的应用

郭青◎著

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

中央民族大学青年教师博士文库

图书在版编目（CIP）数据

集中紧性原理在NLS方程研究中的应用 / 郭青著
-- 北京 : 中央民族大学出版社，2017.10
ISBN 978-7-5660-1450-4

Ⅰ. ①集… Ⅱ. ①郭… Ⅲ. ①非线性—薛定谔方程—研究 Ⅳ. ①O175.24

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第265021号

集中紧性原理在 NLS 方程研究中的应用

著　　者　郭　青
责任编辑　李红亮
封面设计　舒刚卫
出 版 者　中央民族大学出版社
　　　　　北京市海淀区中关村南大街 27 号　　邮编：100081
　　　　　电话：68472815（发行部）　传真：68933757（发行部）
　　　　　　　　68932218（总编室）　　　　68932447（办公室）
发 行 者　全国各地新华书店
印 刷 厂　北京建宏印刷有限公司
开　　本　787×1092（毫米）　1/16　印张：11.5
字　　数　150 千字
版　　次　2017 年 10 月第 1 版　2017 年 10 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5660-1450-4
定　　价　42.00 元

序

本书是基于作者在中国科学院攻读博士研究生期间关于非线性薛定谔方程 (NLS) 以及其他色散波方程的研究成果和博士学位论文的主要内容，具体讨论集中紧性原理和大变分的思想以及Profile分解技术在色散波方程，尤其是在聚焦型质量超临界能量次临界薛定谔方程中的应用。

本书主要部分利用源自集中紧的 Profile 分解技术来研究聚焦型质量超临界能量次临界 NLS 方程

$$iu_t + \Delta u + |u|^{p-1}u = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^N) \tag{0.0.1}$$

解的长时间行为和动力学特征。

首先，我们在初值 u_0 满足 $M(u_0)^{\frac{1-s_c}{s_c}}E(u_0) < M(Q)^{\frac{1-s_c}{s_c}}E(Q)$ 以及

$$\|\nabla u_0\|_2\|u_0\|_2^{\frac{1-s_c}{s_c}} > \|\nabla Q\|_2\|Q\|_2^{\frac{1-s_c}{s_c}}$$

的条件下,其中 Q 是方程 $-(1-s_c)Q+\Delta Q+|Q|^{p-1}Q=0$ 的基态解，证明了问题 (0.0.1) 的解 $u(t)$ 或者在有限正时刻爆破，或者在时间正半轴上整体存在且同时存在时间序列 $t_n \to \infty$ 使得 $\|\nabla u(t_n)\|_2 \to \infty$。在时间负半轴上相应的结论成立。这一结果是通过建立能量空间上有界序列的非线性 Profile 分解，利用集中紧的思想结合 NLS 方程解的 Virial 估计得到的。

主要部分第二个重要结果是对前一结果的补充和深入探讨，即进一步讨论了方程 (0.0.1) 在临界条件 $M(u_0)^{\frac{1-s_c}{s_c}}E(u_0) = M(Q)^{\frac{1-s_c}{s_c}}E(Q)$ 下门槛解的动力学行为，并据此对解空间给出一个严格的分划。对这一临界情形的研究主要是利用椭圆基态 Q 的变分结构和线性化算子的谱特征，通过对方程的门槛解在基态附近做调制稳定性分析实现的。

以上两个结果把 Holmer-Roudenko [32, 33] 在三维空间中考虑的三次多项式非线性项情形推广到一般维数的非多项式情形。推广的意义在于：首先，我们对一般情形下能量空间中有界序列的非线性 Profile 分解进行了更精细的刻画；其次，前人在 $C(\mathbb{R}; H^1)$ 空间中讨论的方法对一般情形是行不通的，我们引入合适的 Strichartz 空间突破了这种局限性；最后，通过引入变换形式的驻波解 $e^{i(1-s_c)t}Q$ 得到了相应的线性化算子在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 的某个正交子空间上的正定性，克服了空间维数带来的困难，是有价值的非平凡推广。

主要部分的第三个结果是刻画了问题 (0.0.1) 的有限时刻爆破解在爆破时刻附近的两种集中现象。这是利用经典的集中紧思想，通过研究能量空间中有界序列的 Profile 分解而得到的。

除此之外，书中还介绍了 Profile 分解技术在四阶 Schrödinger、Hartree 等色散波方程研究中的应用，特别给出了利用调和分析等技巧构造线性、非线性 Profile 分解，证明几乎正交等式的过程，以加深对 Profile 技术中蕴含的集中紧思想的理解。

本书所研究的源自集中紧性原理的 Profile 分解技术是“大变分”方法的主要组成部分。所谓“大变分”方法就是非线性分析中经典的变分、约化以及集中紧等技术在发展方程尤其是色散方

程研究中结合了时间的演化规律，尤其是方程自身的算子半群、能量方法和 Virial 型估计，使经典的分析方法在使用中更具有针对性，应用也更广泛，所以形象地称之为“大变分”。

目　录

第1章　引言

薛定谔（Schrödinger）方程是量子力学的基本动力学方程。非线性薛定谔方程，简称 NLS 方程，是非线性波动系统的核心，具有非常深刻的物理背景，如描述激光束在折射率依赖波振幅的介质中传播及著名的 Bose-Einstein 凝聚现象，等等。特别由于其在非线性光学和量子场论中的广泛应用，NLS 方程很受数学家和物理学家们的青睐，大量的数值模拟结果也应运而生。从数学的观点看，NLS 方程的研究的确是一个相当困难的问题，这本质上是由于它作为一类特殊的色散波方程，兼有抛物方程和双曲方程的混合性质，而其孤立子特解又紧密联系着相应的椭圆理论。

1.1　问题的研究背景

NLS 方程的研究动态是一个不断更新进步的过程，从早期的局部适定性理论（方程解的局部存在性、唯一性、正则性及解的局部光滑效应见文献 [9, 17]等）的建立并逐步完善到解的长时间行为（解在有限时刻爆破、整体存在以及解的渐近行为）的深入刻画，至今已有了突出的进展，集结了数学家们无穷的智慧和伟大的创造力。然而人们对 NLS 方程研究的浓厚兴趣和高昂热情却丝毫没有减退。特别地，由于 NLS 方程解的长时间行为（散射理论和爆破解的动力学行为）方面尚遗留着许多饶有兴趣，但相当

棘手的公开问题，使得相关研究呈现着勃勃生机，也吸引着越来越多的著名专家和青年数学家们在这一领域倾力贡献。

考虑如下典型的 NLS 方程初值问题：

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u \pm |u|^{p-1}u = 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{1.1.1}$$

这里 $u(x,t)$ 是 $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ 上的复值函数，$p > 1$，$H^s(\mathbb{R}^N)$ 是 s 阶的 Sobolev 空间。形式上，方程 (1.1.1) 满足如下的守恒等式：

质量守恒：$$M(u)(t) =: \int |u(t,x)|^2 dx = M(u_0) \tag{1.1.2}$$

能量守恒：$$E(u)(t) =: \frac{1}{2}\int |\nabla u(t,x)|^2 dx - G(u(t)) = E(u_0) \tag{1.1.3}$$

动量守恒：$$P(u)(t) =: Im \int \nabla u(t,x)\overline{u}(t,x) dx = P(u_0) \tag{1.1.4}$$

简单计算可知，方程 (1.1.1) 保持如下尺度变换不变：如果 $u(x,t)$ 是 (1.1.1) 的解则对任意 $\lambda > 0$，$\lambda^{\frac{2}{p-1}}u(\lambda x, \lambda^2 t)$ 也是方程的解。由于 Sobolev 空间 $\dot{H}^{s_c}$ ($s_c = \frac{N}{2} - \frac{2}{p-1}$) 保持同样的尺度变换, 我们也称方程 (1.1.1) 为 $\dot{H}^{s_c}$-临界方程, 并且分别定义 H^s, $s > s_c$, $s = s_c$ 和 $s < s_c$ 为方程的次临界，临界和超临界空间，相应的初值问题称为次临界，临界，超临界问题。例如，$p = 1 + \frac{4}{N}$ 对应于 L^2-临界（质量临界）方程，$p = 1 + \frac{4}{N-2}$ 对应于 $\dot{H}^1$-临界（能量临界）方程。特别地，当 $s_c \in (0,1)$ 时，方程 (1.1.1) 则是一个质量超临界能量次临界方程，且此时，如果在 $s = 1$ 时的空间 H^1 中考虑该方程，初值问题 (1.1.1) 则是一个次临界问题。目前对于超临界问题的研究结果很少，并且已经证明超临界问题解对初值不再是连续依赖的，故本书对此不作详细介绍。

(1.1.1) 这一模型在物理上描述了多粒子系统的运动，在 - 的情形，这些粒子（如电子）相互排斥，使得愈来愈弥散，称为“散焦”；在 + 情形，这些粒子（如光子）互相吸引，导致越来越集中，称为“聚焦”。相应地， NLS 方程 (1.1.1) 分别称为散焦型和聚焦型方程。两者之间一个明显区别在于，散焦型 NLS 方程对应的解的能量泛函中动能和势能是同号的，总能量是非负的；而聚焦型 NLS 方程解的能量泛函中，动能和势能反号且随着时间的变化相互竞争，能量的符号不能确定。这一特点也导致对方程 (1.1.1) 的 ± 两类不同情形研究手法风格迥异。

事实上，聚焦型 NLS 方程解的长时间行为的研究一般较散焦情形更加困难，这主要由于，根据非线性项的强度 (p) 和本质 (±) 的不同，对应的解会呈现出不同的行为。当算子的色散效应超过非线性项的影响时，解会像自由波一样散射；反之，当非线性项的影响超过算子的色散效应时，解会出现有限时刻爆破；如果两者作用平衡时，解会呈现出孤立子的行为。一个典型的孤立子可以写成 $e^{it}Q(x)$ 的形式，这里 Q 是椭圆方程 $\Delta Q - Q + Q^p = 0$ 的解。即除了一个相位的变换，方程 (1.1.1) 的解是不随时间变化而变化的，特别地，解的质量密度不随时间变化。

以质量临界问题为例，著名的散射猜想是：对于散焦情形，所有有限质量解都整体存在并且散射；对于聚焦情形，当初值质量严格小于基态质量时，对应的解整体存在并且散射。这里基态是椭圆方程 $\Delta Q - Q + Q^{1+\frac{4}{N}} = 0$ 唯一径向对称的正解。如果提高初值的正则性，如在空间 H^1 中研究，由能量守恒律，解的整体存在性容易建立；低正则问题的相关结果则在 [46] 及其所引文献中有详细介绍。另外，聚焦型质量临界问题更对应有孤

立子猜想：任何具有基态质量的整体解，要么双边散射，要么在模去方程不变群的意义下与孤立子解重合。孤立子猜想的相关结果可以参考文献 [42, 48]。类似地，对于能量临界问题，首先，散焦型方程解的整体适定性和散射结果已经由 Bourgain [6] 和后来的 [11] 等文献中相继解决。聚焦情形 (1.1.1) 相应的定态方程 $\Delta W + |W|^{\frac{4}{N-2}} W = 0$ 存在唯一径向对称的正解 W，它被猜想是动能最小，满足两边都整体存在且都不散射的解，并且有相应的能量临界问题的散射猜想：如果极大存在区间解 $u(x,t) : I \times \mathbb{R}^N \mapsto C$ 满足 $\sup_{t\in I} \|\nabla u\|_{L^2} < \|\nabla W\|_{L^2}$，则 u 整体存在且散射。这个猜想首先是由 Kenig-Merle [38] 在三维空间中对径向对称解证明的，而猜想的高维情形在文献 [45] 中得以验证。

对于次临界问题，解的局部适定性理论和散焦情形解的长时间行为方面的研究结果都比较完备。首先，对任意给定的 H^s $(s > 0)$ 初值，由解的 Strichartz 估计结合 *Picard* 迭代方法容易得到解的局部适定性，并且解的局部存在区间依赖于初值的 H^s 范数。因此，只要有解的 H^s 范数的先验估计，局部解可立即延拓为整体解。进一步，对散焦情形，可以利用 Lin 和 Strauss 在 [50] 中给出的 Morawetz 估计建立散焦型次临界 NLS 方程解在能量空间中的整体散射理论，文献 [9] 中对此也有详尽讨论。

与临界问题类似，由于孤立子解的存在性，聚焦型 NLS 方程次临界问题解的长时间行为的研究比相应的散焦情形复杂很多。这一领域相关的经典事实是，（1）当 $p-1 < \frac{4}{N}$ 时，方程 (1.1.1) 的解总是整体存在的；（2）当 $p-1 = \frac{4}{N}$ 时，对质量临界方程的相关结果我们前文已经介绍；（3）当 $p-1 > \frac{4}{N}$ 时，方程 (1.1.1) 的解会出现有限时刻爆破的一个充分条件是：能量小于零，且初值或者

径向对称，或满足 $\|xu_0\|_{L^2} < \infty$（见文献[9]）。注意到，方程 (1.1.1) 在情形（3）的条件下是一个质量超临界能量次临界方程，并且由于情形（3）包含了解的有限时刻爆破这一复杂而有趣的现象，使得研究内容更加丰富，因而也是次临界问题解的长时间行为研究中的一个热点。比如，我们自然希望能够像临界情形那样，可以通过研究初值与基态的某种关系，寻求判断解的长时间行为的标准，即对初值函数空间构造的一个可以描述相应解的有限时刻爆破或者整体散射或者全局存在但不散射的分划。

事实上，对于方程 (1.1.1) 具有三次多项式形式非线性项，即 $p = 3$，这类简单情形， J.Holmer-S. Roudenko 等 [31, 12, 32, 33] 在 $N = 3$ 维空间中得到了一个判断 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$-临界方程解的长时间行为的准则，并指出 $M(Q)E(Q)$ 在刻画方程 (1.1.1) ($p = N = 3$) 解的动力学行为中起了至关重要的作用。具体地，如果 u 是方程 (1.1.1) ($p = N = 3$) 满足 $M(u)E(u) < M(Q)E(Q)$ 的解，则当 $\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} < \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ 时， $T_+ = T_- = \infty$ 并且 u 整体散射；而当 $\|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} > \|\nabla Q\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ 时，$u(t)$ 或者在有限正时刻爆破，或者在时间正半轴上整体存在，但同时存在序列 $t_n \to \infty$ 使得 $\|\nabla u(t_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to \infty$ 时间负半轴上有同样的结论成立。这一结果不仅利用初值与基态的关系给出了散射与非散射解之间的一个分划，并且描述了非散射解在无穷时刻的性质。进一步地， J.Holmer-S. Roudenko 还讨论了初值满足 $M(u_0)E(u_0) = M(Q)E(Q)$ 的门槛解的分类, 同样通过比较初值动能质量的混合积与基态的相应量之间的大小，对方程解的动力学行为做了更详尽的刻画。事实上，这一次临界问题的结果恰好对应了临界问题中如孤立子解等的猜想。

我们的第一个目标就是把 J.Holmer-S. Roudenko 等人的结果推广到高维一般非线性项的情形。对于一般情形的次临界问题，由于方程的非线性项不再是多项式形式，显然不能对 J.Holmer-S. Roudenko 等人的证明作简单推广。其中一个突出的原因是，研究所用的主要工具，即非线性 Profile 分解，建立本身及其应用的整个过程都需要重新讨论。并且在更精细的门槛解性质的讨论中，我们还需要解决另外几个实质性的困难。首先，不同于 $p = N = 3$ 的特殊情形，当 $N \geq 4$ 时，由于 $1 + \frac{4}{N} < p < 1 + \frac{4}{N-2}$ 确定的 p 不再是整数，于是，一方面如果像 [33] 中那样在连续时间空间 $C_b(I; H^1(\mathbb{R}^N))$ 上讨论是行不通的，我们必须构造合适的 Strichartz 空间 $L^{\frac{4(p+1)}{N(p-1)}}(I; L^{p+1}(\mathbb{R}^N))$ 并利用算子 $e^{it(\Delta-(1-s_c))}$ 的 Strichartz 估计做更精细的研究。另一方面在一般高维情形中，线性化 Schrödinger 算子的谱性质更为复杂，从而很多 $N = 3$ 情形中的重要结果需要重新证明。最后，由于技术上的困难，我们不能直接在以 $\tilde{Q}$ 为椭圆问题 $-\Delta\phi + \phi - \phi^p = 0$ 的基态所对应的 NLS 方程 (1.1.1) 的驻波解 $e^{it}\tilde{Q}$ 附近讨论（如线性化等）问题，而需要引入新的驻波解 $e^{i(1-s_c)t}Q$，其中 Q 是椭圆问题 $-(1 - s_c)Q + \Delta Q + |Q|^{p-1}Q = 0$ 的解。

关于质量超临界能量次临界方程的另一个具有重要研究价值的问题是给出 (1.1.1) 的解在有限时刻爆破的各种充分条件以及刻画有限时刻爆破解的动力学行为。事实上，对于质量临界方程（$p - 1 = \frac{4}{N}$）有限时刻爆破解的动力学行为的研究结果已经非常丰富，其中涉及了如质量集中、极限图景及爆破速率等大量内容，比较经典的结果可以参考 [53, 28, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 79, 81, 73] 以及其中所列的文献。

虽然对于质量超临界方程（$p-1 > \frac{4}{N}$），Glassey [20], Weinstein

[88], Ogawa 和 Tsutsumi [74], Holmer 和 Roudenko [32], Merle 和 Raphaël [54, 80] 等都得到了有限时刻爆破解的存在性，但关于爆破解动力学行为的研究结果还比较少。其中，对 $p=3$， $N=3$ 的特殊情形， J.Holmer-S. Roudenko [34] 首先对方程 (1.1.1) 径向对称的有限时刻爆破解证明了一种弱意义的集中性质：存在 $\varepsilon(t)>0$ 满足当 $t\to T$ 时收敛于 0，使得对于某常数 $C_1>0$, 有 $\liminf_{t\to T}\int_{|x|\le\varepsilon(t)}|u(x,t)|^3dx\ge C_1$。同样是对径向对称的爆破解，在 [91] 中作者通过研究一种新的 Gagliardo-Nirenberg 不等式最佳常数对应变分问题的基态解的变分特征，定量地给出了上面结果中常数 C_1 的值。本书第三个主要工作便是结合集中紧的思想，刻画在没有径向对称条件限制下一般爆破解的两类集中现象。

1.2 主要内容及研究方法

本书的主要部分，即第三章到第五章，是研究聚焦型质量超临界能量次临界 NLS 方程

$$\begin{cases} iu_t+\Delta u+|u|^{p-1}u=0, & (x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}, \\ u(x,0)=u_0(x)\in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}\tag{1.2.1}$$

解的长时间行为，并将分别从 $EM^{\frac{1-s_c}{s_c}}$-次临界整体非散射解在无穷远时刻的发散性、 $EM^{\frac{1-s_c}{s_c}}$-临界门槛解的动力学行为以及有限时刻爆破解和无穷时刻发散解的集中性质三个方面进行刻画。这些结果主要都是利用蕴含集中紧思想的 Profile 分解技术得到的，所以除了主要部分对 NLS 方程 (1.2.1) 的研究成果详细介绍以外，本书还将在第六章中概括给出 Profile 分解在四阶 NLS 方程及 Hartree 方程中应用的两个研究结果，更充分地显示集中紧技术在色散波方程研究中的优势。

首先，我们介绍一下应用于色散波方程中的 Profile 分解技术产生的思想根源。经典的集中紧方法主要是用来刻画 Banach 空间中嵌入定理紧性缺失的现象。特别地，可以将 Banach 空间中的任一有界函数列表达为另外一种可以反映导致它紧性缺失原因的新形式。一旦我们发现了导致失紧的各种因素，常常能够把它们显示表示出来，从而重获某种紧性，而这就是 Profile 分解技术的原始思想。这一工具早在 20 世纪 80 年代由 P. L. Lions [21] 建立并用于椭圆问题中一些经典问题的研究。

最早将这一技术量身改造用于研究色散波方程是由法国数学家 Bahouri 和 Gérard 在 [2] 中引入的。这时 Profile 分解，也称波包分解，可以分为线性 Profile 分解和非线性 Profile 分解两种。粗略地说，线性 profile 分解刻画了线性方程的解序列在方程不变群作用下的失紧性，并且具体给出了解序列的结构，即一列线性方程的有界解序列在重新选取子列意义下可以表示成一个集中波函数的叠加和一个余项的求和形式。其中每个集中波函数都是线性方程的解，通常被称为线性波包（也称线性 profile），它们囊括了导致解算子失紧的保持方程不变的所有对称群的信息，如平移不变、尺度不变、旋转不变群等。可以证明，波包与波包之间满足特定意义下的正交性质（参考本书第二章），而余项满足的渐近消失性使其在应用中往往可以忽略不计。上述线性 profile 分解的建立起源于利用调和分析手段证明某些修正的 Strichartz 不等式。非线性 Profile 分解中每个波包都是所研究的非线性方程的解，它们完全对应于线性分解中的线性波包，并满足相同意义下的几乎正交等式和余项的渐近消失性。非线性 Profile 分解的形式依赖于具体的非线性方程，其中非线性波包的存在性以对应非线性问题的适定