CAMBRIDGE

信息科学技术学术著作丛书

复矩阵求导理论及其在信号处理和通信中的应用

Complex-Valued Matrix Derivatives: With Applications in Signal Processing and Communications

Are Hjørungnes 著

王 鼎 王建辉 沈彩耀 尹洁昕 译

科学出版社

信息科学技术学术著作丛书

复矩阵求导理论及其在信号处理和通信中的应用

Complex-Valued Matrix Derivatives: With Applications in Signal Processing and Communications

Are Hjørungnes 著

王 鼎 王建辉 沈彩耀 尹洁昕 译

科 学 出 版 社

北 京

图字：01-2017-2104 号

内 容 简 介

本书全面介绍标量、向量及矩阵函数关于复矩阵导数的理论与方法，从信号处理和通信两个领域中列举大量应用实例。这是第一部从工程视角研究复矩阵求导的著作。本书不仅讨论无结构矩阵，还讨论结构化矩阵，并且利用最新的研究实例来描述相关概念，其中的应用实例涉及多个领域，主要包括无线通信、控制理论、自适应滤波、资源管理及数字信号处理。

本书可作为从事复函数研究的数学专业科研人员的参考书，也可供信号处理和通信领域的研究人员和工程师阅读。

图书在版编目（CIP）数据

复矩阵求导理论及其在信号处理和通信中的应用 /(挪)赫伦格尼著；王鼎等译．—北京：科学出版社，2018.11

（信息科学技术学术著作丛书）

书名原文：Complex-Valued Matrix Derivatives: With Applications in Signal Processing and Communications

ISBN 978-7-03-058446-5

Ⅰ.①复… Ⅱ.①赫…②王… Ⅲ.①矩阵论-应用-信号处理-研究 ②矩阵论-应用-通信系统-研究 Ⅳ.①TN911.7 ②TN914

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 179252 号

责任编辑：张艳芬　纪四稳 / 责任校对：王萌萌

责任印制：张　伟 / 封面设计：铭轩堂

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2018 年 11 月第　一　版　开本：B5(720 × 1000)

2018 年 11 月第一次印刷　印张：17 1/2

字数：350 000

定价：128.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

This is a simplified Chinese edition of the following title published by Cambridge University Press:

Complex-Valued Matrix Derivatives: With Applications in Signal Processing and Communications (978-0-521-19264-4)

《信息科学技术学术著作丛书》序

21 世纪是信息科学技术发生深刻变革的时代，一场以网络科学、高性能计算和仿真、智能科学、计算思维为特征的信息科学革命正在兴起。信息科学技术正在逐步融入各个应用领域并与生物、纳米、认知等交织在一起，悄然改变着我们的生活方式。信息科学技术已经成为人类社会进步过程中发展最快、交叉渗透性最强、应用面最广的关键技术。如何进一步推动我国信息科学技术的研究与发展；如何将信息技术发展的新理论、新方法与研究成果转化为社会发展的推动力；如何抓住信息技术深刻发展变革的机遇，提升我国自主创新和可持续发展的能力。这些问题的解答都离不开我国科技工作者和工程技术人员的求索和艰辛付出。为这些科技工作者和工程技术人员提供一个良好的出版环境和平台，将这些科技成就迅速转化为智力成果，将对我国信息科学技术的发展起到重要的推动作用。《信息科学技术学术著作丛书》是科学出版社在广泛征求专家意见的基础上，经过长期考察、反复论证之后组织出版的。这套丛书旨在传播网络科学和未来网络技术，微电子、光电子和量子信息技术、超级计算机、软件和信息存储技术、数据知识化和基于知识处理的未来信息服务业、低成本信息化和用信息技术提升传统产业，智能与认知科学、生物信息学、社会信息学等前沿交叉科学，信息科学基础理论，信息安全等几个未来信息科学技术重点发展领域的优秀科研成果。这套丛书力争起点高、内容新、导向性强，具有一定的原创性，体现出科学出版社“高层次、高水平、高质量”的特色和“严肃、严密、严格”的优良作风。希望这套丛书的出版，能为我国信息科学技术的发展、创新和突破带来一些启迪和帮助。同时，欢迎广大读者提出好的建议，以促进和完善丛书的出版工作。

中国工程院院士

原中国科学院计算技术研究所所长

译 者 序

在通信和信号处理领域，经常需要处理以复数(包括复向量和复矩阵)为变量的函数，并且多数为优化问题，此时就需要对复变量进行求导。然而，很少有教材或者专著专门围绕复矩阵求导问题展开深入讨论，而本书恰好可以弥补这一缺憾。书中系统性地描述复函数关于复矩阵变量的求导理论与方法，其所建立的理论体系是完备的，可以涵盖各种类型的函数与变量。此外，书中还利用流形理论描述关于结构化矩阵变量的求导问题。本书内容结构严谨、推导缜密、案例丰富，可满足各种专业和层次的读者需求，是一本非常优秀的学术专著。

本书的作者 Are Hjørungnes 是挪威奥斯陆大学数学和自然科学学院的教授，他在信号处理和通信领域中的研究成果十分丰硕，在 IEEE 旗下的期刊中发表了多篇具有影响力的高水平学术论文。此外，Are Hjørungnes 教授还担任期刊 *IEEE Transactions on Wireless Communications* 主编，以及期刊 *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing* 和 *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* 的客座编委。

本书的翻译团队多年来一直从事信号处理和通信领域的相关研究工作，因此深知本书对于该领域的重要意义，故决定翻译。希望本译著的出版能够为该领域的学科发展贡献绵薄之力。本书的出版得到了中国人民解放军战略支援部队信息工程大学优秀青年基金项目(编号 2016603201)及“2110 工程”建设项目(编号 102063)的资助。

本书的翻译工作由中国人民解放军战略支援部队信息工程大学信息系统工程学院王鼎、王建辉、沈彩耀、尹洁昕共同完成，并由王鼎完成最终统稿，尹洁昕完成校对。

限于译者的水平，书中难免存在不足之处，恳请各位专家学者批评指正。

王 鼎

2018 年 5 月

原 书 序

这是一部面向工程的数学著作，主要研究如何计算复函数关于复矩阵变量的导数，其中的函数形式可以是标量、向量或者矩阵。书中所描述的复矩阵求导理论对于从事信号处理和通信领域的研究人员和工程师来说非常有价值。本书提出的复矩阵求导理论既适用于对元素相互独立的矩阵(即无结构矩阵)进行求导，也可以对元素彼此相关的矩阵(即结构化矩阵)进行求导，书中还列举很多具有代表性的实例，用以解释如何获得复导数。本书将一些重要的结论总结在表格中。此外，书中还列举若干源自实际研究课题的实例，用以阐述如何通过复矩阵求导这一数学工具解决信号处理和通信领域中的研究问题。

对于信号处理、通信以及其他相关领域的研究生、科研人员、工程技术人员及大学教授来说，本书是非常适用的，尤其适用于研究以复矩阵为参量的课题。本书旨在系统性地提出复矩阵求导这一数学工具，以帮助读者解决其研究领域中的难题。根据问题性质的不同，复矩阵变量中的各个元素之间可能相互独立，也可能存在一定的相关性，前者为无结构矩阵，后者为结构化矩阵。本书把对无结构矩阵的求导结果称为复矩阵导数，而把对结构化矩阵的求导结果称为广义复矩阵导数。科研人员和工程技术人员可以利用书中的理论和方法对以复矩阵为参量的系统进行优化。此外，本书的理论还可用于对以复矩阵为变量的实函数进行优化。科研人员可以利用书中的理论和方法对复参数进行优化，因此本书对于研究和发展新型信号处理和通信系统来说是非常有价值的。

全书共 7 章。第 1 章是引言，内容较为简短。第 2 章介绍书中所需的数学背景知识。第 3 章定义复微分以及复导数，并且证明一些重要的结论。第 4 章通过若干实例向读者阐述如何计算 9 类函数的复导数，这 9 类函数及其自变量的类型包括标量、向量及矩阵。第 5 章研究二阶复导数，其中描述如何计算变量为无结构矩阵的标量、向量及矩阵函数的 Hessian 矩阵。第 6 章提出广义复矩阵求导理论，该理论描述如何对属于某个特定矩阵集合(如 Hermitian 矩阵)的复矩阵变量进行求导。第 7 章给出一些应用实例，旨在阐述如何利用书中的理论解决信号处理和通信领域中的研究问题。除了第 1 章以外，每一章都至少包含 11 个与其内容相关的习题。网站 www. cambridge. org/hjorungnes 提供了这些习题的全部解答过程。

欢迎广大读者针对本书给出评论和建议。

致　谢

早在攻读博士学位期间，我就已开始从事复矩阵求导领域的研究工作，因此首先要感谢我的博士生导师——挪威科技大学的 Tor A.Ramstad 教授。感谢他对我的悉心指导，尤其是引导我进入复矩阵求导这一研究领域。我在赫尔辛基理工大学和奥斯陆大学从事博士后研究期间，进一步深化了在复矩阵求导领域的研究工作，并逐渐萌生出撰写本书的念头，事实上其中的相关工作早在 2008 年初就已经开展。

感谢剑桥大学出版社为我提供的帮助，尤其要感谢 Phil Meyler 博士为我提供了在剑桥大学出版社出版本书的平台，还要感谢剑桥大学出版社助理编辑 Sarah Finlay 对出版本书给予的帮助。

感谢休斯敦大学的 Zhu Han 教授对本书提供的建议，尤其要感谢在休斯敦大学访学期间(2008 年 12 月)Zhu Han 教授为我提供的帮助。感谢里约热内卢联邦大学的 Paulo S.R.Diniz 教授对本书提出的建议。感谢法国 Eurécom 研究中心的 David Gesbert 教授和香港科技大学的 Daniel P. Palomar 教授帮助我组织本书部分章节的内容，他们在本书写作的早期阶段提供了有价值的建议。感谢阿尔托大学理工学院的 Visa Koivunen 教授，他建议收集有关复矩阵求导的文献，并且对于如何组织这些资料提供了非常有价值的意见。感谢 Kenneth Kreutz-Delgado 教授，2009 年 12 月我在圣地亚哥加利福尼亚大学访学期间，与其进行了一些有意义的讨论，Kenneth Kreutz-Delgado 教授给我提供了一些参考文献。感谢 Per Christian Moan 博士针对书中的一些主题和我展开讨论，成果令人鼓舞。感谢奥斯陆大学的 Hans Brodersen 教授和 John Rognes 教授，他们为我提供了一些关于流形的参考资料。

感谢我研究团队里的博士后和博士研究生，以及在本书写作期间来我研究团队进行访问的学者，他们帮助我发现书中的一些错误，并且改进了其中的内容，尤其要感谢 Ninoslav Marina 博士帮助我发现了一些印刷错误。感谢印度理工学院德里分校的 Manav R.Bhatnagar 教授、南洋理工大学的 Dusit Niyato 教授、Xiangyun Zhou 博士以及 David K. Choi 博士为本书提供的宝贵建议。另外，还

要感谢 Martin Makundi、Marius Sîrbu 博士、Timo Roman 博士以及 Traian Abrudan 博士纠正了本书初稿的一些错误。

最后，还要感谢我的家人和朋友，在撰写本书的过程中他们给予了我很大的支持。

Are HjØrungnes

缩　写　词

BER	bit error rate	误比特率
CDMA	code division multiple access	码分多址
CFO	carrier frequency offset	载波频偏
DFT	discrete Fourier transform	离散傅里叶变换
FIR	finite impulse response	有限冲激响应
LTI	linear time-invariant	线性时不变
MIMO	multiple-input multiple-output	多输入多输出
MLD	maximum likelihood decoding	最大似然译码
MSE	mean square error	均方误差
M-PAM	multiple pulse amplitude modulation	多进制脉幅调制
M-PSK	multiple phase shift keying	多相移键控
M-QAM	multilevel quadrature amplitude modulation	电平正交幅度调制
OFDM	orthogonal frequency-division multiplexing	正交频分复用
OSTBC	orthogonal space-time block code	正交空时分组码
SER	symbol error rate	误码率
SISO	single-input single-output	单输入单输出
SNR	signal-to-noise ratio	信噪比
SVD	singular value decomposition	奇异值分解
TDMA	time division multiple access	时分多址

符 号 说 明

$\otimes$	Kronecker 积
$\odot$	Hadamard 积
$\overset{\text{def}}{=}$	定义为
$\subseteq$	子集
$\subset$	真子集
$\wedge$	逻辑与
$\forall$	任意
$\sum$	累加求和
$\prod$	乘积
$\times$	笛卡儿积
$\int$	积分
$\leqslant$	小于或等于
$<$	严格小于
$\geqslant$	大于或等于
$>$	严格大于
$\succeq$	$\boldsymbol{S}\succeq\boldsymbol{O}_{N\times N}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{S}$ 是半正定矩阵
∞	无穷大
$\neq$	不等于
$\mid$	使得
$\lvert\cdot\rvert$	①$\lvert z\rvert\geqslant 0$ 表示标量 $z\in\mathbf{C}$ 的绝对值；②$\lvert\boldsymbol{z}\rvert\in(\mathbf{R}^{+}\cup\{0\})^{N\times 1}$ 表示由向量 $\boldsymbol{z}\in\mathbf{C}^{N\times 1}$ 的绝对值所构成的列向量；③$\lvert\mathbf{A}\rvert$ 表示集合 $\mathbf{A}$ 的基数
$\angle(\cdot)$	①$\angle z$ 表示标量 z 的主相角；②$\angle\boldsymbol{z}\in(-\pi,\pi]^{N\times 1}$ 表示由向量 $\boldsymbol{z}\in\mathbf{C}^{N\times 1}$ 的主相角所构成的列向量
$\sim$	统计分布服从于
$\boldsymbol{O}_{M\times N}$	$M\times N$ 阶全 0 矩阵

$\boldsymbol{1}_{M\times N}$	$M\times N$ 阶全 1 矩阵
$(\cdot)^*$	$\boldsymbol{Z}^*$ 表示矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 的共轭矩阵
$\varnothing$	空集
$\backslash$	集合差
$(\cdot)^{-1}$	矩阵的逆
$\vert\cdot\vert^{-1}$	$\vert\boldsymbol{z}\vert^{-1}$ 表示由向量 $\boldsymbol{z}\in\{\mathbf{C}\backslash\{0\}\}^{N\times 1}$ 的绝对值的倒数所构成的列向量(其结果属于 $\{\mathbf{R}^+\}^{N\times 1}$)
$(\cdot)^\dagger$	矩阵的 Moore-Penrose 逆
$(\cdot)^\#$	伴随矩阵
$\mathbf{C}$	复数集合
$\mathbf{C}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间
$\mathbf{CN}$	复正态分布
$\mathbf{N}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间
$\mathbf{R}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行空间
$\delta_{i,j}$	含有两个自变量 i 和 j 的 Kronecker delta 函数
$\delta_{i,j,k}$	含有 3 个自变量 i、j 及 k 的 Kronecker delta 函数
$\lambda_{\max}(\cdot)$	Hermitian 矩阵的最大特征值
$\lambda_{\min}(\cdot)$	Hermitian 矩阵的最小特征值
μ	拉格朗日乘子
$\nabla_{\boldsymbol{Z}} f$	函数 f 关于 $\boldsymbol{Z}^*$ 的梯度，若 $\boldsymbol{Z}\in\mathbf{C}^{N\times Q}$ ，则有 $\nabla_{\boldsymbol{Z}} f\in\mathbf{C}^{N\times Q}$
$\dfrac{\partial}{\partial z}$	关于 z 的形式导数，其定义为 $\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-\mathrm{j}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$
$\dfrac{\partial}{\partial z^*}$	关于 z^* 的形式导数，其定义为 $\dfrac{\partial}{\partial z^*}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathrm{j}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$
$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{Z}}$	函数 f 关于 $\boldsymbol{Z}$ 的梯度，若 $\boldsymbol{Z}\in\mathbf{C}^{N\times Q}$ ，则有 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{Z}}\in\mathbf{C}^{N\times Q}$
$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}^*)}{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}}$	向量函数 $\boldsymbol{f}:\mathbf{C}^{N\times 1}\times\mathbf{C}^{N\times 1}\to\mathbf{C}^{M\times 1}$ 关于行向量 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}$ 的形式导数，并且有 $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}^*)}{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}}\in\mathbf{C}^{M\times N}$

$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}^*)}{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}}$	向量函数 $\boldsymbol{f}:\mathbf{C}^{N\times 1}\times\mathbf{C}^{N\times 1}\to\mathbf{C}^{M\times 1}$ 关于行向量 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}$ 的形式导数，且有 $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}^*)}{\partial \boldsymbol{z}^{\mathrm{H}}}\in\mathbf{C}^{M\times N}$
π	圆周率，$\pi\approx 3.14159265358979323846$
a_i	向量 $\boldsymbol{a}$ 中的第 i 个元素
$a_{k,l}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中位于坐标 (k,l) 处的元素
$\{a_0,a_1,\cdots,a_{N-1}\}$	包含 N 个元素 $a_0,a_1,\cdots,a_{N-1}$ 的集合
$[a_0\ \ a_1\ \ \cdots\ \ a_{N-1}]$	阶数为 $1\times N$ 的行向量，其中第 i 个元素为 a_i
$a\cdot b$, $a\times b$	a 和 b 的乘积
$\Vert\boldsymbol{a}\Vert$	向量 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{C}^{N\times 1}$ 的欧氏范数，即有 $\Vert\boldsymbol{a}\Vert=\sqrt{\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a}}$
$\boldsymbol{A}^{\odot k}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次 Hadamard 积
$\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}$	可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵的转置，即有 $\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$
$[\boldsymbol{A}]_{k,:}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的第 k 行向量
$[\boldsymbol{A}]_{:,k}=\boldsymbol{a}_k$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的第 k 列向量
$[\boldsymbol{A}]_{k,l}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中位于坐标 (k,l) 处的元素，即有 $[\boldsymbol{A}]_{k,l}=a_{k,l}$
$\Vert\boldsymbol{A}\Vert_{\mathrm{F}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{N\times Q}$ 的 Frobenius 范数，即有 $\Vert\boldsymbol{A}\Vert_{\mathrm{F}}=\sqrt{\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\}}$
$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$	集合 $\mathbf{A}$ 和集合 $\mathbf{B}$ 的笛卡儿积，即有 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\{(a,b)\mid a\in\mathbf{A},b\in\mathbf{B}\}$
arctan	反正切函数
arg min	使目标函数最小化的最优解
$c_{k,l}(\boldsymbol{Z})$	矩阵 $\boldsymbol{Z}\in\mathbf{C}^{N\times N}$ 的第 (k,l) 个代数余子式
$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Z})$	矩阵 $\boldsymbol{Z}\in\mathbf{C}^{N\times N}$ 的全部代数余子式所构成的 $N\times N$ 阶矩阵
d	微分运算符
$\mathrm{D}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{F}$	矩阵函数 $\boldsymbol{F}$ 关于矩阵变量 $\boldsymbol{Z}$ 的复矩阵导数
$\boldsymbol{D}_N$	阶数为 $N^2\times N(N+1)/2$ 的复制矩阵
$\det(\cdot)$	矩阵的行列式
$\dim_{\mathbf{C}}\{\cdot\}$	空间的复维度

$\dim_{\mathbf{R}}\{\cdot\}$	空间的实维度
$\mathrm{diag}(\cdot)$	由列向量构成的对角矩阵
e	自然对数的底， $\mathrm{e}\approx 2.71828182845904523536$
$\mathrm{E}[\cdot]$	数学期望
$\mathrm{e}^{z}=\exp(z)$	复标量 z 的复指数函数
$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle \boldsymbol{z}}$	若 $\boldsymbol{z}\in\mathbf{C}^{N\times 1}$ ，则有 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle \boldsymbol{z}}\overset{\mathrm{def}}{=}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle z_0}\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle z_1}\quad\cdots\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle z_{N-1}}]^{\mathrm{T}}$ ，其中 $\angle z_i\in(-\pi,\pi]$ 表示 z_i 的主相角
$\exp(\boldsymbol{Z})$	复指数矩阵函数，其自变量 $\boldsymbol{Z}$ 为复方阵
$\boldsymbol{e}_i$	$\mathbf{C}^{N\times 1}$ 中的标准基向量
$\boldsymbol{E}_{i,j}$	$\boldsymbol{E}_{i,j}=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^{N\times N}$
$\boldsymbol{E}_{-}$	以 $\{\boldsymbol{E}(k)\}_{k=0}^{m}$ 为系数的 FIR-MIMO 滤波器的行扩展矩阵(阶数为 $M_{\mathrm{t}}\times(m+1)N$)，其中 $\boldsymbol{E}(k)\in\mathbf{C}^{M_{\mathrm{t}}\times N}$
$\boldsymbol{E}_{\mid}$	以 $\{\boldsymbol{E}(k)\}_{k=0}^{m}$ 为系数的 FIR-MIMO 滤波器的列扩展矩阵(阶数为 $(m+1)M_{\mathrm{t}}\times N$)，其中 $\boldsymbol{E}(k)\in\mathbf{C}^{M_{\mathrm{t}}\times N}$
$\boldsymbol{E}_{\urcorner}^{(l)}$	以 $\{\boldsymbol{E}(k)\}_{k=0}^{m}$ 为系数的 FIR-MIMO 滤波器的 l 阶行对角扩展矩阵(阶数为 $(l+1)M_{\mathrm{t}}\times(m+l+1)N$)，其中 $\boldsymbol{E}(k)\in\mathbf{C}^{M_{\mathrm{t}}\times N}$
$\boldsymbol{E}_{\llcorner}^{(l)}$	以 $\{\boldsymbol{E}(k)\}_{k=0}^{m}$ 为系数的 FIR-MIMO 滤波器的 l 阶列对角扩展矩阵(阶数为 $(m+l+1)M_{\mathrm{t}}\times(l+1)N$)，其中 $\boldsymbol{E}(k)\in\mathbf{C}^{M_{\mathrm{t}}\times N}$
f	复标量函数
$\boldsymbol{f}$	复向量函数
$\boldsymbol{F}$	复矩阵函数
$\boldsymbol{F}_N$	$N\times N$ 阶 DFT 逆变换矩阵
$f:X\to Y$	自变量为 X 、应变量为 Y 的函数
$(\cdot)^{\mathrm{H}}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置
$\mathrm{H}_{\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2}f$ 或 $\mathrm{H}_{\tilde{\boldsymbol{z}}_1,\tilde{\boldsymbol{z}}_2}f$	标量函数的 Hessian 矩阵
$\mathrm{H}_{\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2}\boldsymbol{f}$ 或 $\mathrm{H}_{\tilde{\boldsymbol{z}}_1,\tilde{\boldsymbol{z}}_2}\boldsymbol{f}$	向量函数的 Hessian 矩阵

$\mathrm{H}_{\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2}\boldsymbol{F}$ 或 $\mathrm{H}_{\tilde{z}_1,\tilde{z}_2}\boldsymbol{F}$	矩阵函数的 Hessian 矩阵
$H(\boldsymbol{x})$	$\boldsymbol{x}$ 的微分熵
$H(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y})$	当 $\boldsymbol{y}$ 给定时，$\boldsymbol{x}$ 的条件微分熵
$I(\boldsymbol{x}\,;\boldsymbol{y})$	$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的互信息
$\boldsymbol{I}$	单位矩阵
$\boldsymbol{I}_p$	$p\times p$ 阶单位矩阵
$\boldsymbol{I}_N^{(k)}$	$N\times N$ 阶矩阵，并且其第 k 个对角线中的元素等于 1，其余元素均为 0，矩阵对角线的序号是从 $N-1$ 至 $-(N-1)$ 依次排序，其中 $N-1$ 对应最左下角的对角线，而 $-(N-1)$ 对应最右上角的对角线，主对角线对应的序号为 0
$\mathrm{Im}\{\cdot\}$	虚部
j	虚数单位
$\boldsymbol{J}$	$MN\times MN$ 矩阵，其斜主对角块中的元素均为 $N\times N$ 阶单位矩阵，其余元素均为 0，即有 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_M\otimes\boldsymbol{I}_N$
$\boldsymbol{J}_N$	$N\times N$ 阶斜单位矩阵，即在其斜主对角线中的元素均为 1，其余元素均为 0
$\boldsymbol{J}_N^{(k)}$	$N\times N$ 阶矩阵，并且其第 k 个斜对角线中的元素等于 1，其余元素均为 0，矩阵斜对角线的序号是从 $N-1$ 至 $-(N-1)$ 依次排序，其中 $N-1$ 对应最左上角的斜对角线，而 $-(N-1)$ 对应最右下角的斜对角线，斜主对角线对应的序号为 0
$\mathbf{K}^{N\times Q}$	数域 $\mathbf{K}$ 中的 $N\times Q$ 维向量空间，这里的数域 $\mathbf{K}$ 可以是实数域 $\mathbf{R}$，也可以是复数域 $\mathbf{C}$
$\boldsymbol{K}_{Q,N}$	$NQ\times NQ$ 阶置换矩阵
L	拉格朗日函数
$\boldsymbol{L}_\mathrm{d}$	$N^2\times N$ 阶矩阵，用于将矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{N\times N}$ 主对角线中的元素放入向量 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{A})$ 中
$\boldsymbol{L}_\mathrm{l}$	$N^2\times N(N-1)/2$ 阶矩阵，用于将矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{N\times N}$ 的主对角线下方的元素放入向量 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{A})$ 中
$\boldsymbol{L}_\mathrm{u}$	$N^2\times N(N-1)/2$ 阶矩阵，用于将矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{N\times N}$ 的主对

	角线上方的元素放入向量 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{A})$ 中
$\lim_{z\to a} f(z)$	当 z 趋于 a 时，$f(z)$ 的极限
$\ln(z)$	标量 $z\in\mathbf{C}$ 的自然对数的主值
$m_{k,l}(\boldsymbol{Z})$	矩阵 $\boldsymbol{Z}\in\mathbf{C}^{N\times N}$ 的第 (k,l) 个余子式
$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{Z})$	矩阵 $\boldsymbol{Z}\in\mathbf{C}^{N\times N}$ 的全部余子式所构成的 $N\times N$ 阶矩阵
max	最大值
min	最小值
$\mathbf{N}$	自然数集合，即有 $\{0,1,2,3,\cdots\}$
$n!$	n 的阶乘，即有 $n!=\prod_{i=1}^{n} i=1\times2\times3\times\cdots\times n$
$\boldsymbol{P}_N$	$N\times N$ 阶基本循环矩阵，仅在其主对角线上方第一条对角线中的元素以及最左下角的元素为 1，其余元素均为 0
$\mathbf{R}$	实数集合
$\mathbf{R}^+$	正实数集合 $(0,\infty)$
$\mathrm{rank}(\cdot)$	矩阵的秩
$\mathrm{Re}\{\cdot\}$	实部
$(\cdot)^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\mathbf{T}^{(k)}\{\cdot\}$	优化设计 FIR-MIMO 发射滤波器时所使用的线性运算
$\mathrm{Tr}\{\cdot\}$	方阵的迹
$\boldsymbol{v}(\cdot)$	将矩阵主对角线及其下方的元素按照列的顺序自上而下、自左而右依次排成列向量
$\mathrm{vec}(\cdot)$	向量化运算，将矩阵的列依次堆栈成列向量
$\mathrm{vec_d}(\cdot)$	向量化运算，将矩阵左上角到右下角的全部主对角线中的元素依次排成列向量
$\mathrm{vec_l}(\cdot)$	向量化运算，将矩阵主对角线下方的元素按照列的顺序自上而下、自左而右依次排成列向量
$\mathrm{vec_u}(\cdot)$	向量化运算，将矩阵主对角线上方的元素按照行的顺序自左而右、自上而下依次排成列向量
$\mathrm{vecb}(\cdot)$	块状向量化运算，将矩阵中的方阵块依次堆栈成一个长的块状列矩阵
$\boldsymbol{V}$	$N(N+1)/2\times N(N+1)/2$ 阶置换矩阵，并且有 $\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{V}_{\mathrm{d}}\ \ \boldsymbol{V}_{\mathrm{l}}]$

$\boldsymbol{V}_{\mathrm{d}}$	$N(N+1)/2\times N$ 阶矩阵，用于将 $\mathrm{vec}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{A})$ 中的元素放入向量 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{A})$ 中，其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{N\times N}$ 是对称矩阵
$\boldsymbol{V}_{\mathrm{l}}$	$N(N+1)/2\times N(N-1)/2$ 阶矩阵，用于将 $\mathrm{vec}_{\mathrm{l}}(\boldsymbol{A})$ 中的元素放入向量 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{A})$ 中，其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{N\times N}$ 是对称矩阵
$\mathbf{W}$	结构化矩阵集合，也称为流形
$\mathbf{W}^*$	结构化矩阵的共轭矩阵的集合，即有 $\mathbf{W}^*\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{\boldsymbol{W}^*\mid\boldsymbol{W}\in\mathbf{W}\}$
$\boldsymbol{W}$	表示流形中的矩阵，即有 $\boldsymbol{W}\in\mathbf{W}$
$\tilde{\boldsymbol{W}}$	结构化矩阵 $\boldsymbol{W}$ 对应的无结构形式，其阶数与矩阵 $\boldsymbol{W}$ 相同
$[x_0, x_1]$	表示集合 $\{x\mid x_0\leqslant x\leqslant x_1\}$ 的闭区间
$(x_0, x_1]$	表示集合 $\{x\mid x_0< x\leqslant x_1\}$ 的半开区间
(x_0, x_1)	表示集合 $\{x\mid x_0< x< x_1\}$ 的开区间
$\boldsymbol{x}(n)_{\mid}^{(v)}$	向量 $\boldsymbol{x}(n)\in\mathbf{C}^{N\times 1}$ 的列扩展向量，其阶数为 $(v+1)N\times 1$
$\mathbf{Z}$	整数集合，即有 $\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$
$\mathbf{Z}_N$	集合 $\{0,1,\cdots,N-1\}$
z	复标量变量
$\boldsymbol{z}$	复向量变量
$\boldsymbol{Z}$	复矩阵变量
$\boldsymbol{Z}_2^{m\times n}$	$m\times n$ 阶矩阵，矩阵中的元素非 0 即 1