十三五
普通高等学校少数民族预科教材

高等数学

（第2版）

GAODENG SHUXUE

王　敏　王勇兵　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校少数民族预科教材

高等数学

（第 2 版）

王　敏　王勇兵　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书以教育部民族司制定的《少数民族预科数学课程教学大纲》为依据，结合《高中数学新课程标准》和《高等数学课程教学基本要求》编写而成。

本书主要包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等内容。此外，还附有微积分发展史、常用初等代数公式、常用基本三角函数公式。

本书适合作为普通高等学校少数民族预科及高职高专数学课程教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王敏，王勇兵主编. —2 版. —北京：中国铁道出版社，2018. 7

普通高等学校少数民族预科教材

ISBN 978-7-113-24409-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… ②王… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 113099 号

书　　名：高等数学(第 2 版)

作　　者：王　敏　王勇兵　主编

策　　划：曾露平　　　　读者热线：(010)63550836

责任编辑：曾露平

封面制作：刘　颖

责任校对：张玉华

责任印制：郭向伟

出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市西城区右安门西街 8 号)

网　　址：http://www.tdpress.com/51eds/

印　　刷：中国铁道出版社印刷厂

版　　次：2014 年 6 月第 1 版　　2018 年 7 月第 2 版　　2018 年 7 月第 1 次印刷

开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16　印张：13　字数：325 千

书　　号：ISBN 978-7-113-24409-5

定　　价：34.00 元

第2版前言

近年来，随着经济快速发展和民族政策深入贯彻落实，民族地区的教育教学水平稳步提高，少数民族预科生素质逐年提升，全国民族预科教育进入全新的发展阶段。新时代对民族教育发展提出了更高的要求，民族预科教育教学改革势在必行。追求预科内涵发展和质量提升，促进预科办学上台阶、上水平、上档次是我们民族预科教育者的重要使命。

预科数学是高校民族预科教育的主干课程，承担着强化初等数学、预修高等数学的双重任务，在培养预科生逻辑思维能力和可持续发展能力方面发挥了重要的作用。多年来，预科数学虽有统编教材，但为弥补统编教材在地域差异和学生层次差异中适用性的不足，我们始终在努力开发适合本校学生的地方教材。

我们的教材特色和目标定位是：以全国预科数学教学大纲为指导，积极挖掘数学学科的应用价值、思维价值和人文价值，有意识地发展学生的数学学科核心素养，落实数学学科育人的总体目标。

本教材内容作为讲义，于 2013 年在校内试用，2014 年由中国铁道出版社正式出版，2016 年进行勘误和部分例题修订后重印，学生反映良好。

2018 年编者对教材进行全面修订。除教材外，我们还将推出与本教材相配套的练习册，以期夯实预科生数学基础知识和基本技能。本次修订版和第 1 版相比，有三个变化：第一，每章起首增加与数学有关的名人名言，增强学科人文价值，引领学生走入更高的数学殿堂，体味数学的重要性、科学性和普适性；第二，每章结尾依据教学大纲，增加本章内容考核要求，以便于学生熟悉预科教学大纲，系统掌握本章内容要点；第三，附加课后习题详细参考答案，以利于学生提前预习和自主学习，便于学生在训练中自我纠错和反思。

本书由王敏、王勇兵担任主编，编写和修订过程中得到了苏建勇、李保堂、王磊以及崔光红老师的大力支持和帮助，在此表示由衷的感谢。

由于编者水平有限，书中的不足和错误在所难免，请广大读者批评指正。

编　者

2018 年 4 月

第1版前言

高等数学是少数民族预科教育的主干课程之一,它对培养学生的理性思维至关重要.随着少数民族预科教育的快速发展和数学在各领域的广泛应用,少数民族预科数学教学也亟待改革和创新.本书以教育部民族司制定的《民族预科数学课程教学大纲》为依据,结合《高中数学新课程标准》和《高等数学课程教学基本要求》编写而成.

全书共7章:函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程.每章均配备大量的习题,用以检查学生对本章内容掌握的程度.习题按照学生的不同需求,习题分为A组和B组两个层次:A组为基础练习题,考查学生对各章基本内容的掌握程度;B组练习题灵活多变、技巧性强,它是对基本内容的拓展和延伸,学生可根据自己的数学基础有选择地做.另外,为了体现数学课程的人文特点和增加学生学习数学的兴趣,在每章末都附加了阅读材料,其内容是一些数学家的生平简介、数学发展史等,供学生课外阅读.

本书由王敏、王勇兵担任主编.在本书编写过程中得到了李晓芬教授、李宗铭老师、张雪梅老师以及崔光红老师的大力支持和帮助,在此表示衷心的感谢.

虽然我们尽了很大的努力,但由于教学经验和水平有限,加之时间比较仓促,错误和不妥之处在所难免,恳请同行和读者批评指正.

编　者

2013年11月

目　录

第1章 函 数

宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学.

——华罗庚

高等数学是这样的一门数学学科——它以极限理论为基础，着重研究函数的连续性、可微性和可积性等问题.它研究的基本对象是函数，本章将在中学数学已有函数知识的基础上，系统阐述函数的相关知识.

§1.1 预备知识

1.1.1 变量与区间

1. 变量

所谓**变量**就是指在某一过程中不断变化的量，例如自由落体的速度和距离.另外有的量在某一过程中始终保持不变，称这样的量为**常量**，例如自由落体的质量和重力加速度(同一地理位置).

初等数学以研究常量为主，而高等数学主要研究变量.通常用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,z 等表示变量.在数轴上，常量 a 用一个定点表示，而变量 x 则用一个动点表示.

2. 区间

任何变量的取值都有一定的范围.如果变量的变化是连续的，则变化范围通常用区间来表示.设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为**开区间**，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

类似地有闭区间和半开半闭区间：

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\},\ [a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},\ (a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

这四个区间统称为**有限区间**，a、b 分别称为区间的**左、右端点**，数 $b-a$ 称为区间的**长度**.从数轴上看，这些有限区间是长度有限的线段(见图 1-1).

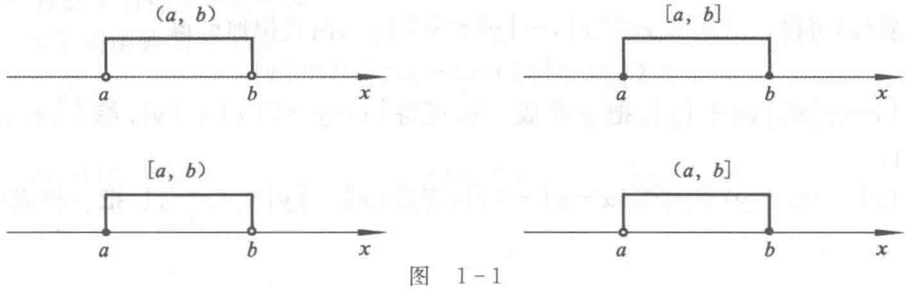

图 1-1

此外,还有无限区间.引进记号$+\infty$(读作"正无穷大")及$-\infty$(读作"负无穷大")后,则可类似地表示无限区间如下(见图1-2):

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\},\ (a,+\infty)=\{x\mid a<x\},$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\},\ (-\infty,b)=\{x\mid x<b\}.$$

此外还有$(-\infty,+\infty)$,即实数集**R**.

需要注意的是,∞不是数,仅仅是个记号,表示无穷大或无限大.

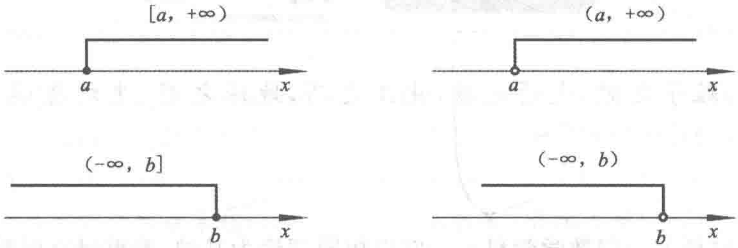

图 1-2

1.1.2 绝对值与邻域

1. 绝对值

定义1 设x是一个实数,则x的绝对值定义为

$$|x|=\begin{cases}x & 当\ x\geqslant 0\\ -x & 当\ x<0\end{cases}.$$

绝对值$|x|$的几何意义是:$|x|$表示点x到原点O的距离.易知,$|x-y|$表示两点x,y之间的距离.

绝对值有以下一些基本性质:设x,y为任意实数,则

(1) $|x|\geqslant 0$;

(2) $|-x|=|x|$;

(3) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$;

(4) $|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$;

(5) $|x|>c(c>0)\Leftrightarrow x>c$ 或 $x<-c$;

(6) $|x|-|y|\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$;

(7) $|xy|=|x|\cdot|y|$;

(8) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$.

下面只给出性质(6)的证明,其余性质利用绝对值的定义很容易得到.

性质(6)的证明:

由性质(3)可得,$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$,$-|y|\leqslant y\leqslant|y|$,两式相加可得

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|,$$

这等价于$|x+y|\leqslant|x|+|y|$.把y换成$-y$,可得$|x-y|\leqslant|x|+|y|$.综上,有$|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$.

因为$|x|=|(x-y)+y|\leqslant|x-y|+|y|$,于是$|x|-|y|\leqslant|x-y|$.把$y$换成$-y$,可得

$|x|-|y|\leqslant|x+y|$. 因而,有$|x|-|y|\leqslant|x\pm y|$.

综上,证得$|x|-|y|\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$.

2. 邻域

当考虑某点附近的点所构成的集合时,通常用邻域的概念来描述.

定义 2 设$\delta>0$,则开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$(即$|x-x_0|<\delta$)称为点x_0的δ**邻域**,记为$U(x_0,\delta)$,点x_0称为该邻域的**中心**,δ称为该邻域的**半径**. 如图 1-3 所示.

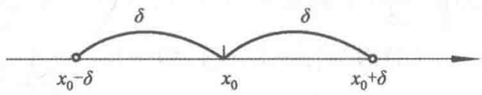

图 1-3

若把邻域的中心x_0去掉,即

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)\quad(\text{即 } 0<|x-x_0|<\delta)$$

称为点x_0的去心δ邻域,记为$\mathring{U}(x_0,\delta)$,其中$(x_0-\delta,x_0)$称为x_0的**左邻域**,$(x_0,x_0+\delta)$称为x_0的**右邻域**.

若不强调δ的大小,点x_0的邻域简记为$U(x_0)$,点x_0的去心邻域简记为$\mathring{U}(x_0)$.

§1.2 函数的概念

1.2.1 函数的定义

变量之间按照一定的规律相联系,其中一个变量的变化会引起另一变量的变化,当前者的值确定后,后者的值按着一定的关系相应地被确定,变量之间的这种依赖关系抽象出来就是函数的概念.

定义 给定一个数集I,如果对于每一个$x\in I$,按照一定的法则,都有唯一的一个y与它相对应,则称y是x的**函数**,记作

$$y=f(x)\quad(x\in I),$$

其中x称为**自变量**,y称为**函数**或**因变量**,数集I称为函数的**定义域**.

对于每个$x\in I$,由法则f所对应的y称为函数在点x处的函数值. 全体函数值所构成的集合称为函数的**值域**,记作$f(I)$,即

$$f(I)=\{y\,|\,y=f(x),x\in I\}.$$

由定义可知,确定一个函数需要两个要素,即定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同,就称这两个函数相同.

当给定某个函数时,事先要给定其定义域,通常按两种情况考虑:一是对有实际背景的函数,要根据实际背景中变量的实际意义来确定. 二是对抽象的用算式表达的函数,其定义域就是使表达式有意义的自变量的全体.

例 1 求下列函数的定义域.

(1)$y=\dfrac{1}{1-x^2}$;　　(2)$y=\sqrt{3x+2}$;

(3)$y=\arcsin(x-3)$;　　(4)$y=\ln x+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

解 (1)只有分母 $1-x^2\neq 0$,即 $x\neq\pm 1$ 时,表达式才有意义,因此函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2)因为根式内的 $3x+2$ 不能为负,即 $3x+2\geqslant 0$,解得 $x\geqslant -\frac{2}{3}$,因此函数的定义域为 $\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$.

(3)因为 $|x-3|\leqslant 1$,即 $-1\leqslant x-3\leqslant 1$,解得 $2\leqslant x\leqslant 4$,因此函数的定义域为 $[2,4]$.

(4)因为对数的真数必须大于零,故 $x>0$,而 $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 需满足 $x^2-1>0$,即 $x<-1$ 或 $x>1$,因此所求函数的定义域为 $(1,+\infty)$.

1.2.2 函数的表示法

函数的表示法一般有三种:表格法、图示法和解析法. 用例子说明.

例 2 20 世纪 60 年代世界人口的数据如表 1-1 所示.

表 1-1 单位:百万人

年份	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
人口	2972	3061	3151	3213	3234	3285	3356	3420	3483

从表 1-1 可以看出 20 世纪 60 年代世界人口随年份的变化而变化的规律:随着时间 t 的变化,世界人口数 n 在不断增长. n 是 t 的函数,其定义域为 $\{1960,1961,\cdots,1968\}$.

这种用表格表示函数关系的方法称为**表格法**.

例 3 某气象站用温度自动记录仪记录某地的气温变化情况. 设某天 24 h 的气温变化曲线如图 1-4 所示.

该曲线描述了一天中的温度 T 随时间 t 变化的规律. T 是 t 的函数,其定义域为 $[0,24]$. t 与 T 之间的相互对应关系由曲线上的点的位置确定,例如曲线上的点 P 的横坐标为 t_0,纵坐标 T_0 就是曲线所描述的函数在 t_0 点的函数值.

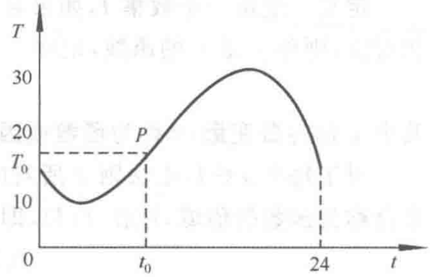

图 1-4

这种用图形表示函数关系的方法称为**图示法**.

例 4 设有一个半径为 r 的半圆形铁皮,将此铁皮做成一个圆锥形容器,问该圆锥形容器的体积 V 是多少?

解 易知圆锥形容器的底圆半径 $r_1=\frac{1}{2}r$,圆锥形容器的高 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}r$,故其体积

$$V=\frac{1}{3}\pi r_1^2 h=\frac{\sqrt{3}}{24}\pi r^3. \qquad (*)$$

式(*)表示了体积 V 与 r 之间的关系,V 随着 r 的变化而变化. V 是 r 的函数,其定义域为 $(0,+\infty)$.

这种用解析表达式(简称解析式)表示函数关系的方法称为**解析法**.

函数的三种表示法各有特点,表格法和图示法直观明了,解析法易于运算. 在实际中可以结合使用.

在用解析法表示函数时，有一种特别的情形，有些函数在它的定义域的不同部分，其表达式不同. 即用多个解析式表示一个函数，这类函数称为**分段函数**.

例如，某市为了提高能源效率对本市居民用电实行阶梯电价，标准分为三档. 第一档：当居民月用电量在 180 度（1 度 = 1kW·h）及以内，电价每度 0.52 元；第二档：当居民月用电量在 181 度～280 度，在第一档电价基础上每度提高 0.05 元；第三档：居民月用电量在 281 度及以上，在第一档电价基础上每度提高 0.3 元.

此时居民的月电费 y 就是月用电量 x 的一个分段函数

$$y=\begin{cases}0.52x & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 180\\(0.52+0.05)x & \text{当 } 181\leqslant x\leqslant 280.\\(0.52+0.3)x & \text{当 } x\geqslant 281\end{cases}$$

需要注意，分段函数的定义域是其各段定义域的并集. 另外，分段函数在其整个定义域上是一个函数，而不是几个函数.

求分段函数的函数值时，应把自变量代入所对应的式子中去. 例如在上式中，当 $x=100$ 时，应代入第一个式子中求 y 值，得 $y|_{x=100}=0.52\times 100=52$；当 $x=200$ 时，应代入第二个式子中求 y 值，得 $y|_{x=200}=(0.52+0.05)\times 200=114$；当 $x=300$ 时，应代入第三个式子中求 y 值，得 $y|_{x=300}=(0.52+0.3)\times 300=246$.

§1.3　函数的性质

本节将介绍函数的有界性、单调性、奇偶性及周期性等基本特性.

1.3.1　有界性

定义 1　设 $f(x)$ 为定义在 I 上的函数，若存在数 A（或 B），使得对一切 $x\in I$，都有

$$f(x)\leqslant A \quad (\text{或 } f(x)\geqslant B)$$

成立，则称 $f(x)$ 在 I 内**有上界**（或**有下界**）.

定义 2　设 $f(x)$ 为定义在 I 上的函数，如果存在正数 M，对一切 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称 $f(x)$ 在 I 内**有界**. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 I 内**无界**.

显然，有界函数必有上界和下界；反之，既有上界又有下界的函数必是有界函数. 有界函数的图形完全落在两条平行于 x 轴的直线之间，如图 1-5 所示.

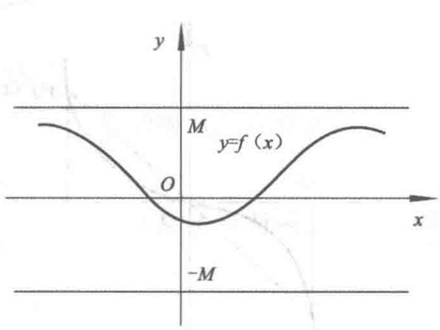

图　1-5

例如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为 $|\sin x|\leqslant 1$；$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有下界但无上界（因 $x^2\geqslant 0$），因此 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是无界函数，但 $y=x^2$ 在 $[-1,1]$ 上是有界函数.

1.3.2 单调性

定义 3 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加**的(或**单调减少**的). 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

单调增加(或单调减少)函数的图形沿横轴正向上升(或下降)，如图 1-6 所示.

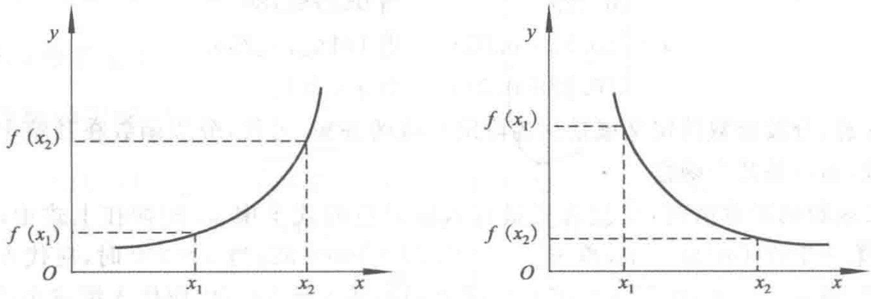

图 1-6

例如，$y=x^2$ 在$[0,+\infty)$内是单调增加的，在$(-\infty,0]$内是单调减少的，在$(-\infty,+\infty)$内不是单调的；$y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.

1.3.3 奇偶性

定义 4 设函数 $f(x)$的定义域 I 关于原点对称(即若 $x\in I$，则有$-x\in I$)，如果对于任意 $x\in I$，都有

$$f(-x)=-f(x) \quad (\text{或 } f(-x)=f(x))$$

恒成立，则称 $f(x)$为**奇函数**(或**偶函数**).

由定义易知，奇函数的图形关于原点对称，而偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1-7 所示.

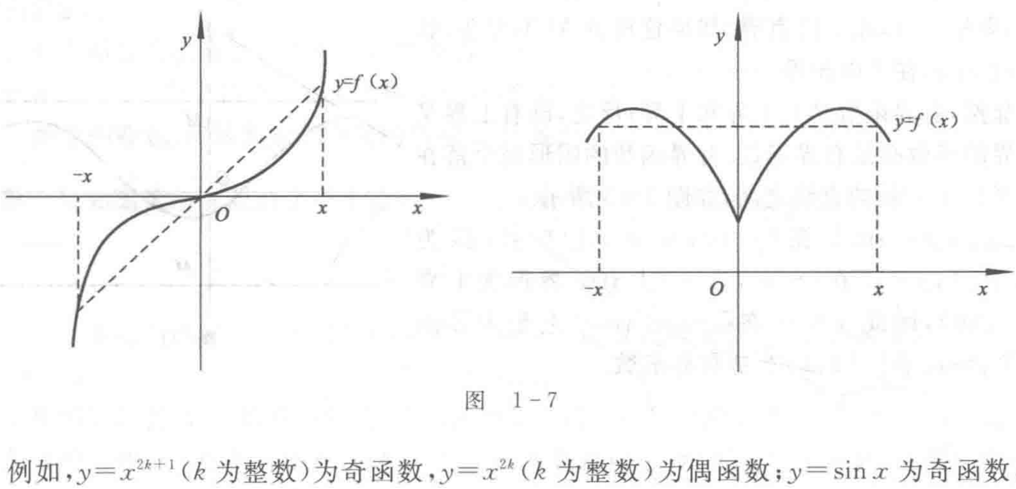

图 1-7

例如，$y=x^{2k+1}$(k 为整数)为奇函数，$y=x^{2k}$(k 为整数)为偶函数；$y=\sin x$ 为奇函数，$y=$

$\cos x$ 为偶函数；$y=C$（C 为非零常数）为偶函数；$y=0$ 既是奇函数又是偶函数；$y=x^2+x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

例 1 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$；　　(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 (1)定义域$(-\infty,+\infty)$关于原点对称，又因为

$$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-\frac{2^x-1}{2^x+1}=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(2)定义域$(-\infty,+\infty)$关于原点对称，又因为

$$f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

1.3.4 周期性

定义 5 设函数 $f(x)$ 在 I 内有定义，如果存在非零常数 T，使得对于任意 $x\in I$，恒有

$$f(x+T)=f(x),\quad (x+T)\in I,$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期**.

显然，如果 T 为 $f(x)$ 的周期，则 $nT(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 也是 $f(x)$ 的周期. 通常说函数的周期是指最小正周期.

例如，$\sin x$ 和 $\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$\tan x$ 和 $\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

若 $f(x)$ 是以 T 为周期的一个周期函数，则在每个长度为 T 的区间上，函数图形有相同的形状.

并非每个周期函数都有最小正周期，例如 $f(x)=C$ 是周期函数，任何非零数都是它的周期. 因为不存在最小的正数，所以它没有最小正周期.

例 2 求函数 $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ 的周期，其中 A,ω,φ 为常数且 $\omega\neq0$.

解 设所求周期为 T，由于 $f(t+T)=A\sin(\omega t+\varphi+\omega T)$，要使 $f(t+T)=f(t)$，即 $A\sin(\omega t+\varphi+\omega T)=A\sin(\omega t+\varphi)$ 成立，只需

$$\omega T=2n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

因为 $T=\dfrac{2n\pi}{\omega}$，其最小正数为 $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$，所以 $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ 是以 $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ 为周期的周期函数.

一般地，有以下结论成立：

设函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，则 $f(ax+b)(a\neq0)$ 也是周期函数，其周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

例如，$\cos\left(\dfrac{1}{2}x+3\right)$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，$\tan 3x$ 的周期为 $\dfrac{\pi}{3}$.

§1.4 反 函 数

自变量与因变量的关系往往是相对的.设变量 x、y 有着某种依赖关系,不仅要研究 y 随 x 变化的状况,有时也要研究 x 随 y 变化的情况,由此引入反函数的概念.

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I,如果对每一个 $y\in f(I)$,都有唯一的 $x\in I$,使得 $f(x)=y$,则 x 是定义在 $f(I)$ 上以 y 为自变量的函数,记此函数为

$$x=f^{-1}(y),y\in f(I),$$

并称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**,而 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

显然,$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数,且 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y=f(x)$ 的值域和定义域.

注意到在 $x=f^{-1}(y)$ 中,y 是自变量,x 是因变量.但是习惯上,常用 x 作为自变量,y 作为因变量.因此,$y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 常记为

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in f(I).$$

在平面直角坐标系 xOy 中,函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称,如图 1-8所示.

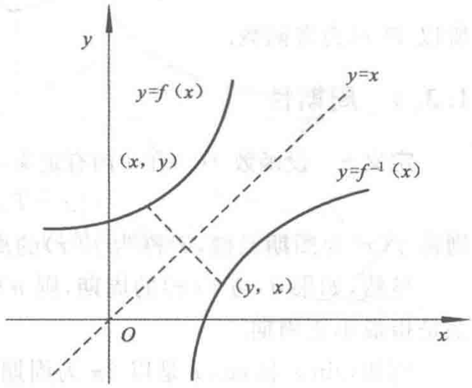

图 1-8

对于反函数的存在条件,有下述定理:

定理 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或单调减少),则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在且在 $f(I)$ 上也是单调增加(或单调减少)的(证明从略).

对于单调函数,求其反函数的步骤是先从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$,然后将 x 与 y 对调,便得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 1 函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的反函数为 $y=\dfrac{x-b}{k}$;函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 的反函数为 $y=\log_a x$;函数 $y=x^2,x\in(0,+\infty)$ 的反函数为 $y=\sqrt{x}$;而函数 $y=x^2,x\in(-\infty,0)$ 的反函数为 $y=-\sqrt{x}$.

注意 函数 $y=x^2$ 在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上不存在反函数.

例 2 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$;　　(2) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;　　(3) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 (1)由 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ 得,$xy+y=2x-1$.整理得,$x(y-2)=-y-1$.于是,

$$x=\frac{y+1}{2-y},$$

故所求反函数为

$$y=\frac{x+1}{2-x}\quad(x\neq2).$$

(2)由 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 得,$e^{2x}-2ye^x-1=0$,解之得 $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$.