普通高等教育"十三五"规划教材

（第2版）

线性代数

XIANXING DAISHU

主编 朱灵 毕道旺

"互联网+"立体化教材

广益教育

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育"十三五"规划教材

线性代数

第2版

主　编　朱　灵　毕道旺
副主编　崔　艳　孔　翔
主　审　周天明

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书共分六章，内容包括行列式、矩阵、向量组与线性方程组、相似矩阵与二次型、应用数学模型和MATLAB软件在线性代数中的应用．各章后配有适量习题，并书末附有参考答案．附录中收集了近十年研究生入学考试数学试题中线性代数部分考题，并配有参考答案．

本书可作为高等院校工科和经济学科各专业的线性代数教材，也可供参加研究生入学考试者参考．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/朱灵，毕道旺主编．—2版．--北京：北京邮电大学出版社，2018.8

ISBN 978－7－5635－5565－9

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①朱…　②毕…　Ⅲ.①线性代数　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第176659号

书　　名　线性代数(第2版)

主　　编　朱　灵　毕道旺

责任编辑　张保林

出版发行　北京邮电大学出版社

社　　址　北京市海淀区西土城路10号(100876)

电话传真　010－82333010　62282185(发行部)　010－82333009　62283578(传真)

网　　址　www.buptpress3.com

电子信箱　ctrd@buptpress.com

经　　销　各地新华书店

印　　刷　中煤(北京)印务有限公司

开　　本　787 mm×1 092 mm　1/16

印　　张　11

字　　数　280千字

版　　次　2018年8月第2版　2018年8月第1次印刷

ISBN 978－7－5635－5565－9　　　　**定价：33.00元**

广益教育“九斗”APP 操作说明

本书为“互联网+”立体化教材，配有广益教育助学助教平台——“九斗”APP.

使用前，请按照以下步骤操作使用.

步骤一，先使用智能手机扫描本书封面图标中的二维码（见下图），下载安装免费的“九斗”APP. 提示：下载界面会自动识别安卓或苹果手机.

步骤二，安装成功之后，点击“九斗”APP 进入使用界面.

步骤三，首次使用 APP 需注册. 注册时，如果您是教师用户，请提交相关资料进行审核，审核通过后即可获得教师用户的相关功能.

步骤四，注册成功后，使用时，请按照软件提示或宣传视频操作即可.

提示：

1. 浏览资源前请先扫描封底二维码进行教材验证；

2. 对教材中带有 AR 标志的图形图像，使用 AR 扫描即可显示相关资源；

3. 教材中的二维码资源请使用“九斗”APP 中的扫一扫功能进行浏览.

关于数字资源说明如下：

1. 微课：对教材中的重点、难点，从通俗易懂的角度进行诠释性补充讲解，有利于学生的自我学习和巩固学习.

2. 动画：从三维几何的角度，通过立体化、交互体验来展现数学的本质，把几何图形的诠释作用极大化；通过交互演示，透析数学计算原理，演示计算过程及相互关系.

3. 释疑解难：对常见的疑惑，思维误区，难以理解的内容，进行答疑式解答，举例分析，释放学生的困惑，让学生少走弯路.

在使用过程中，如有疑问，请随时与我们联系！

联系电话：010-82330186、13811568712

客服 QQ：2158198813

电子邮箱：kf@guangyiedu.com

第2版前言

线性关系的基础就是$kx+b$,这里的运算规则就只有乘法和加法. 线性关系非常简单,比如著名的牛顿第二定律公式$F=ma$.

事实上,无论是科学圣贤还是平民百姓,每个人都希望用最简单的方式去理解世界、解决问题,一种简单明了的关系总是会比各种复杂关系更容易让人接受. 而这种对于线性关系的追求,其实有时也是能力和条件所限,当我们不知道所研究的对象服从什么规则的时候,通常会假设它服从线性关系——还是因为简单. 如果太复杂了,那么怎么办? 我们也总是会在复杂的内部关系里面找出线性关系的存在或通过数学变换等方法将其转化为线性关系.

线性代数是指使用线性观点看待问题,并用线性代数的语言描述问题、解决问题(必要时可使用矩阵运算),它是数学的一个重要分支,其方法是数学与工程学中最主要的应用方法之一.

诚然,绝大多数人不需要处理复杂的数据,也不需要时刻用经济学的各种模型帮助自己省钱或赚钱,更不需要用方程来理解这个世界上发生的各种现象. 但如果你是理工类的大学生,那么首先要了解你的日常生活广泛受益于这些背后的数学理论,然后最好还要知道数学教育已远不仅是学习一种专业所需的工具,数学早已涉及培养学生的理性思维品格及创新思维开发等无形的特殊领域. 数学知识对于思维方式具有无可替代的影响——由具体到抽象,从低维到高维,从特殊到一般,数学首先想要改变的是人的思维角度,然后是锻炼归纳逻辑的演绎方式,即为什么可以从这一步到下一步.

本教材在汲取其他同类教材精华的基础之上力求具备以下特色:

1. 在教材内容的安排上进行了适当的取舍和整合,以期简明扼要,内容深入浅出,易于理解和掌握.

2. 力求兼顾数学知识体系的完整性,在培养学习者用数学知识和方法分析解决问题的能力的同时,也注重学习者思维能力的培养.

3. 考虑到部分学生后继学习和考研的更高要求,书后整理列出了线性代数应用模型、利用MATLAB求解线性代数问题和近十年硕士研究生入学考试数学一、数学二及数学三中涉及线性代数部分的试题及参考答案。

本教材编写过程中,北京邮电大学出版社的专家和编辑也为本教材的出版付出了许多辛劳,在此谨致谢意!

由于编者的水平所限,加之时间仓促,书中难免存在不妥之处,恳请同行和读者批评指正.

编　者

2018年5月

第1版前言

线性代数是高等学校理工类、经管类等专业的重要基础课，它对于培养学生严谨的逻辑推理和抽象思维能力起着重要作用. 线性代数的基本理论、基本方法广泛应用于自然科学、工程技术、社会科学的各个领域. 掌握这门学科的基本理论和方法，对提高运用数学知识解决有关问题的能力至关重要，同时为后继课和专业课的学习打下良好的基础.

本书介绍线性代数的基本知识，可作为高等院校工科和经济学科各专业“线性代数”课程的教材和教学参考书. 本书的教学时数约为32学时，其中第五章适合经济学科各专业选用. 各章后配有适量习题，书末附有参考答案.

本教材在汲取其他同类教材精华的基础上具有以下特色：

1. 在教材内容的安排上进行了适当的取舍和整合，以期简明扼要，内容深入浅出，易于理解和掌握.

2. 本书突出运用初等变换的方法解线性方程组和将实二次型化为标准形，重视数学建模思想渗透到教学内容中，运用现代数学软件求解线性代数问题，适当降低理论推导及证明的要求，注重解决问题的线性代数方法和应用.

3. 考虑到部分学生后继学习和考研的更高要求，书后整理列出了线性代数应用模型、利用MATLAB求解线性代数问题和近十年硕士研究生入学考试数学一、数学二及数学三中涉及线性代数部分的试题及参考答案.

本教材编写过程中，宁波工程学院教务处及理学院的领导和同事给予了热情的支持和帮助，北京邮电大学出版社的专家和编辑为本教材的出版付出了很多辛劳，在此谨致谢意!

本书由周天明教授担任审稿工作，他认真审阅了原稿，提出了许多宝贵意见，我们向他表示衷心的感谢.

本书的出版获得宁波工程学院教材出版资助.

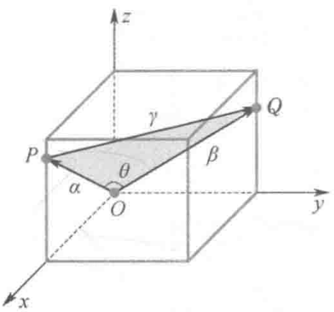
由于编者的水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请同行和读者批评指正.

编　者

2014年1月

CONTENTS 目 录

第1章 行列式



行列式的概念最初是伴随着方程组的求解而发展起来的，行列式的提出可以追溯到17世纪，最初的雏形由日本数学家关孝和与德国数学家戈特弗里德·莱布尼茨各自独立得出，时间大致相同. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质以及利用 n 阶行列式计算 n 元线性方程组的**克拉默**(Cramer)法则.

§1.1 n阶行列式

二阶与三阶行列式

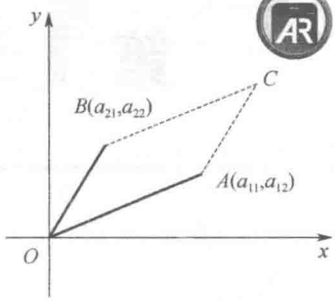
一、二阶行列式

定义1 由4个数排成2行2列（横排称行、竖排称列）的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.1}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(1.1)所确定的**二阶行列式**，并记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1.2}$$



二阶行列式几何意义

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1.2)的**元素**或**元**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表示该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为**列标**，表示该元素位于第 j 列. 把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**.

为了方便记忆，可以用对角线法则：主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

二、三阶行列式

定义2 设有9个数排成3行3列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.3}$$

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1.4}$$

(1.4)式称为数表(1.3)所确定的**三阶行列式**.

定义2表明三阶行列式包括6项，每一项都是位于不同行，不同列的三个元素的乘积，其中三项前面带正号，三项前面带负号.

例

例1 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=45+96+84-105-48-72=0.$

三、全排列及其逆序数

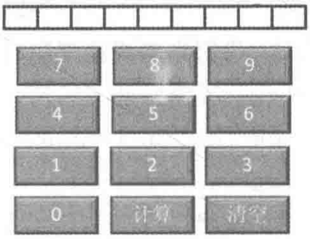
给出 n 阶行列式的定义之前，我们先讨论有关排列及其性质.

定义 3 把 n 个不同的元素排成一列，叫作这 n 个元素的**全排列**(或**排列**).

我们规定各元素之间有一个标准次序，n 个不同的自然数，规定由小到大排列为**标准次序**.

定义 4 在一个排列 $p_1p_2\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n$ 中，若数 $p_t>p_s$，则称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.

定义 5 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.



计算逆序数

下面介绍排列逆序数的计算方法：

分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数，再求总和(或者计算出排列中每个元素后面比它小的数码个数，再求总和)，即算出排列中每个元素的逆序数，所有元素的逆序数之和即为所求排列的逆序数，记为 τ.

例 2 计算下列排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性.

(1)217986354； (2)$(2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$.

解 (1)$\tau=5+4+4+3+1+0+0+1=18$，此排列为偶排列.

(2) $$\tau=k+k-1+k-1+\cdots+2+1+1+0=\frac{[2(1+k-1)(k-1)]}{2}+k=k^2,$$

或 $$\tau=(2k-1)+0+(2k-3)+0+\cdots+1+0=\frac{(2k-1+1)}{2}k=k^2.$$

当 k 为偶数时，排列为偶排列；当 k 为奇数时，排列为奇排列.

定义 6 在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的方法叫作**对换**. 将相邻两个元素对调，叫作**相邻对换**.

例如排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b 得：$a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$，为相邻对换，经过相邻对换，显然 $a_1,\cdots,a_l,b_1,\cdots,b_m$ 这些元素的逆序数并不改变，而 a 与 b 两元素的逆序数改变为：

当 $a<b$ 时，经相邻对换后 a 的逆序数增加 1，而 b 的逆序数不变；

当 $a>b$ 时，经相邻对换后 a 的逆序数不变，而 b 的逆序数减少 1.

所以，排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的逆序数相差 1，即相邻对换改变排列的奇偶性.

再如排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，对换 a 与 b 得：$a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$.

可以先将 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 经过 m 次相邻对换成 $a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m abc_1\cdots c_n$，再经过 $m+1$ 次相邻对换成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$. 总之，经过 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以两个排列的奇偶性相反. 综合上述得：

定理 1

一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

推论

奇排列调成标准次序排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准次序排列的对换次数为偶数.

四、n 阶行列式的定义

我们先来观察三阶行列式的结构

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

说明：(1)三阶行列式共有 $3!=6$ 项；

(2)每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积；

(3)每项前面的正负号取决于：当该项元素的行标按标准次序排列（即 123）时，若对应的列标构成的排列是偶排列（即 123，312，231）则取正号，是奇排列（即 321，213，132）则取负号.

例如，$a_{13}a_{21}a_{32}$ 列标排列的逆序数为 $\tau(312)=1+1=2$，偶排列前取＋号；

$a_{11}a_{23}a_{32}$ 列标排列的逆序数为 $\tau(132)=1+0=1$，奇排列前取－号.

故三阶行列式可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3},$$

其中 τ 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1，2，3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 的对应项求和.

从此我们可以得出一般的 n 阶行列式的定义：

n 阶行列式

定义 7 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 **n 阶行列式**，它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和

$$\sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}.$$

简记作 $D=\det(a_{ij})$，其中 a_{ij} 为行列式 D 的元素，τ 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 n 个数的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的对应项求和.

注：(1)n 阶行列式共有 $n!$ 项；

(2)每项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积，且冠以正号或负号；

(3)每项的正负号取决于：当该项元素的行标按标准次序排列时，若对应的

列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号.

特别1阶行列式 $|a|=a$，注意与绝对值符号的区别.

例3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 展开式中项的一般形式是 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$，若 $p_1\neq 4$，$a_{1p_1}=0$，从而这个项为零，所以 p_1 只能等于4. 同理可得 $p_2=3$，$p_3=2$，$p_4=1$，即行列式中不为零的项为 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(4321)}1\times 2\times 3\times 4=24.$$

于是我们可以得出一般的 n 阶对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

而

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中未写出的元素都是0.

行列式展开要点

主对角线以下(上)的元素都是0的行列式叫作上(下)三角行列式.

例4 计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 展开式中项的一般形式是 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，只有当 $p_n=n$，$p_{n-1}=n-1$，…，$p_2=2$，$p_1=1$ 时该项不为0，所以不为零的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

n 阶行列式类似地可以定义为：

定义7′ 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和

$$\sum (-1)^{\tau} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$

其中 a_{ij} 为行列式 D 的元素，τ 为排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 n 个数的所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的对应项求和.

§1.2 行列式的性质

行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证明 记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad 即\ b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n),$$

按定义 $D^{\mathrm{T}} = \sum (-1)^{\tau} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} = \sum (-1)^{\tau} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$，由定义 $7'$ 有

$$D = \sum (-1)^{\tau} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n},$$

故
$$D=D^{\mathrm{T}}.$$

由此性质可知行列式中行与列具有同等的地位，因此行列式的性质凡是对行成立的，对列也同样成立.

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

证明 设行列式 $D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$ 是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 对换 i,j 两行得到的，即当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$，当 $k=i,j$ 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$，于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^{\tau} b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

$$=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n},$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为标准次序排列，τ 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数.

设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 τ_1，则有

$$(-1)^{\tau}=-(-1)^{\tau_1},$$

故 $$D_1=-\sum(-1)^{\tau_1}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列，交换 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论

如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式为零.

证明 互换相同的两行，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

该性质由行列式定义即可得到.

第 i 行(或列)乘以 k，记作 $r_i\times k$(或 $c_i\times k$).

推论

行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

第 i 行(或列)提取公因子 k，记作 $r_i\div k$(或 $c_i\div k$).

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式为零.

性质 5 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

该性质由行列式定义即可得到.

性质 6 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数，然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式值不变.

例如以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上(记作 c_i+kc_j)，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\ (i\neq j),$$

该性质由性质 5 和性质 4 即可得到.

例

例 5 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}$.

解 $D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}1&2&4&1\\-1&3&2&1\\2&1&3&2\\0&5&6&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+r_1}-\begin{vmatrix}1&2&4&1\\0&5&6&2\\0&-3&-5&0\\0&5&6&2\end{vmatrix}=0.$

上述解法中，先运用了 $c_1\leftrightarrow c_2$，其目的是将 a_{11} 换成 1，从而利用运算 $r_i-a_{i1}r_1$. 即可把 $a_{i1}(i=2,3,4)$ 变成 0. 如果不先作 $c_1\leftrightarrow c_2$，则由于原式中 $a_{11}=2$，需作运算 $r_i-\dfrac{a_{i1}}{2}r_1$ 把 a_{i1} 变成 0，这样计算比较麻烦. 第二步把 r_2+r_1 和 r_3-2r_1 写在一起，将这两次运算并作一次运算的结果进行书写.

注：首元 $a_{11}=1$ 或 -1 在行列式计算过程中很重要！

例

例 6 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$.

解 这个行列式的特点是各行的 n 个元素之和都是 $a+(n-1)b$，只要把后面 $n-1$ 列的元素都加到第 1 列，然后各行都减去第 1 行的话，可以得到一个上三角行列式：

$$D=\begin{vmatrix}a+(n-1)b&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a+(n-1)b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+(n-1)b&b&\cdots&b\\0&a-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 7 设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}&0&\cdots&0\\c_{11}&\cdots&c_{1k}&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nk}&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}\\\vdots&&\vdots\\a_{k1}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix},\quad D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},$$

证明

$$D=D_1D_2.$$

证明 对 D_1 作运算 $r_i+\lambda r_j$，把 D_1 化为下三角行列式，设为

$$D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk};$$

对 D_2 作运算 $c_i+\lambda c_j$，把 D_2 化为下三角行列式，设为

$$D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}.$$

于是，对 D 的前 k 行作运算 $r_i+\lambda r_j$，再对 D 的后 n 列作运算 $c_i+\lambda c_j$，把 D 化为下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

故 $$D=p_{11}\cdots p_{kk}\cdot q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2.$$

§1.3 行列式按行(列)展开

一般计算 n 阶行列式时，如果阶数较高，计算会相当困难，自然想到的是用低阶行列式来表示高阶行列式. 在此，我们先介绍余子式与代数余子式的概念.

一、余子式与代数余子式

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫作元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}.

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，叫作元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

行列式的每个元素分别对应一个余子式和一个代数余子式.

引理 一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零，那么这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

例如 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=(-1)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{33}A_{33}.$

证明 当 a_{ij} 位于第一行第一列时，