新版

万学教育 海文考研

考研数学

线性代数高分解码

（认知篇）

主　编：丁勇

副主编：邬丽丽　李兰巧　全忠

科学分解备考时间，合理规划复习进程

基础阶段重理论，夯实基础知识

强化阶段练题型，培养解题能力

循序渐进，轻松探求高分密码

中国政法大学出版社

新版

万学教育 UNIVERSAL EDUCATION GROUP 海文考研

考研数学
线性代数高分解码
（认知篇）

主　编：丁勇

副主编：邬丽丽　李兰巧　全忠

编委会

邬丽丽	丁　勇	李兰巧	周晓燕	郭　媛	张喜珠	崔新月
刘　曦	洪　欢	吴　娜	巫天超	孙　森	方晓敏	郭啸龙
全　忠	江国才	陈生生	李英男	徐　婕	吴晓林	冯建轩
余结余	马　达	李二帅	李文智			

中国政法大学出版社

2018・北京

图书在版编目（CIP）数据

考研数学线性代数高分解码/丁勇主编. —北京：中国政法大学出版社，2018.9
ISBN 978-7-5620-8568-3

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①丁… Ⅲ. ①线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 219372 号

出版者　中国政法大学出版社
地　址　北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址　北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话　010-58908285(总编室)　58908433（编辑部）58908334(邮购部)
承　印　三河市德利印刷有限公司
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　21
字　数　310 千字
版　次　2018 年 9 月第 1 版
印　次　2018 年 9 月第 1 次印刷
定　价　49.80 元

前言

硕士研究生招生考试是具有选拔性质的较高水平考试，采用的是优胜劣汰的录取方式。为此，考试真题既要有难度又要有区分度，而考研数学试题这种特征尤为明显。本书作者辅导考研数学数十载，同样的辅导，既有大量学员达到140以上，也有少数低于70分，天壤之别缘由何在？是运气不好？是方法不对？为此我们需要探讨考研数学的得分之道，以下内容将为考生揭开考研数学高分的“神秘面纱”。

一、系统复习、夯实基础

研究生招生考试数学试题中，有80%左右的试题是直接考查“基本概念、基本理论和基本方法”，基本概念比如“导数、积分、间断点、渐近线的概念”等，基本理论比如“极限的保号性、”“等价无穷小替换定理”等，基本运算比如“求极限、求导、行列式的运算、求概率”等。有些年份甚至直接考查课本上的公式、定理的证明，比如2015年考研考查$(uv)'=u'v+uv'$的证明。

考生只要了解相应的概念，具备基本运算能力，就可以把相应试题做出来。但现实是很多考生不屑于复习这些基础知识，认为考研试题应该难度很大，所以常常找一些偏题、怪题进行训练，还自我感觉良好，如果万一考了，自己会做，别人不会做，就可以得高分。最后结果往往适得其反。所以在复习的基础阶段，一定要狠抓基础，全面复习。

当然重视基础，不是只是背诵课本上的基本概念、基本理论和基本方法，要做到不仅要知其然，还要知其所以然，同时还要掌握在考研试题中如何考查，命题方式有哪些，等等。

考研数学考查非常全面，所以只要是考试大纲要求的内容都要复习到，特别是在基础阶段，不能有所取舍，数学一试卷中每年有大量的低频考点，比如梯度、散度、曲面切平面、法线、傅里叶级数，等等，这些内容经常是五年或十年甚至更多更久才考一次，虽然试题难度不大，但是每年有大量考生在这些考点上失分，主要源于犯了机会主义错误，认为自己运气不会那么差刚好考到，最后悔之晚矣。

二、归纳题型、总结方法

如果把历年考研数学试题进行比较，并作深入细致的分析研究，再对照教育部制定的历年(考研)考试大纲，就会发现，虽说数学试题表述形式千变万化，但万变不离其宗。这个宗就是学科的核心内容，说得具体一点就是诸如高等数学求函数、数列极限、求极值、积分上限函数求导、证明不等式、计算二重积分、幂级数求和等；线性代数的解含参数的线性方程组、向量的线性相关性、矩阵的相似对角化；概率统计的求随机变量函数的分布、数值特征、矩估计、极大似然估计等典型题型。如果你不被试题五光十色的包装所迷惑，而能洞察其实质——题型，就有可能知道该用哪把钥匙去开门。

所以考生在复习的强化阶段，一定要系统总结每个章节有哪些常考的题型，这些题型有哪些解法，比如要证明数列极限存在，要想到用单调有界准则，出现常数不等式，要想到常数变易法，最后做到看到什么题型马上就有固定的解法。就像拍电视剧，男主角掉到山崖，一般都会挂到树上，一定会有一个世外高人救了他。

同时考研试题中有一些条件，有固定的结论，比如一般出现$f(b)-f(a)$要用拉格朗日中值定理；出现了高阶导数要用泰勒定理；出现$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$要用；出现了$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$要想到特征值的结论；等等。这些都是一些固定套路，虽然生活中要少一些套路，多一些诚意，但是考研试题中还是会有很多固定的解题思路，本书正文会给考生进行系统总结。

三、科学规划、戒骄戒躁

考研数学的复习是一个漫长、系统、宏伟的工程，年轻的考生不缺乏激情、不缺乏信心、不缺乏为了未来而奋斗的勇气，但是缺乏约束力，往往复习内容的多少和心情指数成正比，心情好多复习一点，心情

不好干脆就不复习了。这种三天打鱼，两天晒网的复习节奏，是不会修成正果的，要想拿下考研数学这座山头，需要考生制定一个合理的复习规划。要做一个科学的、可执行的学习计划，计划不能太过详细，有同学甚至规定早上 7 点起床，五分钟刷牙，一分钟洗脸，两分钟上厕所.这种计划不具有可操作性。

本书正是基于以上的考虑，分为认知篇和题型篇。

认知篇注重呈现考研数学的基本概念，基本理论和基本方法。

题型篇重在将考研数学中常见的题型进行归纳、总结，旨在认知篇的基础上帮助考生掌握常考题型，提高解题能力。

下面我根据多年参与考研辅导的经验，给考生制定一个学习计划的框架，具体的可以根据自身的特点自我调整。

一、基础阶段

1. 时间：Now—6 月

2. 目标：系统复习、夯实基础

通过基础阶段的复习，一方面打好基础，拿到考研数学的基础分，同时为后期强化阶段题型的复习打好基础

3. 用书：

(1)《考研数学高分解码》(认知篇)；(2)《考研数学基础必做 660 题》；

(3)《考研数学真题大解析》(珍藏版)。

二、强化阶段

1. 时间：7—9 月

2. 目标：归纳题型、总结方法

在这三个月里，要归纳考研数学常考题型，同时总结解题方法和解题技巧，最后要做到看到题就知道方法是什么。

3. 用书：

(1)《考研数学高分解码》(题型篇)；(2)《考研数学强化必做 660 题》。

三、冲刺阶段

1. 时间：10 月—考前

2. 目标：查漏补缺、实战演练

通过上一阶段的复习，考生对重要知识、常见题型的做题方法进行了归纳，接下来要通过真题和模拟题将这些知识和做题方法进行融会贯通的使用，同时通过做模拟题，一方面查漏补缺，看自己还有哪些地方不会，另一方面，要养成良好的做题习惯：限定时间和做题顺序等以培养应试技巧。

3. 用书：

(1)《考研数学真题大解析》(标准版)；(2)《考研数学最后成功 8 套题》。

特别提示　本书适合数学一、数学二、数学三及数农考生使用，对于仅针对数学一至三个别卷种适用的章节，书中分别以上标“①”、“②”、“③”表示，数农考生可参考数学三的适用范围。书中收入了部分考研真题，对真题，在题号后以“年份^{卷种}”的形式表示，如选自 2011 年数学一的真题表示为“2011$^{[1]}$”。本书中涉及的符号力求与教育部考试中心发布的最新大纲及使用最广泛的高校教材保持一致，便于读者识别。

数学知识要积累，对数学的理解更要有一个循序渐进的过程，对立志考研的读者要说：凡事预则立，不预则废。

限于水平，撰写中难免出现差错，殷切希望读者不吝赐教，多多指正。

编者

于北京

目　录

第一章　行列式

名师解码

本章概要

知识结构图

- 行列式
  - 求逆序数 → 排列：奇排列（逆序数为奇数）；偶排列（逆序数为偶数）
  - 概念 → 不同行与不同列元素乘积的代数和（共有$n!$项）
  - 性质
    - 转置相等：行列式的行和列互换，其值不变
    - 互换反号：行列式的两行（两列）互换，其值变号
    - 数乘性质：若行列式的某行（某列）有公因子k，则可把公因子 k 提到行列式外面
    - 倍加不变：某行（某列）的 k 倍加到另一行（另一列）的相应元素上去，行列式的值不变
    - 加法性质：某行（列）的所有元素均为两项之和，则行列式可拆为两个行列式之和
    - 零值性质
      （1）行列式某行（列）元素全为零，则行列式值为零
      （2）行列式两行（列）元素相同，则行列式值为零
      （3）行列式两行（列）元素成比例，则行列式值为零
  - 展开式
    - 余子式，代数余子式
    - $|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$（按第$i$行展开）
    - $|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$(按第$j$列展开)
  - 错位展开式 → $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\ (i\neq j)$
  - 特殊行列式 → 对角行列式、上（下）三角形行列式、范德蒙（Vandermonde）行列式、分块矩阵行列式
  - 计算方法 → （1）定义法,（2）化三角形法,（3）展开法,（4）加边法,（5）递推法,（6）公式法,（7）其他方法

复习导语

行列式是线性代数的基础，对于掌握考研线性代数的解答题非常重要. 研究生入学考试中，直接考查行列式的题目并不多，且以客观题为主，往往与矩阵、向量和特征值等其他知识点综合考

查.考生若熟练掌握行列式的计算,在讨论可逆矩阵、矩阵的秩、向量组的线性相关性、线性方程组、方阵的特征值和特征向量、二次型以及正定矩阵等问题时,就掌握了一个有力的工具.正确理解行列式的概念,准确掌握行列式的基本性质,并会熟练应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式,是本章的主要目标.

复习目标

1. 了解行列式的历史、概念的引入和应用.

2. 会求 n 元排列的逆序数.

3. 理解行列式的定义,包括行列式的项数、各项的特点、每项符号的确定等.

4. 准确掌握行列式的基本性质,并会熟练使用行列式的性质来化简、计算行列式.

5. 灵活掌握行列式按行(列)展开定理计算行列式,熟悉每一个元素的余子式和代数余子式的含义.

6. 熟悉一些特殊行列式(如对角行列式、上(下)三角形行列式、范德蒙(Vandermonde)行列式、分块矩阵行列式等)的展开结果.

7. 掌握一些常用的方法和技巧(如降阶法、加边法、行(列)累加法、归纳法或递推法等)来计算某些 n 阶行列式的值,或证明与其有关的命题.

8. 尝试将常见的特点鲜明的特殊行列式分为若干种类,定义一些形象化的名字或总结一些快捷解法,方便记忆和应用.

【大纲考试内容】

行列式的概念和基本性质;行列式按行(列)展开定理.

【大纲考试要求】

1. 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.

2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

考查要点详解

第一节　行列式的人文发展历史

行列式的概念源于解线性方程组的问题.行列式不仅是线性代数的一个基本组成部分,也是研究线性代数的一个重要工具.线性代数的各章节都要用到行列式的概念和性质.

我们首先了解行列式的人文发展历史,克服学习线性代数的盲目性和历史虚无主义倾向.

行列式实质上是由一些数值排列而成的数字表格按一定的法则计算得到的一个数.早在1683年与1693年,日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼茨就分别独立地提出了行列式的概念.此后,行列式主要应用于线性方程组的研究并逐步发展成为线性代数的一个理论分支.1750年,瑞士数学家克拉默(G. Cramer)在《线性代数分析导言》一书中给出了行列式的今日形式,并提出了利用行列式求解线性方程组的著名法则——克拉默法则.1812年,法国数学家柯西(A. L. Cauchy)发现了行列式在解析几何中的应用,这一发现激起了人们对行列式应用进行探索的浓厚兴趣,并将其应用到解析几何以及数学的其他分支中.1841年,雅可比(C. G. Jacobi)在《论行列式形成与性质》一书中对行列式及其性质、计算作出系统阐述.在行列式研究中做出重大贡献的还有后来的范德蒙(A. T. Vandermonde)、裴蜀(E. Bezout)和拉普拉斯(P. S. M. Laplace)等人.

第二节　二阶与三阶行列式的概念

一、二阶行列式的概念与来源

定义 1.2.1　二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

评注

(1)二阶行列式的定义可用对角线法则来记忆.如图 1-1 所示,把 a_{11} 到 a_{22} 的实连

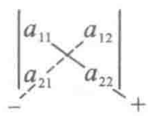

图 1-1

线称为主对角线,a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线,于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

(2)考生需熟练掌握用定义计算二阶行列式的方法.

事实上,二阶行列式的定义源于用消元法解二元线性方程组.

设含有两个未知数且有两个方程的线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1-2-1}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$是未知数 $x_j(j=1,2)$的系数,$b_i(i=1,2)$是常数项.

用消元法解该二元线性方程组,为消去未知数 x_2,以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上列方程的两端,然后两个方程相减,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \tag{1-2-2}$$

类似地,为消去未知数 x_1,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \tag{1-2-3}$$

为方便记忆和计算,将式(1-2-2)和式(1-2-3)中未知数 x_1 和 x_2 的系数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 定义为二阶行列式,并引入符号记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,其中数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的**元素**,简称"元".$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$的第一个下标 i 称为行标,表示 a_{ij} 位于行列式的第 i 行;第二个下标 j 称为列标,表示 a_{ij} 位于行列式的第 j 列.位于第 i 行、第 j 列的元素称为行列式的(i,j)元.

利用二阶行列式的概念,式(1-2-2)中的 $b_1a_{22}-b_2a_{12}$ 和式(1-2-3)中的 $b_2a_{11}-b_1a_{21}$ 也可写成二阶行列式,即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

因此,当二元线性方程组(1-2-1)的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 时,该方程组的解可用行列式简单表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}. \tag{1-2-4}$$

评注

式(1-2-4)中的分母 D 是由方程组(1-2-1)的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式). x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得的二阶行列式, x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 所得的二阶行列式.

【例 1.2.1】 方程 $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & x+1 \\ x-2 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ 的根为________.

【答案】 -2 或 $\frac{7}{2}$.

【解】 利用二阶行列式的定义,将原方程化为等价方程

$$(x-1)^2-3=4-(x+1)(x-2)-(-12+6),$$

整理得 $2x^2-3x-14=0$,即 $(x+2)(2x-7)=0$.

故原方程的根为 $x=-2$ 或 $x=\frac{7}{2}$.

评注

计算二阶行列式最便捷的方法就是应用定义进行计算.

二、 三阶行列式的概念与来源

定义 1.2.2 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

评注

(1)①对角线法则:三阶行列式的定义可以借助图 1-2 加深记忆,称之为对角线法则.

② 三阶行列式的运算结果共有六项,其中 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$ 来自三条主对角线方向上三个元素的乘积 ,前面是正号; $-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$ 来自三条副对角线方向上三个元素的乘积 ,前面是负号.

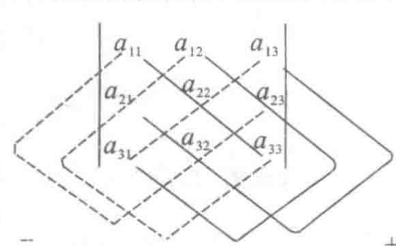

图 1-2

(2)熟练掌握用定义计算三阶行列式的方法,但实际计算三阶行列式时通常不使用定义,而是采用将其化简为上(下)三角形行列式或先化简后再按行(列)展开的方法.

(3)对角线法则只适用于二阶与三阶行列式,而四阶及更高阶行列式的计算要复杂得多,必须使用由二阶与三阶行列式推广得到的 n 阶行列式的定义.

事实上,三阶行列式的定义源于用消元法解三元线性方程组.

设含有三个未知数且有三个方程的线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{cases}\tag{1-2-5}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$是未知数 $x_j(j=1,2,3)$的系数,$b_i(i=1,2,3)$是常数项.

在利用消元法求解三元线性方程组(1-2-5)的过程中,引入记号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

称之为**三阶行列式**.

当方程组(1-2-5)的系数行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq0$ 时,方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$是将系数行列式 D 的第 j 列换为右端常数项得到的行列式,即

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}.$$

【例 1.2.2】 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2&4&6\\4&5&3\\0&1&9\end{vmatrix}$.

【解】 **解法一** 按对角线法则展开,有

$$D=\begin{vmatrix}2&4&6\\4&5&3\\0&1&9\end{vmatrix}=2\times5\times9+4\times3\times0+6\times4\times1-6\times5\times0-4\times4\times9-2\times3\times1$$

$$=90+0+24-0-144-6=-36.$$

解法二 利用行列式的“倍加不变”的性质和“数乘性质”,化为上三角形行列式.

首先,将行列式第 1 行的元素乘以(−2)加到第 2 行;其次,将第 2 行提出公因子(−3);再将新的第 2 行的元素乘以(−1)加到第 3 行,则原行列式化为上三角形行列式. 即

$$D=\begin{vmatrix}2&4&6\\4&5&3\\0&1&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&4&6\\0&-3&-9\\0&1&9\end{vmatrix}=(-3)\begin{vmatrix}2&4&6\\0&1&3\\0&1&9\end{vmatrix}=(-3)\begin{vmatrix}2&4&6\\0&1&3\\0&0&6\end{vmatrix}=(-3)\times2\times1\times6=-36.$$

评 注

解法二应用了后面将要介绍的行列式的性质,与解法一的“按对角线法则展开”的方法相比较,可知运用性质可以更简捷地得到行列式的结果.

【例 1.2.3】 函数 $f(x)=\begin{vmatrix}2x&x&1\\1&-x&2\\2&3&x\end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数为________,x^2 的系数为________.

【答案】 −2,−1.

【解】 **解法一** 行列式按对角线法则展开为多项式,得

$$f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1\\ 1 & -x & 2\\ 2 & 3 & x\end{vmatrix}=-2x^3+4x+3-(-2x)-x^2-12x=-2x^3-x^2-6x+3,$$

于是函数 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 -2,x^2 的系数为 -1.

解法二 先将行列式利用"倍加不变"的性质进行化简,把行列式的第 2 行乘以 $(-2x)$ 加到第 1 行,再把行列式的第 2 行乘以 (-2) 加到第 3 行,然后按第 1 列展开,再按对角线法则计算二阶行列式,得

$$f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1\\ 1 & -x & 2\\ 2 & 3 & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2x^2+x & 1-4x\\ 1 & -x & 2\\ 0 & 2x+3 & x-4\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}2x^2+x & 1-4x\\ 2x+3 & x-4\end{vmatrix}$$

$$=(-1)[(2x^2+x)(x-4)-(1-4x)(2x+3)]=-2x^3-x^2-6x+3,$$

于是函数 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 -2,x^2 的系数为 -1.

解法三 先将行列式利用"倍加不变"的性质进行化简,把行列式的第 2 行加到第 1 行,则行列式中只有主对角线上的元素包含字母 x,得

$$f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1\\ 1 & -x & 2\\ 2 & 3 & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x+1 & 0 & 3\\ 1 & -x & 2\\ 2 & 3 & x\end{vmatrix}.$$

根据对角线法则知,行列式展开后只有主对角线上三个元素的乘积才出现 x^3 和 x^2 项,而化简后的行列式 $\begin{vmatrix}2x+1 & 0 & 3\\ 1 & -x & 2\\ 2 & 3 & x\end{vmatrix}$ 主对角线上三个元素的乘积为 $(2x+1)(-x)x=-2x^3-x^2$,所以函数 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 -2,x^2 的系数为 -1.

评注

(1)解法一和解法二都是通过计算行列式得到 x^3 和 x^2 的系数,这种方法的缺点是计算烦琐,优点是易于掌握、理解且非常准确、不易出错.

(2)通常在解答此类题目时,先利用行列式的性质进行变换,将包含字母 x 的项都集中到行列式的主对角线上去,然后计算主对角线上三个元素的乘积,从而得到 x^n 的系数.从解法三可以看出,求解此类题目不需要把行列式的值计算出来,只需考虑行列式的不同行不同列乘积中出现的包含 x^n 的项,经过合并同类项将它们的系数求出即可.

【例 1.2.4】 $\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 1\\ 2 & \lambda & 0\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$ 的充要条件是(　　).

(A)$\lambda=2$.　　(B)$\lambda=-2$.

(C)$\lambda=0$.　　(D)$\lambda=3,\lambda=-2$.

【答案】 (D).

【解】 **解法一** 行列式按对角线法则展开为多项式,得

$$\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 1\\ 2 & \lambda & 0\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\lambda^2-2-\lambda-4=\lambda^2-\lambda-6=(\lambda+2)(\lambda-3).$$

故 $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 的充要条件是 $\lambda=3,\lambda=-2$，应选(D).

解法二 先将行列式利用“倍加不变”的性质化简，把行列式的第三行乘以(-1)加到第一行，再把行列式按第三列展开，最后按对角线法则计算二阶行列式，得

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-6=(\lambda+2)(\lambda-3).$$

故 $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 的充要条件是 $\lambda=3,\lambda=-2$，应选(D).

第三节 n 阶行列式的概念

为了得到 n 阶行列式的定义，首先要弄清楚二阶与三阶行列式的结构规律，然后根据所得到的规律来推广行列式的概念，再利用消元法求解四元、五元线性方程组，验证所给出的 n 阶行列式定义的合理性，最后得到更为一般的线性方程组的求解公式. 为此，首先需要引入排列的逆序数的概念.

一、排列的逆序数及其性质

由二阶行列式和三阶行列式的定义可以看出，行列式展开式中的每一项是由该行列式所有不同行和不同列的元素的乘积组成的，每一项的符号取决于这些不同行、不同列的元素的排列顺序. 这就引出了行列式的逆序数问题. 研究逆序数的目的就是为了确定行列式每一项的符号，从而得到 n 阶行列式的定义.

定义 1.3.1 排列 由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数组成的一个有序数组 $j_1j_2\cdots j_n$ 称为一个 n 阶排列，也称为 n 元排列或 n 级排列.

评注

(1)把 n 个不同的自然数排成一列，共有几种不同的排法？事实上，n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列的种数通常用 P_n 表示，且 $P_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$.

(2)为了得到计算 P_n 的公式，可以讨论如下：

从 n 个自然数中任取一个放在第一个位置上，有 n 种取法；又从剩下的 $n-1$ 个自然数中任取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法；这样继续取下去，直到最后只剩下一个自然数放在第 n 个位置上，只有 1 种取法. 于是

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!.$$

(3)显然，$1,2,\cdots,n$ 也是一个排列，这个排列具有自然顺序，也称为自然排列或标准排列，就是按递增的顺序排起来的；其他的排列或多或少地破坏了自然排列，需要引入逆序的概念.

定义 1.3.2 逆序 在一个排列中，如果有一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序.

定义 1.3.3 逆序数 一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中逆序的总数称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

评注

(1)本节的重点是求一个排列的逆序数，难点是求含有字母的排列的逆序数.

(2)计算排列的逆序数的步骤：① 对排列中的每个元素，计算其前面比它大的数字的个数，即为该元素的逆序数；② 将所有元素的逆序数累加，即得所求排列的逆序数.

定义 1.3.4 奇排列 逆序数为奇数的排列称为奇排列.

定义 1.3.5 偶排列 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

评注

n 阶排列共有 $n!$ 个，其中奇、偶排列各有$\frac{n!}{2}$个.

定义 1.3.6 对换 把一个排列中两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列，这样一种变换称为一个**对换**. 相邻两个元素对换，称为**相邻对换**.

评注

(1)对换改变排列的奇偶性，即奇、偶排列经过一次对换变成偶、奇排列.

(2)任一 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 与标准排列 $1,2,\cdots,n$ 都可以经过一系列对换互变，且奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

定理 1.3.1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

推论 1.3.1 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

下面讨论计算排列的逆序数的方法：

不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序. 设$j_1j_2\cdots j_n$ 为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 $j_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 j_i 大且排列在 j_i 前面的元素有 τ_i 个，就说 j_i 这个元素的逆序数是 τ_i. 全体元素 $j_i(i=1,2,\cdots,n)$的逆序数的总和 $\tau=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i$ 即是这个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

【例 1.3.1】 排列 217986354 的逆序数为(　　).

(A)9.　　(B)10.　　(C)17.　　(D)18.

【答案】 (D).

【解】 在九级排列 217986354 中，由左向右依次计算，有：元素 2 排在首位，逆序数为 $\tau_1=0$；元素 1 前面比它大的数有一个(2)，逆序数为 $\tau_2=1$；元素 7 和 9 前面没有比它们大的数，逆序数分别为 $\tau_3=0,\tau_4=0$；元素 8 前面比它大的数有一个(9)，逆序数为 $\tau_5=1$；元素 6 前面比它大的数有三个(7,9,8)，逆序数为 $\tau_6=3$；元素 3 前面比它大的数有四个(7,9,8,6)，逆序数为 $\tau_7=4$；元素 5 前面比它大的数有四个(7,9,8,6)，逆序数为 $\tau_8=4$；元素 4 前面比它大的数有五个(7,9,8,6,5)，逆序数为 $\tau_9=5$. 因此，排列 217986354 的逆序数为

$$\tau(217986354)=\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4+\tau_5+\tau_6+\tau_7+\tau_8+\tau_9=0+1+0+0+1+3+4+4+5=18,$$

所以应选(D).

评注

逐个元素求逆序数，再求逆序数的和.

【例 1.3.2】 下列排列中(　　)是奇排列.

(A)654312.　　(B)45312.　　(C)51432.　　(D)4321.

【答案】 (C).

【解】　在每个排列中，由左向右依次计算，有：六级排列 654312 的逆序数为 14，五级排列 45312 的逆序数为 8，五级排列 51432 的逆序数为 7，四级排列 4321 的逆序数为 6. 所以只有排列 51432 是奇排列，应选(C).

【例 1.3.3】　求下列排列的逆序数：

(1)$n(n-1)(n-2)\cdots321$；　　(2)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

【解】　(1)在 n 级排列 $n(n-1)(n-2)\cdots321$ 中，元素 n 排在首位，逆序数为 $\tau_1=0$；元素 $n-1$ 前面比它大的数有一个(n)，逆序数为 $\tau_2=1$；元素 $n-2$ 前面比它大的数有两个($n,n-1$)，逆序数为 $\tau_3=2$；后面各元素的逆序数分别为 $\tau_4=3,\tau_5=4,\tau_6=5,\cdots,\tau_{n-1}=n-2,\tau_n=n-1$. 于是，排列 $n(n-1)(n-2)\cdots321$ 的逆序数为

$$\tau=1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

(2)在 $2n$ 级排列 $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$中，前 n 个数 $1,3,5,\cdots,(2n-1)$之间不构成逆序，后 n 个数 $2,4,6,\cdots,(2n)$之间也不构成逆序，只有前 n 个数和后 n 个数之间才构成逆序. 因此，从数字 2 开始依次计算 $2,4,6,\cdots,2n$ 的逆序数，将其相加得到排列 $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$的逆序数为

$$\tau=(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.$$

评注

逐个元素求逆序数，再求逆序数的和..

【例 1.3.4】　选择 i 和 j，使 $4i2j3$ 成为偶排列.

【解】　因为在五级排列 $4i2j3$ 中缺少数字 1 和 5，故 i 和 j 只能取 1 和 5. 下面进行讨论：当 $i=5,j=1$ 时，排列 $4i2j3$ 为 45213，其逆序数为 $\tau(45213)=7$；当 $i=1,j=5$ 时，排列 $4i2j3$ 为 41253，其逆序数为 $\tau(41253)=4$. 因此，当 $i=1,j=5$ 时，排列 $4i2j3$ 成为偶排列.

评注

对于含字母的排列求逆序数，一定要对字母进行讨论来确定其与前后数的大小关系及排列的奇偶性.

二、n 阶行列式的定义

有了关于逆序数的准备工作，三阶行列式可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=\sum(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},\tag{1-3-1}$$

其中 τ 为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $j_1j_2j_3$ 取和.

类似地，可以把行列式推广到一般情况.

定义 1.3.7　n 阶行列式　n 阶行列式是一个数，表示 $n!$ 项的代数和，其定义是

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdot\cdots\cdot a_{nj_n},$$

其中 $\tau(j_1,j_2\cdots,j_n)$是 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，和号 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是对所有这样的

排列求和,因此是 $n!$ 项的代数和,简记作 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$,其中 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元.

特别地,当 $n=1$ 时,规定一阶行列式 $|a|=a$,注意不要与绝对值记号相混淆.

评注

按此定义的二阶、三阶行列式与第二节中用对角线法则定义的二阶、三阶行列式显然是一致的. n 阶行列式的定义对初学者来说是一个难点. 对于用逆序数给出的 n 阶行列式的定义,应掌握如下六点:

(1) n 阶行列式的值是一个数,而行列式的表达式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 本质上是一个关于行列式的算式.

(2) n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项,正项和负项各有一半,即 $\frac{n!}{2}$ 项取正号,$\frac{n!}{2}$ 项取负号 $(n\geqslant 2)$.

(3)在 n 阶行列式的展开式中,每一项都是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积(即每行每列各有一个元素).

(4)在 n 阶行列式的展开式中,在行下标按自然顺序排列的前提下,每项前面的正负号取决于该项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 列下标所组成的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性.

(5)两个行列式相等,它们的阶不一定相等. 这是因为两个行列式相等是指这两个行列式的值相等,与行列式的阶数没有关系. 例如,$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$,虽然两个行列式的值相等,但是它们的阶却不相等,其中 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ 为二阶行列式,而 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 为三阶行列式.

(6)一阶行列式 $|a|$ 与绝对值 $|a|$ 的记号相同,且都表示一个数,但其定义不同,规定一阶行列式 $|a|$ 就表示数 a,而绝对值 $|a|\geqslant 0$. 例如,一阶行列式 $|-2|=-2$,而绝对值 $|-2|=2$.

【例 1.3.5】 利用行列式的定义容易证明:

(1) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n$(对角行列式,其中未写出的元素都是 0).

(2) $\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n$(对角行列式,其中未写出的元素都是 0).

(3)上三角形行列式(当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn}.$$

(4)下三角形行列式(当 $i<j$ 时,$a_{ij}=0$)