CRC Press
Taylor & Francis Group

国外优秀数学教材系列

A Geometry Toolbox

实用线性代数

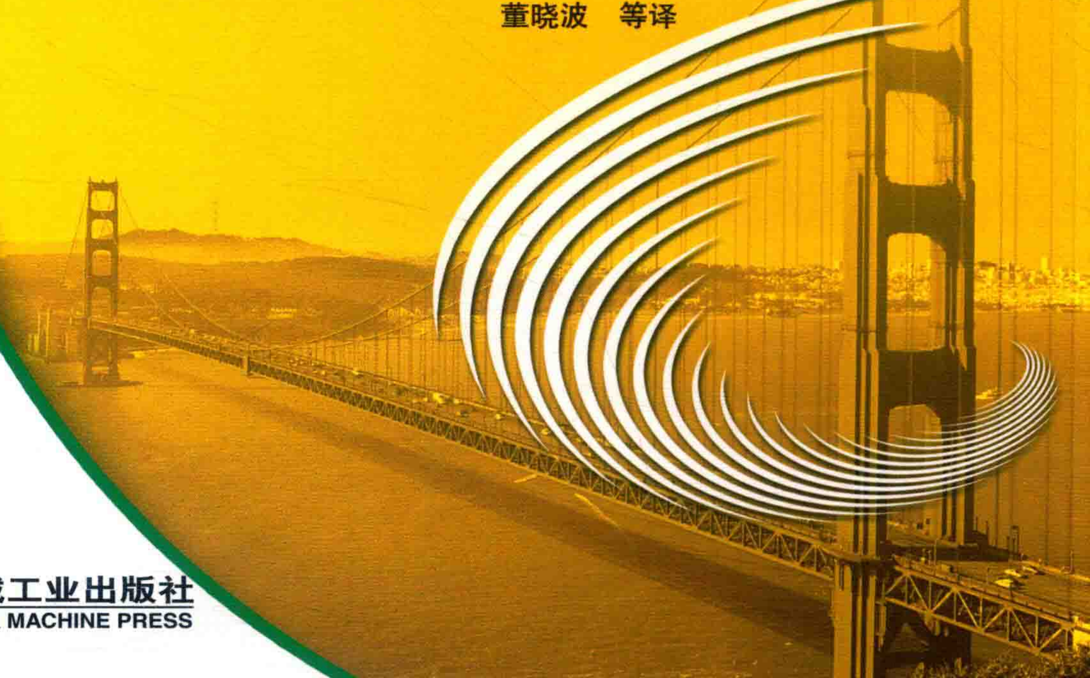
（翻译版·原书第3版）

Practical Linear Algebra

图解版

[美] 法林·杰拉德（Gerald Farin）
汉斯福德·戴安娜（Dianne Hansford） 著

董晓波 等译



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

国外优秀数学教材系列

实用线性代数
（翻译版·原书第3版）

［美］法林·杰拉德（Gerald Farin）
汉斯福德·戴安娜（Dianne Hansford） 著

董晓波　高从燕　王　慧　译

机械工业出版社

Practical Linear Algebra: A Geometry Toolbox Third Edition/by Gerald Farin, Dianne Hansford/ISBN: 9781466579569

图书在版编目（CIP）数据

实用线性代数：翻译版：原书第 3 版/（美）法林·杰拉德（Gerald Farin），（美）汉斯福德·戴安娜（Dianne Hansford）著；董晓波，高从燕，王慧译．—北京：机械工业出版社，2018.10
书名原文：Practical Linear Algebra：A Geometry Toolbox
国外优秀数学教材系列
ISBN 978-7-111-61411-1

Ⅰ.①实…　Ⅱ.①法…　②汉…　③董…　④高…　⑤王…　Ⅲ.①线性代数－高等学校－教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 260990 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：汤　嘉　责任编辑：汤　嘉　李　乐　王玉鑫
责任校对：王明欣　封面设计：张　静
责任印制：张　博
三河市宏达印刷有限公司印刷
2018 年 12 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm·22.25 印张·1 插页·541 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-61411-1
定价：89.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010－88379833	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010－88379649	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金 书 网：www.golden－book.com

本书区别于以往线性代数的书籍，内容新颖，编排独特. 作者以几何视角讲述线性代数，通过二维平面和三维空间中的例子解释线性代数中的各种概念和性质. 本书强调直观性以及知识点的背景，结合计算机中各种图形的变换来理解线性变换，在注重可读性的同时突出数学的基本思想，将直观图形与数学证明进行巧妙的结合. 作者在书页侧边空白处手绘 200 余幅示意图，并给出了相关概念的解释，以便更好地帮助读者理解.

全书共 20 章，第 1 ~ 7 章介绍了二维背景下线性代数的基础内容，而三维背景下相关的概念及内容在第 8 ~ 11 章做了介绍. 第 12 ~ 16 章介绍了许多应用以及更高维度的内容. 第 17 ~ 19 章介绍了三角形、多边形和二次曲线及实际应用. 第 20 章介绍了各种线性代数素材应用于曲线设计与曲线分析的技巧.

本书可供非数学类专业的学生及数学爱好者使用，亦可作为数学专业学生和教师的参考用书.

译　者　序

线性问题存在于科学技术的各个领域，某些非线性问题在一定条件下，也可以转化为线性问题进行讨论. 线性代数研究的是代数学中线性关系的经典理论，其理论及方法广泛地应用于各个学科. 它是高等院校重要的公共基础数学课之一，一般非文科非数学专业都将其作为重要的基础课程. 随着计算机技术的发展，该课程的作用也愈加明显.

通过线性代数课程的学习，学生可以掌握线性代数的基本理论及方法，得到系统的解决线性问题能力的训练，进而支撑后续课程的学习，可以培养逻辑思维能力、空间想象能力和计算能力，可以熟练应用其方法解决实际问题.

一直以来，由于受到苏联教科书的影响，一般教材内容的展示顺序基本都是行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换、线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵、二次型、线性空间与线性变换. 这种编排顺序使线性代数的教材体系显得生硬，脉络不清晰. 由于过分注重内容表述的数学化，线性代数的内容显得抽象，给人以从定理到定理的感觉，缺乏具象. 由于推崇证明、偏重计算技巧的训练，学习者将大量的精力消耗在了复杂证明计算的“泥潭”里. 忽视内容的实际应用，导致学习者感受不出对后续课程学习的支撑，更没法知道线性代数在实际中的重要应用.

近年来，国内线性代数教材也开始了从切入的视角上、叙述的顺序上、内容的介绍上、应用的背景上、多媒介的辅助上、软件的引入上的变革，但是线性代数教材的变革还有很长的路要走.

杰拉德博士是亚利桑那州立大学计算机科学的教授，国际知名几何建模的领军人物. 他在 20 世纪 70 年代就开始了几何建模及计算机图形学方面的研究. 20 世纪 80 年代，他在计算机辅助几何设计（CAGD）领域取得了突出的成就，得到了国际公认. 他自 1987 年起在亚利桑那州立大学任教和从事研究，还曾经担任了 20 年的《计算机辅助几何设计》杂志的联合主编，也是工业和应用数学学会（Siam）出版物的主编. 在大学，他讲授初级和高级计算机辅助几何设计、计算机科学理论和信息学. 他于 2016 年 1 月 14 日去世.

由杰拉德、戴安娜夫妇合著的《实用线性代数》第 1 版于 1998 年出版，第 2 版于 2005 年出版. 该书的出版，引起了人们的广泛关注. 本书翻译的是《实用线性代数》的第 3 版.

本书不同于其他的线性代数教材，它以全新的视角，从直观的几何观点讲述了线性代数，而对于数学证明，则以导入、例子或图形的形式进行了替换. 本书涵盖了传统本科线性代数的所有知识，但它并没有按照传统的方式进行教学，而是更多地倾向于实例和以应用为导向，以直观的、几何的方式呈现素材. 本书填补了线性代数教科书领域的空白. 你如果初次学习线性代数，这本书会让你沉浸其中，很自然地掌握所有的知识点；你如果曾经学过线性代数，阅读本书，它会让你恍然大悟：哦！原来这些内容是这

么来的！原来这些内容是这么用的！原来线性代数的这些知识点竟然有着这样的联系！

本书是面向本科院校教学使用的，也可以作为数学爱好者，工程师或高等院校非文科、非数学专业学生线性代数知识的介绍. 它是计算机图形学和几何建模理想的前序教材. 对于数学专业的学生而言，它也是一个非常好的线性代数入门教材.

翻译创作追求“信、达、雅”的境界，数学内容的翻译尤为困难. 译者在翻译本书时，准确把握原意是首要的，因此在科学性上，译者力求忠实于原著. 在语言的表达上，由于各人的欣赏视角不同，因而译者除了考虑原著叙述的风格，尽量兼顾汉语的行文习惯，做到通俗易懂.

本书由董晓波、高从燕、王慧翻译，由董晓波教授统稿，由李存华教授、岳勤教授、张滦云教授校译.

本书的完成离不开同仁们的帮助，在此深表谢意！感谢李纪明教授、吴和成教授、杨长青教授和薄丽玲老师等的支持. 还要感谢参加整理资料的袁金诚、郁佳冬、张颖、刘小白等.

由于译者水平有限，加之时间仓促，书中定有不少缺点和疏漏之处，敬请各位专家和读者能够提出宝贵的意见和建议，也欢迎通过电子邮箱 dongxiaobo@ 126. com 联系我们进行交流.

董晓波

前　言

几乎每个人都看过动画电影，如《玩具总动员》或《怪物史瑞克》，或者知晓常见的三维计算机游戏．享受3D娱乐听起来比学习一本线性代数的书籍更加有趣．但正是由于线性代数，那些电影和游戏才能被带到电视或计算机的屏幕上来．当你看到一个个字符移动着呈现在屏幕上时，这个动画电影所使用的一些连续方程就出自于本书的内容．从这个意义上说，线性代数是新的数字世界的驱动力，是现代视觉娱乐和通信事业的基础，更为它们的发展提供了创新的动力．

但这并不是一本关于现代视觉娱乐的书．我们现在开始学习一些基本的线性代数原理并尝试进行各种应用．对于数学证明，我们以导入、例子或图形的形式进行了替换，因此不会太过枯燥．对于一个刚开始学习的学生，这将引导他进行更深层次的理解而不仅是掌握标准的定理证明方法．本书涵盖了传统的本科线性代数的所有知识，但并不按照传统的方式进行教学．因为它更多地倾向于以实例和应用为导向，因此，我们将书名定为《实用线性代数（Practical Linear Algebra）》，或简称为PLA．

本书为图解版，是为了着重强调我们是从几何和算法上来着手处理线性代数的．目的是使本书的素材贴近广大读者，使得一些非数学专业的工程师和科学家们通过我们的细致讲解对古典的线性代数课程变得更感兴趣．因此，我们立志填补线性代数教科书此领域的空白．我们认为，本书已经实现了以直观的、几何的方式呈现素材的目标，并且保留了线性代数传统的观念和方法．

主题综述

如前所述，我们的目标明确，为了便于读者记住知识，编写本书时选用的素材都是现实中的. 以我们的经验，接触素材先从二维平面然后再到三维空间，可以增加可视性并且也容易理解. 第 1 ~7 章介绍了在二维情形下线性代数的基础内容. 这些概念在第 8 ~11 章的三维情形下又做了重新介绍. 与二维领域没有联系的这些三维领域自有的概念也在此探讨.

第 12 ~16 章介绍线性代数在现实生活中的许多应用，以及抽象思维发展所必需的更高维度的内容. 这些章节的重点包括解线性方程组（高斯消元法、LU 分解法、豪斯霍尔德法以及迭代法）、行列式、逆矩阵、矩阵，再讨论“特征”、线性空间、内积和高斯 - 施密特过程. 奇异值分解、广义逆、主成分分析是新增加的内容.

在第 19 章中所讨论的二次曲线，是一类基础的几何体，从它们发展以来，就为仿射映射提供了极好的应用，“特征”、对称矩阵，它们真的值得一读. 在第 17 章的三角形和第 18 章的多边形后，讨论了基本几何实体，因为它们在计算机生成图像方面是很重要的内容.

有些章有一个“应用”的部分，介绍了迄今为止开发工具在现实世界的运用. 我们一直在努力尝试选择应用领域，尽量避免读者阅读深层次的以及特定领域的专业术语. 整个第 20 章可以看成是关于应用的一章. 这一章将介绍各种线性代数素材应用于曲线设计与曲线分析的技巧.

书中的插图有两种形式：常规图和素描图. 常规图是计算机生成的，而且往往是复合的. 素描图是手绘的，为了说明概念的核心. 两者都是杰出的教学和自学工具！我们都可以在本书的网站 http://www.farinhansford.com/books/pla/上获取. 许多图使用的补充说明都是容易理解的几何直观的数学语言.

在每一章的结尾，我们列了一个主题清单，这就是你应该知道的（What You Should Know，WYSK），左边是图标标记. 这个清单的目的是概述每章的要点. 一个主题出现在一个以上的章节中并不少见. 我们有不止一次地努力重温一些关键内容的想法. 对于记忆而言，重复是有益的！

在每章末我们都列出了习题，附录 B 给出了部分习题的答案. 关于所有答案的指导和说明都能在本书的网站上找到.

附录 A 提供了一个范围广泛的词汇表，可以作为一个查询工具. 在我们给出的简明定义中并没有方程，这是为了适应现在课本里的不同描述. 另外，有效的索引同样值得重视，因为我们希望对读者有帮助，特别是在我们重新回顾整个课本主题的时候.

教学中的使用

本书的授课人群照理来说应该是在本科及以上水平. 它也可以作为工程师或计算机科学家使用线性代数的参考，同样可以作为几何学的一般介绍. 它也是计算机图形学和

几何建模的一个理想的前序教材. 我们认为，对于数学专业的学生而言，它也是一本完美的线性代数入门教材.

作为一个学期的课程，我们建议选择一部分内容，以满足学生的需要. 在下面的表格中，LA 指的是线性代数课程的入门内容，CG 是针对那些计划在计算机图形学和几何建模中工作的人员学习的内容.

章	LA	CG
第 1 章　笛卡儿的发现	·	·
第 2 章　无处不在：二维平面中的点和向量	·	·
第 3 章　排列起来：二维平面上的直线		·
第 4 章　形状变化：二维平面中的线性映射	·	·
第 5 章　2×2 线性方程组	·	·
第 6 章　在周围移动：二维平面上的仿射映射	·	·
第 7 章　特征	·	
第 8 章　三维空间中的几何	·	·
第 9 章　三维空间中的线性映射	·	·
第 10 章　三维空间中的仿射映射	·	·
第 11 章　三维空间中的相交		·
第 12 章　高斯消元法解线性方程组	·	·
第 13 章　方程组的替代算法	·	
第 14 章　一般线性空间	·	
第 15 章　特征问题的再讨论	·	
第 16 章　奇异值分解	·	
第 17 章　分解：三角形		·
第 18 章　直线组合：折线和多边形		·
第 19 章　圆锥曲线		·
第 20 章　曲线		·

本书网站

http：//www. farinhansford. com/books/pla/

网站提供的内容：

- 讲义
- 补充素材
- 本书插图的补充说明
- 数学软件代码
- 勘误表
- 更多的内容！

杰拉德、戴安娜

2013 年 3 月

于亚利桑那州立大学

目　　录

译者序

前言

主题综述

第 1 章　笛卡儿的发现 …… 1

1.1　二维平面中的局部坐标和整体坐标 …… 2

1.2　从整体到局部的转化 …… 5

1.3　三维空间中的局部坐标与整体坐标 …… 6

1.4　单位框外一点坐标的转换 …… 7

1.5　应用：创建坐标 …… 8

1.6　习题 …… 9

第 2 章　无处不在：二维平面中的点和向量 …… 11

2.1　点和向量 …… 11

2.2　点和向量的区别 …… 13

2.3　向量场 …… 15

2.4　向量的长度 …… 16

2.5　点的组合 …… 18

2.6　线性无关 …… 20

2.7　点积 …… 21

2.8　正交投影 …… 24

2.9　不等式 …… 24

2.10　习题 …… 26

第 3 章　排列起来：二维平面上的直线 …… 28

3.1　定义一条直线 …… 28

3.2　直线的参数方程 …… 29

3.3　直线的隐式方程 …… 30

3.4　直线的显式方程 …… 33

3.5　参数方程与隐式方程的互化 …… 33

3.5.1　参数式方程到隐式方程 …… 33

3.5.2　隐式方程到参数式方程 …… 34

3.6　点到线的距离 …… 35

3.6.1　从隐式直线方程开始 …… 35

3.6.2　从参数式直线方程开始 …… 37

3.7　点在直线上的投影 …… 38

3.8　相交位置：计算交点 …… 39

3.8.1　参数式方程和隐式方程 …… 39

3.8.2　两个参数式方程 …… 41

3.8.3　两个隐式方程 …… 42

3.9　习题 …… 43

第 4 章　形状变化：二维平面中的线性映射 …… 45

4.1　倾斜目标框 …… 45

4.2　矩阵形式 …… 46

4.3　线性空间 …… 48

4.4　缩放 …… 50

4.5　反射 …… 52

4.6　旋转 …… 53

4.7　切变 …… 55

4.8　投影 …… 56

4.9　面积和线性映射：行列式 …… 59

4.10　构造线性映射 …… 61

4.11　矩阵乘法的更多性质 …… 63

4.12　矩阵的运算规则 …… 65

4.13　习题 …… 66

第 5 章　2×2 线性方程组 …… 68

5.1　倾斜目标框的再现 …… 68

5.2　矩阵形式 …… 69

5.3　一个直接的方法：克莱姆法则 …… 70

5.4　高斯消元法 …… 71

5.5　绕轴旋转 …… 72

5.6　无解线性方程组 …… 74

5.7　欠定方程组 …… 74

5.8　齐次线性方程组 …… 75

5.9　抵消映射：逆矩阵 …… 76

5.10　定义一个映射 …… 81

5.11　二元视图 …… 82

5.12　习题 …… 83

第 6 章　在周围移动：二维平面上的仿射映射 …… 85

6.1　坐标变换 …… 85

6.2　仿射映射和线性映射 …… 87

6.3　平移 …… 88

6.4　更多常见的仿射映射 …… 88

6.5　从三角形映射到三角形 …… 90

6.6　仿射映射的复合 …… 91

6.7　习题 …… 94

第 7 章　特征 …… 96

7.1　固定方向 …… 97

7.2　特征值 …… 97

7.3　特征向量 …… 99

7.4　扩大普遍性 …… 101

7.5　对称矩阵的几何图形 …… 102

7.6　二次型 …… 105

7.7　重复映射 …… 108

7.8　习题 …… 109

第 8 章　三维空间中的几何 …… 111

8.1　从二维到三维 …… 111

8.2　向量积 …… 113

8.3　直线 …… 116

8.4　平面 …… 117

8.5　混合积 …… 120

8.6　应用：光和影 …… 121

8.7　习题 …… 124

第 9 章　三维空间中的线性映射 …… 125

9.1　矩阵和线性映射 …… 125

9.2　线性空间 …… 127

9.3　图形缩放 …… 128

9.4　图形反射 …… 129

9.5　图形切变 …… 130

9.6　图形旋转 …… 132

9.7　图形投影 …… 135

9.8　体积与线性映射：行列式 …… 137

9.9　线性映射的组合 …… 139

9.10　逆矩阵 …… 141

9.11　矩阵性质的拓展 …… 142

9.12　习题 …… 143

第 10 章　三维空间中的仿射映射 …… 147

10.1　仿射映射 …… 147

10.2　平移 …… 148

10.3　四面体的映射 …… 149

10.4　平行投影 …… 151

10.5　齐次坐标和透视投影 …… 155

10.6　习题 …… 158

第 11 章　三维空间中的相交 …… 160

11.1　点与平面的距离 …… 160

11.2　两直线间的距离 …… 162

11.3　直线与平面相交 …… 163

11.4　直线与三角形相交 …… 165

11.5　反射 …… 165

11.6　三个平面相交 …… 166

11.7　两个平面相交 …… 168

11.8　建立标准正交坐标系 …… 169

11.9　习题 …… 171

第 12 章　高斯消元法解线性方程组 …… 173

12.1　问题的引入 …… 173

12.2　高斯消元求解法 …… 176

12.3　齐次线性方程组 …… 182

12.4　逆矩阵 …… 183

12.5　矩阵的 LU 分解 …… 186

12.6　行列式 …… 189

12.7　最小二乘法 …… 191

12.8　应用：股骨头的数据拟合 …… 193

12.9　习题 …… 195

第 13 章　方程组的替代算法 …… 198

13.1　豪斯霍尔德算法 …… 198

13.2　向量的范数 …… 204

13.3　矩阵的范数 …… 206

13.4　条件数 …… 208

13.5　向量的序列 …… 209

13.6　线性方程组的迭代解法：高斯－雅可比法和高斯－赛德尔法 …… 210

13.7　习题 …… 213

第 14 章　一般线性空间 …… 215

14.1　线性空间的基本性质 …… 215

14.2　线性映射 …… 217

14.3　内积 …… 220

14.4　格拉姆－施密特标准正交化 …… 222

14.5　空间一览 …… 224

14.6　习题 …… 225

第 15 章　特征问题的再讨论 …… 228

15.1　基础知识再讨论 …… 228

15.2　幂法 …… 234

15.3　应用：谷歌特征向量 …… 236

15.4　特征函数 …… 238

15.5　习题 …… 239

第 16 章　奇异值分解 …… 241

16.1　2×2 情形下的几何结构 …… 241

16.2　一般情形 …… 244

16.3　SVD 步骤 …… 247

16.4　奇异值和体积 …… 248

16.5　广义逆 …… 248

16.6　最小二乘 …… 249

16.7　应用：图像压缩 …… 252

16.8 主成分分析 …… 252
16.9 习题 …… 255
第17章 分解：三角形 …… 258
17.1 质心坐标 …… 258
17.2 仿射不变性 …… 260
17.3 一些特殊点 …… 261
17.4 二维平面三角剖分 …… 263
17.5 数据结构 …… 264
17.6 应用：点的位置 …… 266
17.7 三维空间三角剖分 …… 266
17.8 习题 …… 267
第18章 直线组合：折线和多边形 …… 269
18.1 折线 …… 269
18.2 多边形 …… 270
18.3 凸性 …… 271
18.4 多边形的种类 …… 272
18.5 特殊的多边形 …… 273
18.6 转向角和回转数 …… 274
18.7 面积 …… 275
18.8 应用：共面问题 …… 278
18.9 应用：点在平面内还是在平面外 …… 279
18.9.1 奇偶规则 …… 279
18.9.2 非零回转数规则 …… 280
18.10 习题 …… 281
第19章 圆锥曲线 …… 283
19.1 一般圆锥曲线 …… 283
19.2 圆锥曲线的分析 …… 287
19.3 标准位置的一般曲线 …… 288
19.4 习题 …… 290
第20章 曲线 …… 291
20.1 参数曲线 …… 291
20.2 贝塞尔曲线的性质 …… 294
20.3 矩阵形式 …… 295
20.4 导数 …… 296
20.5 复合曲线 …… 298
20.6 平面曲线的几何 …… 298
20.7 沿着曲线移动 …… 300
20.8 习题 …… 302
附录 …… 303
附录A 词汇表 …… 303
附录B 部分习题参考答案 …… 309
参考文献 …… 342

第 1 章　笛卡儿的发现

在一本故事集里，讲述了发生在 17 世纪的古老的德国传说，有一个叫希尔达的小镇，那里的居民因他们的愚昧而闻名［12］：

一支军队正在逼近希尔达小镇并可能会攻占它. 为防止被侵夺，镇议会不得不把负责镇守的财宝藏起来. 还有什么是比把财宝沉入镇附近的湖里更好的办法呢？于是，议会成员们登上镇里的小船，前往湖中间，沉下了财宝. 小镇会计掏出他的小折刀，对着财宝下沉的地方，在船的边缘切了一道很深的缺口. 其他的议会成员们很惊讶，他为什么会这样做？“这样我们会记住在哪里沉下了财宝，不然我们以后再也找不到了！”小镇会计回答道. 每个人都被这个聪明的方案所深深折服！

最终，战争结束了，镇议会成员们又重新踏上了小船，这次是从湖中收回财宝. 一旦到了湖面，会计的方案像是突然间又不聪明了. 因为无论他们走到哪里，船边缘的缺口都表明他们已经发现了财宝！㊀

法国哲学家勒内 · 笛卡儿（1596—1650）对此进行了更加深入的研究：他发明了坐标系理论. 会计在船上用标记准确地记录了财宝的沉没地点. 也就是说，他记录了与财宝相关的局部坐标的位置. 但由于忽略了船相对于湖的位置，即整体坐标，因此他遗失了所有财宝！（参见图 1.1）本章的其余部分是关于局部坐标和整体坐标之间的相互作用.

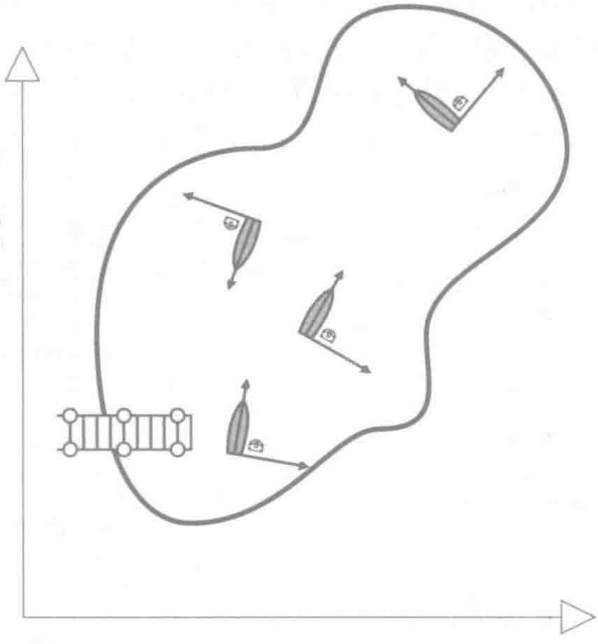


图 1.1　局部坐标和整体坐标系：财宝的局部坐标不随着船的移动而改变，然而，财宝的整体坐标，随着船的移动，相对于湖却是改变的.

㊀ 从数学上理解，这个故事与中国《吕氏春秋 · 察今》中记述的一则寓言“刻舟求剑”同意. ——译者注

1.1 二维平面中的局部坐标和整体坐标

本书是用 LATEX 排版系统（见［9］或［13］）写成的，将每一页转换为被称作 PostScript 的页面描述语言输出（见［1］）. 它指示激光打印机打印所有的字符和符号放在一个特定页面的适当位置上. 本章的第一页，有一个在章节标题打印字母 **D** 的 PostScript 命令.

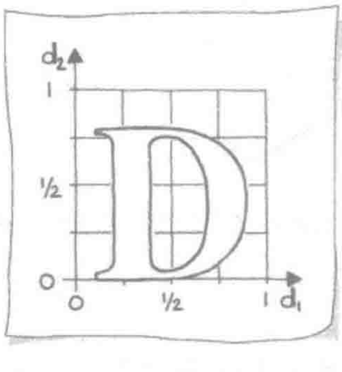
为了做到这一点，我们需要一个二维（或 2D）坐标系. 它的原点仅仅在页面的左下角，而且 x 轴和 y 轴是由水平纸边和垂直纸边交汇形成的. 一旦我们有了这个坐标系，就可以在它里面标记研究的对象，例如字母 **D**.

另一方面，**D** 是字体设计师绘制的，他显然不知道 **D** 在这一页的位置，或者它现在的大小. 设计师们使用他们自己的坐标系，在该坐标系中，字母 **D** 是用一个点集来刻画的，每一个点相对于 **D** 的坐标系都有坐标，如素描图 1.1 所示.

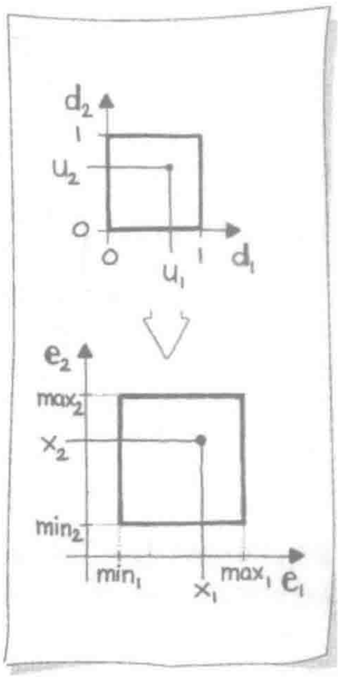
我们把这个坐标系叫作局部坐标系，而不是适用于整个页面的整体坐标系. 因此，将字母放置页面上需要掌握整体坐标系和局部坐标系的相互关系.

接下来的素描图 1.2 中，我们处理得更规范一些：设（x_1，x_2）是整体坐标系$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$中的坐标. 黑体符号将在下一章解释. 你可能习惯使用坐标（x，y）；然而在本书中（x_1，x_2）将作为重要的简写符号，这也会使编程更容易. 设（u_1，u_2）是局部坐标系$[\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2]$中的坐标. 设局部坐标系中的一个对象被一个左下角坐标为（0，0）和右上角坐标为（1，1）的盒子所包围. 这意味着，该对象"住在"局部坐标系的单位正方形中，也就是在一个边长为 1，且以左下角为原点的正方形中. 将我们的研究对象限制在局部坐标系中的单位正方形里使得本章研究更容易些——稍后我们将放宽这一限制.

我们希望将研究对象放置在整体坐标系中，这样它就能纳入在左下角为（$\min_1$，$\min_2$），右上角为（$\max_1$，$\max_2$）的目标框中了（素描图 1.2 中用粗线画的部分）. 这可以



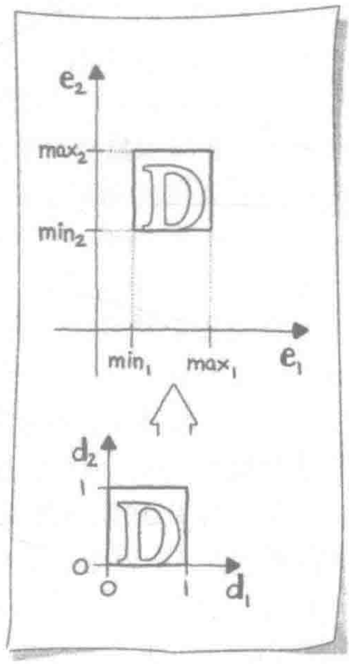
素描图 1.1　一个局部坐标系.



素描图 1.2　整体坐标系和局部坐标系.

通过指定局部坐标系中的坐标（u_1，u_2）与整体坐标系中目标坐标（x_1，x_2）的对应来完成. 这种对应的特点是保留了关于它们长度的各自坐标值. 局部坐标也被称为参数. 根据公式，将这些参数写为商的形式为

$$\frac{u_1-0}{1-0}=\frac{x_1-\min_1}{\max_1-\min_1},$$
$$\frac{u_2-0}{1-0}=\frac{x_2-\min_2}{\max_2-\min_2}.$$



素描图 1.3　局部坐标系和整体坐标系中的 **D**.

因此，x_1 和 x_2 的对应公式很简单：

$$x_1=(1-u_1)\min_1+u_1\max_1, \tag{1.1}$$
$$x_2=(1-u_2)\min_2+u_2\max_2. \tag{1.2}$$

我们说坐标（u_1，u_2）被映射到了坐标（x_1，x_2）中. 素描图 1.3 解释了字母 **D** 是如何被映射的. 关于参数的概念我们将在 2.5 节中重新引入.

让我们检验一下，实际上这是对的：因为在局部坐标系中的$(u_1,u_2)=(0,0)$，它一定对应到了整体坐标系中的$(x_1,x_2)=(\min_1,\min_2)$. 由此得到

$$x_1=(1-0)\cdot\min_1+0\cdot\max_1=\min_1,$$
$$x_2=(1-0)\cdot\min_2+0\cdot\max_2=\min_2.$$

同样，局部坐标系中的坐标$(u_1,u_2)=(1,0)$，它一定对应到了整体坐标系中的坐标$(x_1,x_2)=(\max_1,\min_2)$. 由此得到

$$x_1=(1-1)\cdot\min_1+1\cdot\max_1=\max_1,$$
$$x_2=(1-0)\cdot\min_2+0\cdot\max_2=\min_2.$$

例 1.1

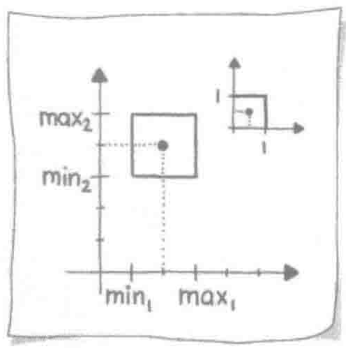
设给定目标框

$$(\min_1,\min_2)=(1,3)\quad 和\quad (\max_1,\max_2)=(3,5),$$

见素描图 1.4. 坐标（1/2，1/2）可以被认为是局部坐标中单位正方形的“中点”. 让我们看一下映射的结果：

$$x_1=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 3=2,$$
$$x_2=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 5=4.$$

这是目标框的“中点”. 在这里，你可以看到单位正方形中的几何图形是如何复制到目标框中的.



素描图 1.4　映射局部单位正方形到目标框中.

式（1.1）和式（1.2）的不同写法如下：定义 $\Delta_1=\max_1-\min_1$ 和 $\Delta_2=\max_2-\min_2$，可得

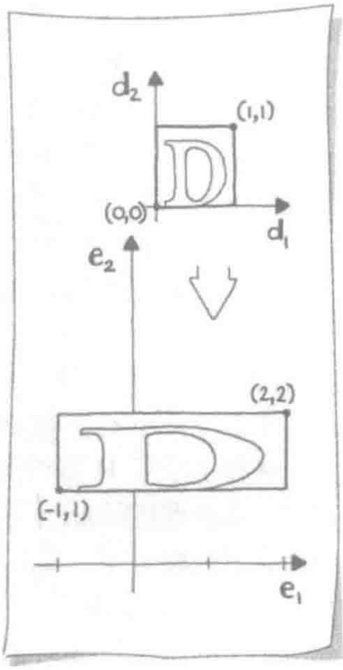
$$x_1=\min_1+u_1\Delta_1, \tag{1.3}$$
$$x_2=\min_2+u_2\Delta_2. \tag{1.4}$$

注意：如果目标框不是正方形，那么局部坐标系中的对象将会发生形状上的变化. 在下面的例子中我们将看到，如素描图 1.5 所示. 给出目标框坐标

$$(\min_1,\min_2)=(-1,1),(\max_1,\max_2)=(2,2).$$

你可以看到将目标对象放进整体坐标系中，局部对象是如何在 $\boldsymbol{e}_1$ 方向拉伸的. 自己可以验证一下，单位正方形的角（局部坐标内）仍然映射到目标框（整体坐标内）的角中！

一般来说，如果 $\Delta_1>1$，那么目标对象将会在 $\boldsymbol{e}_1$ 方向上拉长，如果 $0<\Delta_1<1$，它将收缩. $\max_1$ 比 $\min_1$ 小的情况不常遇到：这会导致目标对象在 $\boldsymbol{e}_1$ 方向上逆转. 当然，$\max_2$ 比 $\min_2$ 小的情况同样适用于在 $\boldsymbol{e}_2$ 方向上. 图 1.2 展示了框中含有字母 **D** 的一些例子. 为了显得有趣，我们给出了一个 $\max_1$ 小于 $\min_1$ 的目标框！



素描图 1.5　失真图.

目标对象形状变化的另一个特征可以通过观察纵横比的变化，即宽与高的比，或者是目标框的 Δ_1/Δ_2. 这也可以写成 $\Delta_1:\Delta_2$. 在局部坐标系中的纵横比是 1. 请回看例 1.1，目标框的纵横比是 1，因此尽管它在两个坐标上都被均匀地拉伸了，但是字母 **D** 并没有变形. 在素描图 1.5 中，给出的目标框的纵横比是 3，因此字母 **D** 发生了形状上的变化.

在日常生活中，我们会遇到许多用到纵横比的情况. 最近电视和计算机屏幕已经从接近正方形的 4:3 变化到了 16:9. 素描图 1.5 重现了当一个旧格式编排被拉伸以填充新格式时屏幕发生扭曲的本质.（通常情况下，更好的解决方法是不拉伸图像并且容许在图像的每一边都留出垂直的黑线条.）所有的国际标准化（ISO）的纸张，无论其大小，它的纵横比为 $1:\sqrt{2}$. 以黄金比例 $\phi=(1+\sqrt{5})/2$ 为基础，纵横比为 $1:\phi$ 形成的黄金矩形具有美观实用的形状，并且在艺术和建筑领域符合审美习惯. 因为信用卡适应钱包和读卡器的大小也是很重要的，因此信用卡的纵横比为 8:5.

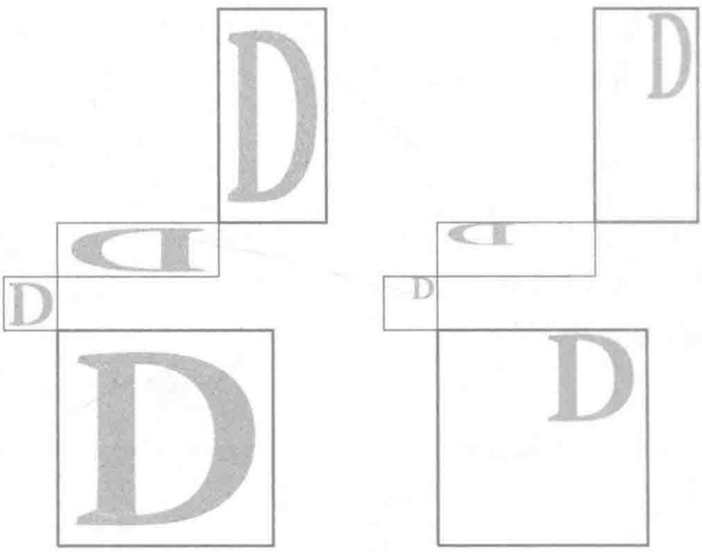


图 1.2　目标框：字母 **D** 被映射了几次. 左边：**D** 在单位正方形的居中位置. 右：**D** 不在居中位置.

顺便提一下，这种操作严格建立在“无须知道”的基础上：我们不需要知道局部坐标系和整体坐标系两者之间的关系. 在许多情况下（例如排版），这时对象在局部坐标系里的对应关系，实际上并不是已知的. 当然，你必须知道实际对象落在局部单位正方形的什么位置. 如果它不是恰好落在中心，可能会出现图 1.2（右边）所示的情况.

你无论何时使用计算机，都会体验到“单位正方形到目标框”的映射. 当你打开一个窗口时，你可能想要观察它当中一个的特定图像. 这个图像存储在局部坐标系中；如果它存储在（0，0）和（1，1）上，那么它就使用了归一化坐标. 现在根据你窗口的范围给出目标框，这是由屏幕坐标给定的，并且图像由式（1.1）和式（1.2）来映射到它上面. 屏幕坐标通常用像素[⊖]来表示，典型的计算机屏幕上的像素约为 1440×900，它的纵横比为 8∶5 或者是 1.6.

1.2　从整体到局部的转化

在二维平面中讨论整体和局部坐标系时，我们使用目标框来定位（可能失真）局部坐标系 $[\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]$ 中的单位正方形. 对于给定的坐标 (u_1, u_2)，我们可以在整体坐标系中利用式（1.1）和式（1.2），或式（1.3）和式（1.4）找出坐标 (x_1, x_2).

问题反过来会怎么样呢？给定整体坐标系中的坐标 (x_1, x_2)，它的局部坐标 (u_1, u_2) 是什么？答案是显而易见的：从式（1.3）中计算出 u_1，从式（1.4）中计算出 u_2，结果为

$$u_1 = \frac{x_1 - \min_1}{\Delta_1}, \tag{1.5}$$

$$u_2 = \frac{x_2 - \min_2}{\Delta_2}. \tag{1.6}$$

任何时候你单击鼠标与计算机人机互动时，都会出现此过程的应用程序. 假设在一个窗口中显示几个图标. 当你单击它们中的一个时，你的计算机是如何知道哪一个的呢？答案是：应用式（1.5）和式（1.6）来确定其位置.

例 1.2

设一台计算机屏幕窗口上的屏幕坐标为

$$(\min_1, \min_2) = (120, 300) \text{和} (\max_1, \max_2) = (600, 820).$$

该窗口被 21 个图标填满，排列成 7×3 图样（见图 1.3）. 鼠标单击返回屏幕坐标（200，709），哪个图标被点中了？根据式（1.5）和式（1.6），计算过程如下：

$$u_1 = \frac{200 - 120}{480} \approx 0.17,$$

$$u_2 = \frac{709 - 300}{520} \approx 0.79.$$

归一化的 u_1 部分坐标是

$$0, 0.33, 0.67, 1.$$

u_1 的值 0.17 在 0 和 0.33 之间，所以第一列的图标被选中. 归一化坐标的 u_2 部分是

⊖ pixels（像素）是 picture element 的简写.