

“十三五”移动学习型规划教材

高等数学

上册 第2版

HIGHER MATHEMATICS

杜洪艳 主编

“十三五”移动学习型规划教材

高等数学

上册

第2版

主 编 杜洪艳

副主编 高 萍 韩世勤

参 编 胡满姑 朱小红 张馨元 崔淑琪

机械工业出版社

本书是以教育部高等工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》为标准编写而成的。书中渗透了不少现代数学观点及数学文化内容，增加了部分数学实验的内容，以培养学生的专业素质、提高学生应用数学的能力为目的，充分吸收了编者多年来的教学实践与教学改革成果。

本书内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程。节后配有相应的习题，每章末配有综合练习，书末附有部分习题的参考答案。

本书适用于普通高等院校本、专科高等数学课程的教学，也可作为科技工作者的参考用书。

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学. 上册/杜洪艳主编.—2版.—北京:机械工业出版社, 2018.2

“十三五”移动学习型规划教材

ISBN 978-7-111-58595-4

I. ①高… II. ①杜… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 295151 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:韩效杰 责任编辑:韩效杰 汤 嘉

责任校对:樊钟英 封面设计:鞠 杨

责任印制:孙 炜

保定市中国画美凯印刷有限公司印刷

2018 年 6 月第 2 版第 1 次印刷

184mm×260mm·18 印张·435 千字

标准书号:ISBN 978-7-111-58595-4

定价:45.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线:010-88379833

机工官网:www.cmpbook.com

读者购书热线:010-88379649

机工官博:weibo.com/cmp1952

教育服务网:www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

金书网:www.golden-book.com

特别说明

本书尝试了大量“随文练习”。读者在阅读教材时，会发现在例题和其他推导或计算过程中，留有填空练习。读者自行完成练习后，可以通过“书伴”APP扫描页码上的二维码来查看相应练习的参考答案。

之所以采用这种形式，是因为作者希望改善教材阅读中练习机会偏少的问题。通过增加这些练习，一方面期望读者在阅读教材时能不时“动脑想一想”、“动手算一算”；另一方面，期望通过这些练习，使认知模式在“阅读理解”和“思考实践”两种模式间有所切换，提高读者在阅读教材时的注意力保持度，从而提高学习效率。

本书中，很多页的二维码暂时还没有提供学习材料，这是为作者在课程讲授过程中持续优化教材内容预留的接口，读者在扫描了没有内容的二维码之后，会在“书伴”APP中看到左右各有两个圆形半透明页码按钮，提示上一个和下一个有学习材料的页码。

“裸背线装”简介

本书采用了特殊的装订方式：裸背线装。

什么是裸背线装？

就是采用精装书的锁线工艺，但是不粘贴书脊，仅在锁线之后于书脊上抹一层胶水加固。

为何采用裸背线装？

主要是为了解决胶订书不能平展阅读的问题。采用裸背线装后，教材可以舒适自然地平展开，看书写作业时不需要占用一只手按住课本。

裸背线装有何缺点？

裸背线装的工艺更复杂、成本高、生产周期长。同时，裸露的书脊容易使人误解为质量问题。

本书做了什么改进？

为了在频繁使用的场景下保护书心，本书又在外面加了可移动的外包封。如果同学们喜欢固定的封面，可以在封面的内侧粘贴双面胶来固定。但只能粘贴前面或后面，不要前后同时粘贴。若同时粘贴就无法平展开了。

电话服务
服务咨询热线：010-88379833
读者购书热线：010-88379649

网络服务
机工官网：www.cmpbook.com
机工微博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金书网：www.golden-book.com
封面防伪标均为盗版

为中华崛起传播智慧

地址：北京市百万庄大街22号
邮政编码：100037

策划编辑◎韩效杰 / 封面设计◎鞠杨

前 言

科学的飞速发展和计算机的快速普及,使得数学在其他科学领域中的应用空前广泛,社会各个领域对数学的需求也越来越多,对各专业人才的数学素养要求也越来越高.本书是以教育部高等工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》为标准,以提高学生的专业素质为目的,在充分吸收编者多年来的教学实践和教学改革成果的基础上编写而成的.

“高等数学”是高校的基础课程之一,这门课程思想和方法是人类文明发展史上理性智慧的结晶,它不仅提供了解决实际问题的有力的数学工具,同时还给学生提供了一种思维的训练方法,帮助学生提高作为应用型、创造型、复合型人才所必需的文化素质和修养.本书在编写过程中,注重强调数学的思想方法,重点培养学生的数学思维能力,并力求提高学生的数学素养,从而体现出数学既是一种工具,同时也是一种文化的思想.在内容选取上删去了传统本科教材中难而繁的内容,保留了高等数学传统的知识内容,渗透了不少现代数学观点,增加了一批各学科领域中的应用型例题以及以往传统教材中没有的数学实验,以利于学生更好地利用计算机来应用数学.期望通过对本书的学习,学生不仅达到会数学、更达到会用数学的目的.

本书对数学的基本概念和原理的讲述通俗易懂,同时又兼顾了数学的科学性与严谨性;对定义和定理等的叙述准确、清晰,并在节后配有相应的习题,每章末配有综合练习.本书适用于普通高等院校本、专科高等数学课程的教学,也可作为科技工作者的参考用书.

参加本书编写的人员有武昌理工学院的杜洪艳、高萍、韩世勤、胡满姑、朱小红、张馨元、崔淑琪等.全书的框架结构统稿及定稿由主编杜洪艳负责.

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请专家及读者批评指正.

编 者

目 录

前 言

第 1 章 函数与极限	1
1.1 函数	1
1.1.1 预备知识	1
1.1.2 函数的概念	2
1.1.3 函数的基本性质	4
1.1.4 反函数	6
1.1.5 初等函数	7
1.1.6 建立函数关系式举例	8
习题 1.1	9
1.2 极限的概念	11
1.2.1 数列的极限	11
1.2.2 函数的极限	13
习题 1.2	16
1.3 极限运算法则与两个重要极限	17
1.3.1 极限的四则运算	17
1.3.2 两个重要极限	18
习题 1.3	21
1.4 无穷小与无穷大	21
1.4.1 无穷小	21
1.4.2 无穷大	23
1.4.3 无穷小的比较	25
习题 1.4	27
1.5 函数的连续性	27
1.5.1 函数连续的概念	28
1.5.2 函数的间断点	31
1.5.3 初等函数的连续性	33
1.5.4 闭区间上连续函数的性质	35
习题 1.5	36
* 1.6 极限问题的 MATLAB 实现	37
* 习题 1.6	40
综合练习 1	41
第 2 章 导数与微分	43
2.1 导数的概念	43

2.1.1 引入导数概念的实例	43
2.1.2 导数的定义	44
2.1.3 导数的几何意义	45
2.1.4 单侧导数	46
2.1.5 可导与连续的关系	47
习题 2.1	47
2.2 求导法则	48
2.2.1 函数的和、差、积、商的导数	48
2.2.2 反函数的导数	50
2.2.3 复合函数的导数	51
2.2.4 基本初等函数的导数公式	52
习题 2.2	53
2.3 高阶导数	53
习题 2.3	56
2.4 隐函数及由参数方程所确定的函数求导	57
2.4.1 隐函数的求导	57
2.4.2 对数求导法	59
2.4.3 由参数方程所确定的函数的导数	60
习题 2.4	61
2.5 函数的微分	62
2.5.1 微分的定义	62
2.5.2 可微的条件	63
2.5.3 微分公式及运算法则	63
2.5.4 微分的应用	65
习题 2.5	67
* 2.6 导数问题的 MATLAB 实现	67
* 习题 2.6	70
综合练习 2	70
第 3 章 微分中值定理与导数的应用	73
3.1 微分中值定理	73
3.1.1 罗尔 (Rolle) 定理	73



3.1.2 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理	75	3.8.5 求函数零点指令	121
3.1.3 柯西 (Cauchy) 中值定理	77	* 习题 3.8	123
习题 3.1	79	综合练习 3	123
3.2 洛必达法则	80	第 4 章 不定积分	126
3.2.1 $\frac{0}{0}$ -型未定式	80	4.1 原函数与不定积分	126
3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ -型未定式	81	4.1.1 原函数的概念与原函数存在定理	126
3.2.3 其他未定式	83	4.1.2 不定积分及其性质	127
习题 3.2	84	4.1.3 基本积分公式	130
3.3 泰勒公式	85	习题 4.1	132
习题 3.3	89	4.2 换元积分法	133
3.4 函数的单调性与极值	89	4.2.1 第一类换元积分法	133
3.4.1 函数单调性的判别法	89	4.2.2 第二类换元积分法	138
3.4.2 函数的极值	91	习题 4.2	142
3.4.3 函数的最值问题	95	4.3 分部积分法	143
习题 3.4	97	习题 4.3	148
3.5 曲线的凹凸性及函数作图	98	4.4 其他类型函数的积分	148
3.5.1 曲线的凹凸性及拐点	98	4.4.1 有理函数的积分	148
3.5.2 函数作图	101	4.4.2 三角有理式 $R(\cos x, \sin x)$ 的积分	150
习题 3.5	105	4.4.3 简单无理函数的积分	151
3.6 相关变化率、边际分析与弹性分析介绍	106	习题 4.4	152
3.6.1 相关变化率	106	* 4.5 不定积分问题的 MATLAB 实现	153
3.6.2 边际分析	107	* 习题 4.5	155
3.6.3 弹性分析	109	综合练习 4	155
3.6.4 增长率	110	第 5 章 定积分	158
习题 3.6	111	5.1 定积分的概念	158
* 3.7 曲率	111	5.1.1 两个实例	158
3.7.1 弧微分	111	5.1.2 定积分的定义	160
3.7.2 曲率及其计算公式	113	习题 5.1	163
3.7.3 曲率圆与曲率半径	115	5.2 定积分的性质	163
* 习题 3.7	116	习题 5.2	166
* 3.8 方程的近似解及其 MATLAB 实现	116	5.3 微积分基本公式	166
3.8.1 二分法	117	5.3.1 积分上限函数及其导数	167
3.8.2 切线法	117	5.3.2 牛顿-莱布尼茨公式	168
3.8.3 求解非线性方程的 MATLAB 符号法	119	习题 5.3	171
3.8.4 代数方程的数值解求根指令	120	5.4 定积分的换元法	172
		习题 5.4	176
		5.5 定积分的分部积分法	177
		习题 5.5	179



5.6 反常积分	180	7.2.5 伯努利方程	224
5.6.1 积分区间为无穷区间	180	习题 7.2	225
5.6.2 无界函数的反常积分	182	7.3 可降阶的高阶微分方程	225
习题 5.6	184	7.3.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型微分方程	225
*5.7 定积分的 MATLAB 实现	184	7.3.2 $y'' = f(x, y')$ 型微分方程	226
5.7.1 计算定积分的 MATLAB 符号 法	184	7.3.3 $y'' = f(y, y')$ 型微分方程	227
5.7.2 定积分的数值积分函数 举例	187	习题 7.3	228
*习题 5.7	189	7.4 高阶线性微分方程	228
综合练习 5	190	7.4.1 高阶线性微分方程解的结构	228
第 6 章 定积分的应用	192	7.4.2 n 阶常系数齐次线性微分方程	229
6.1 建立积分表达式的元素法	192	7.4.3 高阶常系数非齐次线性微分 方程	231
6.2 定积分在几何中的应用	194	习题 7.4	237
6.2.1 平面图形的面积	194	*7.5 MATLAB 解微分方程	237
6.2.2 体积	197	7.5.1 常微分方程的 MATLAB 符号 表示法	237
6.2.3 平面曲线的弧长	200	7.5.2 求解常微分方程的符号法—— 函数 dsolve	238
习题 6.2	203	7.5.3 常微分方程初值问题数值解 的 MATLAB 实现	240
6.3 定积分在物理学上的应用	203	*习题 7.5	243
习题 6.3	207	综合练习 7	243
*6.4 定积分在经济学中的应用	208	附录	245
*习题 6.4	212	附录 A 希腊字母	245
综合练习 6	213	附录 B 常用数学公式	245
第 7 章 微分方程	214	附录 C 基本初等函数	249
7.1 微分方程的基本概念	214	附录 D 几种常用的曲线方程及 其图形	252
习题 7.1	216	附录 E 积分表	254
7.2 一阶微分方程	217	部分习题参考答案	263
7.2.1 可分离变量的微分方程	217	参考文献	279
7.2.2 齐次方程	218		
7.2.3 可化为齐次方程的微分方程	220		
7.2.4 一阶线性微分方程	222		

第 1 章

函数与极限

函数是微积分学的主要研究对象，而极限是相应的研究工具。本章将在高中所学知识的基础上介绍函数、极限和函数的连续性等概念及它们的性质。

1.1 函数

1.1.1 预备知识

实数集是以实数为元素的集合，根据集合所包含的元素是否为有限个可将集合分为有限集和无限集。区间即为实数集中的无限集。

1. 区间

设 a, b 是两个实数，且 $a < b$ ，满足不等式 $a < x < b$ 的一切实数 x 的全体构成的数集称为开区间，记为 (a, b) ，即 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ ；满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的一切实数 x 的全体构成的数集称为闭区间，记为 $[a, b]$ ，即 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ ；满足不等式 $a < x \leq b$ 或 $a \leq x < b$ 的一切实数 x 的全体构成的数集称为半开区间，记为 $(a, b]$ 或 $[a, b)$ 。 $|b - a|$ 为上述区间的区间长度。

当区间长度为有限长时，该区间称为有限区间；当区间长度为无限长时，该区间称为无限区间。例如 $(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数构成的集合； $(a, +\infty)$ 表示所有大于 a 的实数构成的数集； $(-\infty, a)$ 表示所有小于 a 的实数构成的数集； $[a, +\infty)$ 表示所有大于或等于 a 的实数构成的数集； $(-\infty, a]$ 表示所有小于或等于 a 的实数构成的数集。

2. 绝对值

设 a 是一个实数， a 的绝对值用记号 $|a|$ 表示，即有定义

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a \geq 0 \text{ 时,} \\ -a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时,} \end{cases}$$



由此可知, $|a| \geq 0$, 且有

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

其几何意义是: $|a|$ 表示数轴上点 a 与原点 O 之间的距离.

下面两式经常用到:

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a;$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ 或 } x \geq a.$$

这里我们假定 $a > 0$. 由 $|x|$ 的几何意义可知, $|x| \leq a$ 表示点 x 与原点 O 之间的距离不超过 a , 而 $|x| \geq a$ 表示点 x 与原点 O 之间的距离不小于 a .

3. 邻域

设 a 和 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 所有满足不等式

$$|x - a| < \delta$$

的一切实数 x 的全体构成的数集称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$ 或 $U(a)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

点 a 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径.

如果仅仅研究 x 在点 a 邻近的变化情况, 就需要用到邻域. 有时 $x \neq a$, 则需要把邻域的中心去掉. 去掉中心后的点 a 的 δ 邻域, 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $\dot{U}(a)$, 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

1.1.2 函数的概念

在研究某一现象或变化过程时, 有些量始终取不变的值即常量(一般用字母 $a, b, c, \dots$ 表示), 还有一些量可取变化的值即变量(一般用字母 $x, y, z, \dots$ 表示), 它们之间相互关联, 遵从一定的变化规律.

下面我们来考察几个实例.

成本问题 设某厂生产某产品, 日产 x 单位, 它的日固定成本为 130 元, 生产一个单位产品的成本为 6 元, 那么该厂日产量 x 与日总成本 C 之间的依赖关系由 $C = 130 + 6x$ 给出, 当 $x = 30$ 单位时, $C = 310$ 元; 当 $x = 50$ 单位时, $C = 430$ 元, 即当产量 x 变化时, 成本 C 也随之而变化.

自由落体问题 设物体下落的时间为 t , 下落的距离为 s . 假定开始下落的时刻为 $t = 0$, 那么 s 与 t 之间的关系由 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 给出, 其中 g 是重力加速度. 在这个关系中, 距离 s 随时间 t 的变化而变化. 例如, 当 $t = 1\text{s}$ 时, $s = \frac{1}{2}g$; 当 $t = 3\text{s}$ 时, $s = \frac{9}{2}g$, 等等. 当下落时间 t 取定一个值 t_0 时, 对应的距离 $s = \frac{1}{2}gt_0^2$ 的值也就确定了.



上面列举的实际例子中抽去所考察问题的具体背景, 我们看到, 在上述关系中, 当其中一个变量在某一范围内每取定一个数值时, 另一个变量就有唯一确定的值与之对应. 这种两个变量之间的对应关系就是函数概念的实质.

我们还需注意到, 在上面的实例中, 变量的取值都有一定的范围. 成本问题中, 产品的日产量 x 取自然数, 成本 C 取正实数; 自由落体问题中, 时间 t 及距离 s 均不能取负值. 可见, 在每一个确定的关系中, 变量都具有明确的取值范围.

下面, 我们给出函数的定义.

定义 1.1 设 x, y 是两个变量, 当变量 x 在非空数集 D 中任意取定一个数值时, 如果依照某种对应法则 f , 变量 y 有唯一确定的数值与之对应, 那么, 称 y 是 x 的函数, 记为

$$y = f(x),$$

其中, x 称为自变量, y 称为函数 (或因变量). 数集 D 称为函数的定义域.

当 x 取 D 中的数值 x_0 时, 与 x_0 对应的 y 值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$.

当 x 遍取 D 中每一个值时, 对应的函数值全体组成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

借助于图像的直观形象来研究函数是很有益的. 为此, 首先应明确什么是函数的图像, 函数与其图像是什么关系.

给定函数 $y = f(x)$, 点集 $\{(x, y) \mid y = f(x)\}$ 所构成的图形, 即为函数 $y = f(x)$ 的图像 (图 1-1).

函数与其图像的关系是: 图像上任一点 (x, y) 的纵坐标 y 是横坐标 x 对应的函数值 $y = f(x)$.

这样我们可以通过分析函数图像的形态来研究函数.

根据函数的定义, 函数的定义域和对应法则是确定函数的两个重要因素. 在实际问题中, 函数的定义域应根据问题的实际意义来确定; 对于用一个解析式表示的函数, 它的定义域可由函数表达式本身来确定, 即使运算有意义. 若函数的自变量在不同范围内取值时有不同的解析式 (此类函数称为分段函数), 则它的定义域是其自变量各取值范围的并集.

例 1 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{9-x^2} + \sqrt{x+1};$$

$$(2) y = \lg(x^2 - 5x + 6);$$

$$(3) y = \arcsin \frac{x+1}{2}.$$

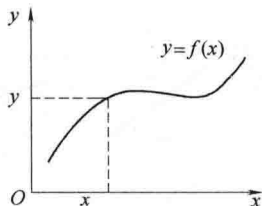


图 1-1



解 (1) 由 $9 - x^2 \neq 0$ 得 _____,

又由 $x + 1 \geq 0$ 得 _____,

所以函数的定义域为 $[-1, 3) \cup (3, +\infty)$.

(2) 由 $x^2 - 5x + 6 > 0$ 得 _____,

所以函数的定义域为 $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

(3) 由 $-1 \leq \frac{x+1}{2} \leq 1$ 得 $-2 \leq x+1 \leq 2$,

即 _____,

所以函数的定义域为 _____.

例2 作分段函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$$

的图像, 并指出其定义域.

解 在一个坐标系中作出对应区间上的图形(图 1-2), 因为 x 取 $(-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = (-\infty, +\infty)$, 所以此分段函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

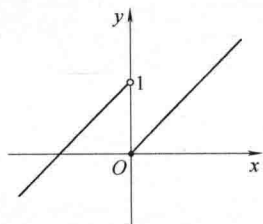


图 1-2

1.1.3 函数的基本性质

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 如果对于区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加 (或单调减少) 的. 单调增加 (或单调减少) 的函数统称为单调函数.

单调增加 (或单调减少) 函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升 (或下降) 的 (图 1-3).

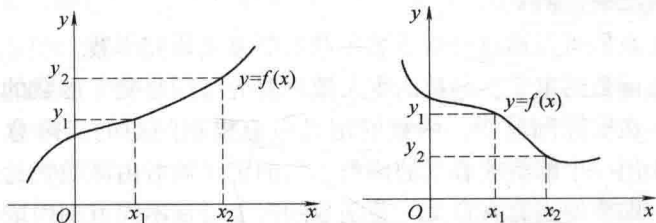


图 1-3

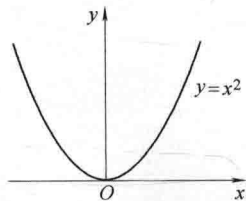


图 1-4

例如, 函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数(图 1-4), 但在区间 $(-\infty, 0]$ 内是单调减少的, 而在区间 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任一 $x \in D$,



$f(-x) = -f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数; 如果对于任一 $x \in D$, $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如, $f(x) = x^3$ 是奇函数, 因为 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$; 而 $f(x) = x^2$ 是偶函数, 因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

奇函数的图像是关于原点对称的. 因为, 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(-x) = -f(x)$. 如果 $A(x, f(x))$ 是图像上的点, 那么它关于原点对称的点 $A'(-x, -f(x))$ 也必在图像上(图 1-5a).

偶函数的图像是关于 y 轴对称的, 因为如果 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$. 如果 $A(x, f(x))$ 是图像上的点, 那么它关于 y 轴对称的点 $A'(-x, f(x))$ 也必在图像上(图 1-5b).

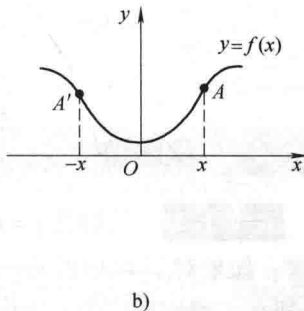
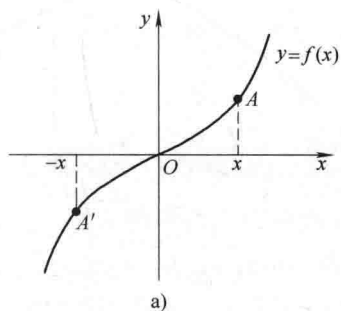


图 1-5

有的函数既非奇函数又非偶函数, 称为非奇非偶函数, 如 $y = 2x + 3$ 等.

而 $y = 0$ 既是奇函数又是偶函数.

3. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 如果存在一个正数 M , 使得对于区间 (a, b) 内的任意 x , 对应的函数值 $f(x)$ 恒有 $|f(x)| \leq M$, 就称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界; 如果这样的数 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内无界.

例如, 函数 $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \arctan x$, $f(x) = \operatorname{arccot} x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的; 函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $\dot{U}(0, \delta)$ 内是有界的.

而函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内是无界的, 函数 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内也是无界的, 等等.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的数 l , 使得对于任一 $x \in D$, 有 $(x \pm l) \in D$, 且 $f(x + l) = f(x)$ 恒成立, 则函数 $f(x)$ 称为周期函数, l 称为这个函数的周期. 通常我们所说的周期指的是



最小正周期，但并不是所有的周期函数一定会有最小正周期。

例如，函数 $\sin x$ ， $\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ ， $\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数。

一个周期为 l 的周期函数，它的图像在定义域内每个长度为 $|l|$ 的相邻区间上有着相同的形状(图 1-6)。

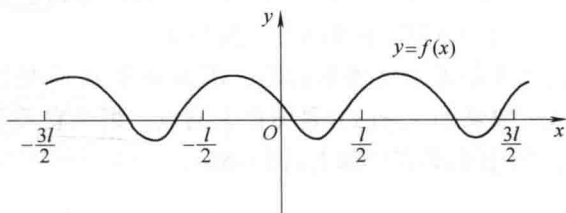


图 1-6

1.1.4 反函数

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 是定义在数集 D 上的单调函数，值域为 W ；如果对于 W 中的每一个 y 值，恰有一个数 $x \in D$ ，使得 $f(x) = y$ ，那么，我们把这个 x 记作 $f^{-1}(y)$ ，即 $x=f^{-1}(y)$ ，这样所确定的以 y 为自变量的函数，叫做 $y=f(x)$ 的反函数。它的定义域为 W ，值域为 D 。

习惯上，函数的自变量用 x 表示。所以， $y=f(x)$ 的反函数通常表示为 $y=f^{-1}(x)$ 。

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像，与函数 $y=f(x)$ 的图像关于(在 x, y 轴的单位长度相等的同一坐标系中)直线 $y=x$ 对称(图 1-7)。

例 3 求函数

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \text{ 的反函数.}$$

解 由 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 得

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0,$$

$$\text{有 } e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

因 $e^x > 0$ ，则

$$e^x = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{2},$$

于是

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

故函数 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 的反函数为

$$\underline{\hspace{2cm}}, x \in \mathbf{R}.$$

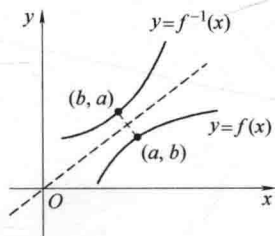


图 1-7



数学中称 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 为双曲正弦函数，它的反函数称为反双曲正弦函数，分别记为

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

类似地，有

$$\text{双曲余弦函数} \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x});$$

$$\text{双曲正切函数} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

它们的反函数是

$$\text{反双曲余弦函数} \quad \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1});$$

$$\text{反双曲正切函数} \quad \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

1.1.5 初等函数

1. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，统称为基本初等函数。它们的定义、定义域、图像及特性见附录 C。

另外，常用到线性函数 $f(x) = kx + b$ ，其图像为平面上的一条直线，定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。当 $k > 0$ 时，为单调递增函数；当 $k < 0$ 时，为单调递减函数； k 称为直线的斜率。

2. 复合函数

设 y 是 u 的函数， $y = f(u)$ ，而 u 又是 x 的函数， $u = \varphi(x)$ ，用 D 表示 $\varphi(x)$ 的定义域或其中一部分。如果对于 x 在 D 上取值时所得对应的 u 值，函数 $y = f(u)$ 是有定义的，则 y 成为 x 的函数，记为

$$y = f(\varphi(x)).$$

这个函数称为函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 的复合函数，它的定义域为 D ，变量 u 称作这个复合函数的中间变量。

例如， $y = \sin^2 x$ 是由 $y = u^2$ 及 $u = \sin x$ 复合而成的复合函数，它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，也是 $u = \sin x$ 的定义域；又如， $y = \sqrt{1-x^2}$ 是由 $y = u^{\frac{1}{2}}$ 及 $u = 1-x^2$ 复合而成的复合函数，它的定义域是 $[-1, 1]$ ，只是 $u = 1-x^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 的一部分。

必须注意，并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的。例如，函数 $y = \arcsin u$ 及 $u = 2+x^2$ ，就不能复合成一个复合函数。因为对于 $u = 2+x^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 中任何 x 值所对应的 u 值（均大于或等于 2）， $y = \arcsin x$ 都没有定义。



复合函数不仅可以由两个函数复合而成,也可以由更多个函数复合而成.例如, $y = \ln(1 + \sqrt{1+x^2})$ 就是由 $y = \ln u$, $u = 1 + v$, $v = w^{\frac{1}{2}}$, $w = 1 + x^2$ 复合而成的复合函数,它的定义域与 $w = 1 + x^2$ 的定义域同为 $(-\infty, +\infty)$.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合所形成的并且可以用一个式子表示的函数,称为初等函数.

本书所讨论的函数主要是初等函数.

1.1.6 建立函数关系式举例

在解决实际问题时,通常需要建立函数关系式.为此,需要明确问题中的自变量与因变量,再根据相关规律建立函数关系式.下面列举一些简单的实际问题,说明建立函数关系式的过程.

例4 用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形罐头盒,试将它的表面积表示成底面半径的函数.

解 设底面半径为 x ,表面积为 y ,如果罐头盒的高为 h ,由题意知 $\pi x^2 h = V$,那么

$$h = \frac{V}{\pi x^2}$$

从而

$$y = 2\pi x^2 h + \pi x^2$$

即

$$y = 2\left(\frac{V}{x} + \pi x^2\right), x \in (0, +\infty).$$

例5 弹簧受力则伸长,由实验知,在弹性限度内,伸长量与受力大小成正比.现已知一弹性限度为 P 的弹簧受力 9.8N 时,伸长量为 0.02m .求弹簧的伸长量与受力之间的函数关系.

解 设弹簧受力 F 时,其伸长量为 l ,由实验知, l 与 F 成正比,即

$$l = kF \quad (k \text{ 为比例常数}).$$

由已知条件 $F = 9.8\text{N}$ 时, $l = 0.02\text{m}$,代入上式,得

$$0.02 = k \cdot 9.8, \text{ 即 } k = \frac{1}{490}.$$

故有 l 与 F 间的函数关系:

$$l = \frac{F}{490}, F \in [0, P].$$

例6 某运输公司的货物运价为:距离在 $a(\text{km})$ 以内,每千米的