

纯粹数学与应用数学专著·典藏版



第 9 号

仿射微分几何

苏步青 著



科学出版社

纯粹数学与应用数学专著 第9号

仿射微分几何

苏步青 著



科学出版社

1982

内 容 简 介

仿射微分几何是一门发展较早的学科. 本书著者从 20 世纪 20 年代中期到 30 年代初期在这一学科中做了大量工作. 本书充分反映了著者的研究工作成果, 与国外同类著作相比, 出发点和重点都不相同, 显示了我国数学家用自己特有的方法写成的专著的特色. 全书分为五章, 其中最后一章是内容的重点.

本书可供大学数学系高年级学生、研究生、教师和以微分几何为专业的数学工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

纯粹数学与应用数学专著丛书: 典藏版/杨乐主编. —北京: 科学出版社, 2018.1

ISBN 978-7-03-055754-4

I. ①纯… II. ①杨… III. ①数学 IV. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 298639 号

责任编辑: 钱介福 李静科 / 责任校对: 赵彦超

责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1982 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2018 年 1 月 印 刷 印张: 14 1/2

字数: 290 000

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《纯粹数学与应用数学专著》丛书

主 编 华 罗 庚

副 主 编 (以姓氏笔划为序)

齐 民 友 江 泽 涵 吴 文 俊

吴 大 任 苏 步 青 柯 召

序 言

这一门古典的微分几何早在 20 世纪 20 年代就已建成. 1923 年出版了 W. Blaschke 著《微分几何》一书的第二卷, 它的内容就是仿射微分几何. 之后不久, G. Fubini 和 E. Čech 合著的《射影微分几何》二卷巨著相继问世. 这两门微分几何的形成显然是以 Klein 的几何分类思想为基础的, 而讨论的方法则是依赖于 Gauss 对曲面论所采取的基本形式. 正因为如此, 仿射微分几何的几何结构不像普通微分几何那样明显而直观, 特别是它与射影微分几何的关系并不那么清晰易见. 这两方面的遗留问题成了 20 年代后期直到 50 年代初期许多数学家的工作目标, 他们的研究成果丰富了仿射微分几何的内容. 详细文献可参见 Широков 父子合著的书 (参见书末所附参考书 [4]) 中的详细文献表. 举例来说, 旋转面在三维仿射空间的扩充, 最初出现于 1928 年, 当时, 德国几何学家 W. Süss 和本书著者独立地且几乎同时解决了这个问题.

尽管如此, 这方面的发展见于专著的还是不多. 著者有鉴于此, 就不揣主观片面之嫌, 以上述 Blaschke 的著作作为主要基础, 以著者 1928 年前后两三年间的研究成果为主要内容, 写成本书, 公之于世. 具体地说, 第一章和第二章的内容除了少数节段而外, 都摘自 Blaschke 的原著, 目的是要给读者简短扼要地介绍仿射微分几何中的曲线和曲面论的概貌, 也是为后面三章打下基础之用的. 从第二章的内容还可以看到现代整体微分几何的滥觞. 第三章是围绕曲面在其正常点的一个四阶锥面而写成的, 从中也阐明了仿射曲面论的几何结构, 特别是 Moutard 织面和 Čech 变换 $\sum_k$ 起着主要的作用. 在第四章, 著者根据自己的方式引进了仿射旋转面论, 它在高维仿射空间的拓广则见于附录 2. 必须指出: 这个理论牵涉曲面的 Darboux 曲线之处, 并为下一章提供研究基础. 最后第五章叙述了关于规范直线都成为仿射法线的曲面族的研究成果, 特别是, 关于 Čech 轴和仿射法线一致的曲面族的探讨. 后三章的一些主要内容已被采用到 Salkowski、Kruppa、Широков 等人的专著中 (参见书末所附参考书表), 但是, 大都语焉而不详, 以致很难了解仿射微分几何发展的全貌.

在本书撰写过程中, 著者虽然作了一番努力, 以期读者在学完高等几何和微分几何这两门课以后能够理解本书的内容, 但是其中不免有缺点或错误之处, 请读者有以教之.

苏步青

1980 年 12 月于上海

目 录

序言

第一章 概论	1
1.1 变换群与隶属的几何	1
1.2 仿射变换群和射影变换群	3
1.3 仿射平面曲线的基本定理	5
1.4 仿射空间曲线的基本定理	11
1.5 仿射空间曲面论大意	15
习题和定理	30
第二章 仿射平面曲线论中的若干整体问题	32
2.1 Blaschke 不等式	32
2.2 Minkowski-Böhrer 定理	35
2.3 六重点定理	38
2.4 椭圆弯曲的卵形线有关的两个定理	41
2.5 椭圆的一个等周性质	48
2.6 Sylvester 的三点问题	51
2.7 三角形的最大性质	53
习题和定理	56
第三章 仿射曲面论的几何结构	58
3.1 Transon 平面与仿射曲面法线的关系	58
3.2 Moutard 织面	61
3.3 主切密切织面偶	72
3.4 Čech 变换 $\sum_k$ 及其应用	76
习题和定理	90
第四章 仿射铸面与仿射旋转面论	92
4.1 仿射铸面及其变换	92
4.2 仿射旋转面	103
4.3 一般化仿射铸面与仿射旋转面	112
4.4 仿射旋转面的某些特征	119
4.5 仿射旋转面的新处理	124

4.6 仿射旋转面的拓广	127
习题和定理	133
第五章 仿射曲面论和射影曲面论间的若干关系	134
5.1 关于规范直线都成为仿射法线的曲面族的研究	134
5.2 第一类曲面 $\Sigma^{(k)}$	138
5.3 第二类曲面 $\Sigma^{(k)}$	142
5.4 主切等温曲面 $\bar{\Sigma}^{(-3)}$ 的表示	148
5.5 曲面 $\Sigma^{(1)}$	158
5.6 曲面 $\Sigma^{(-1)}$	172
5.7 曲面 $\Sigma^{(-1)}$ 的探讨	189
习题和定理	197
附录 1 仿射曲面论中的 Bonnet 问题	199
1.1 关于 Bonnet 极小曲面的注记	199
1.2 关于一个具有二系平面仿射曲率线的曲面应用的解析条件	200
1.3 具有平面仿射曲率线的仿射极小曲面	202
1.4 在情况 1° 下的曲面	204
1.5 在情况 2° 下的曲面	206
附录 2 高维仿射空间仿射超铸面与仿射超旋转面	214
2.1 仿射超铸面	214
2.2 仿射超旋转面	215
2.3 具有不同顶点曲线的二仿射超铸面的仿射可变形	220
参考书目	224

第一章 概 论

1.1 变换群与隶属的几何

F. Klein 在 1872 年著名的 “Erlangen Program” 中把几何归结到可递变换群的几何不变量的理论中, 而加以分类. 于是, 有一个可递变换群 G , 就有一种隶属于 G 的几何, 即 Klein 几何. 按照这种分类法看来, 欧氏几何应该是隶属于运动群的几何.

为了申述这个思想, 我们考察三维欧氏空间 E^3 的运动群, 而首先定义变换群. 用 x_1, x_2, x_3 表示一点在右手系直角坐标系下的坐标, 而且设

$$x_i = x_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

是变换集. 当下列三条件成立时, 称这集为变换群:

第一, 恒等变换 $x_i = \bar{x}_i$ 被包括在这集中;

第二, 集中任一变换的逆变换也被包括在其中;

第三, 集中两变换的接连变换或称为积的变换仍属于这集.

如果一个群的一般变换和 r 个独立变量或参数 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 有关, 就是说, 一当参数取定值时就获得群的最唯一的变换, 而且群的所有变换都是这样被决定的, 那么称这群为 r 参数变换群.

E^3 的运动是由平移和旋转组成的变换:

$$x_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \bar{x}_k + b_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

或简写为

$$x_i = a_{ik} \bar{x}_k + b_i, \quad (1.2)'$$

式中和下文规定 $i, k = 1, 2, 3$, 而且当同一指标出现于一项时 (例如, 上式中的 k), 约定关于这指标作从 1 到 3 的总和, 而省略和符 $\sum$.

如所知, (1.2) 中的系数 a_{ik} 满足下列正交条件:

$$a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik}, \quad (1.3)$$

其中, δ_{ik} 按 $i = k$ 或 $i \neq k$ 而分别取值 1 或 0.

另外, 矩阵

$$A = (a_{ik}) \quad (1.4)$$

的行列式等于 +1.

凡系数 a_{ik} 满足正交条件 (1.3) 的矩阵 A , 称为正交矩阵, 它显然和 3 个参数有关 (比如: 3 个欧拉角). 因此, 运动作为变换构成了一个和 6 个参数有关的集. 我们容易证明: 这集构成一个 6 参数变换群 G_6 .

在 G_6 中, 所有的 $a_{ik} = 0$ 时所对应的变换全体也构成一群, 即平移群. 同样, 在 (1.2) 中 $b_i = 0$ 时的变换全体构成旋转群, 它和平移群都是运动群 G_6 的子群, 只同 3 个参数有关的子群.

现在回到一般变换群 G 来. 设 I 是这样—个量, 当它经过 G 的任何变换变为量 $\bar{I}$ 时, 一定成立关系式:

$$\bar{I} = \Phi \cdot I. \quad (1.5)$$

那么, 我们称 I 为 G 的不变量 (或者关于 G 的所有变换的不变量). (1.5) 式中, Φ 仅与变换有关.

如果 $\Phi = 1$, 则 I 称为绝对不变量; 否则, 称为相对不变量. 一个群 G 的不变量还按其由对象的决定因素组成的不同结构又区分成代数的不变量和微分或积分不变量两种. 举例来说, E^3 中任何两点 (x_i) 和 (y_i) 间的距离:

$$d = \sqrt{(x_i - y_i)(x_i - y_i)}$$

是运动群的代数不变量. 又如欧氏平面 (x, y) 上, 椭圆

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

$$\det |a_{ik}| \neq 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

的长短轴长是代数不变量, 其曲率

$$\kappa = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}$$

是微分不变量, 其弧长

$$s = \int \sqrt{1 + y'^2} dx$$

则是积分不变量. 由此, 解析几何就分为代数几何和微分几何两种. 前者所研究的是整体的对象, 所以是整体几何. 相反, 微分几何所研究的对象一般说来是限于局部的范围, 例如: 曲线 $y = y(x)$ 在一点 P 的曲率, 当函数 $y(x)$ 在 P 的邻域里有其定义而且是二阶连续可微时, 便可对之进行探讨. 因此, 微分几何是局部几何. 实

实际上, 有一些整体几何的课题却是用微分几何方法予以解决的. 这样, 就形成了现代的整体微分几何¹⁾.

1.2 仿射变换群和射影变换群

设三维仿射空间 A^3 中一点 M 的坐标为 (x_1, x_2, x_3) , 原点为 O , 单位基向量系为 $\{e_1, e_2, e_3\}$. 那么我们有向量 $\overline{OM}$:

$$x = x_i e_i, \text{ 其中已省略了关于 } i = 1, 2, 3 \text{ 的和符 } \sum. \quad (2.1)$$

如果给定了两点 $A(x_i)$ 和 $B(y_i)$, 那么向量 AB 的坐标是 $\{y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3\}$.

现在, 取一个正则的 3×3 矩阵

$$A = (a_{ik}) \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (2.2)$$

于是 A 的行列式

$$A = \det(a_{ik}) \neq 0, \quad (2.3)$$

并作出变换

$$\bar{x}_i = a_{ik} x_k + b_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.4)$$

如果用 (x) 表示 3×1 矩阵

$$(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

和类似的记号 $(\bar{x})$ 和 (b) , 那么 (2.4) 也可写为矩阵的形式如下:

$$(\bar{x}) = A(x) + (b). \quad (2.5)$$

我们容易证明, 变换 (2.5) 的全体构成一个群. 以下, 称 (2.5) 为 A^3 的仿射变换, 而且称所构成的群为仿射变换群, 它含有 12 个参数.

从 (2.5) 还立即看出: A^3 的一个向量 v 经过仿射变换之后变为向量 $\bar{v}$, 它们之间成立的关系是

$$(\bar{v}) = A(v). \quad (2.6)$$

1) 参考苏步青: 微分几何五讲, 上海科学技术出版社 1979 年版. 英译本, 新加坡: 世界科学技术出版社 1980 年版.

显然, 作为变换的 (2.6) 全体, 构成一个变换群, 即在 (2.5) 中 $b = 0$ 所对应的中心仿射变换群; 它含有 9 个参数, 是仿射变换群的一个子群.

另一个重要的子群是, 当行列式 $A = 1$ 时所生成的等积仿射变换群, 它含有 11 个参数. A^3 中, 任何一个四面体的体积对于各顶点所受的变换 (2.5) 将增大 A 倍, 所以它是等积仿射变换群的一个不变量.

在一般的仿射变换 (2.5) 下, 共线的三点 $A(x), B(y), C(z)$ 变为共线的三点 $\bar{A}(\bar{x}), \bar{B}(\bar{y}), \bar{C}(\bar{z})$, 而且有向线段比 $\overline{AB} : \overline{BC}$ 不变. 从此得知, 直线变为直线, 平面变为平面, 而且平行性质不变.

仿射空间 A^3 的仿射几何就是讨论空间图形的仿射不变量和不变性质的一个分支, 它隶属于 A^3 的仿射变换群, 如同欧氏几何隶属于运动群一样. 这里我们必须看到, 运动群是仿射变换群的一个子群, 所以仿射几何的内容被包括在欧氏几何之中, 但是, 反过来一般是不成立的.

比仿射变换群更扩大的还有射影变换群, 它的最一般方程是

$$\rho \bar{x}_i = a_{ik} x_k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \quad (2.7)$$

式中 $\rho \neq 0$; (x_i) 表示三维射影空间 P^3 的一点 M 的齐次坐标; 同样, $(\bar{x}_i)$ 表示变换点 $\bar{M}$ 的齐次坐标, 而且行列式

$$A = \det |a_{ik}| \neq 0. \quad (2.8)$$

设 A, B, C, D 是 P^3 中的四个共线点. 容易看出: 经 (2.7) 变换后的四点 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ 仍然共线, 而且这四点 A, B, C, D 的交比 $d(A, B; C, D)$ 是不变量.

平面经射影变换后变为平面, 一个平面束变为另一个平面束; 束中的任何四平面 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 的交比 $d(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ 也是射影不变量. 讨论图形的射影不变量和不变性质的几何就是隶属于射影变换群的射影几何¹⁾.

射影变换群含有 15 个参数, 因为 (2.7) 中的齐次坐标之比 $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ 决定 P^3 的一点, 从而 16 个 a_{ik} 之比决定一个射影变换. 如果导入点的非齐次坐标 $X_\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$, 即

$$X_1 = \frac{x_1}{x_4}, \quad X_2 = \frac{x_2}{x_4}, \quad X_3 = \frac{x_3}{x_4},$$

便可把 (2.7) 改写为

$$X_\alpha = \frac{a_{\alpha\beta} X_\beta + a_{\alpha 4}}{a_{4\beta} X_\beta + a_{44}}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (2.9)$$

特别是, 当 $a_{4\beta} = 0 (\beta = 1, 2, 3), a_{44} \neq 0$ 时, 变换式 (2.9) 化为仿射变换 (2.5), 所以射影变换群是以仿射变换群为其真正子群的. 因此, 射影变换群下的射影几何的内容被包括在仿射几何中, 从而也在欧氏几何之中, 但是反过来, 一般是不成立的.

1) 参考苏步青: 高等几何讲义, 上海科学技术出版社, 1964 年版.

1.3 仿射平面曲线的基本定理

本节及下面两节都限于等积仿射变换群下的曲线论和曲面论的介绍¹⁾, 除了一般性质如平行性、有向线段比的不变性等外, 我们还有面积或体积的不变性值得利用.

设仿射平面上一条曲线是由方程

$$x = x(t) \quad (3.1)$$

表示的, 式中各函数关于 t 都是三阶连续可微的.

为了导出对应于欧氏平面弧长的积分不变量, 我们首先引进仿射距离的新概念.

一个点和在这里的一个方向为已知时, 称它为一个线素. 假设二线素 $x, x'; y, y'$ 为已知, 我们将决定一条抛物线使通过 x 和 y , 并在那里的切线方向分别是 x' 和 y' . 这样的抛物线是唯一的 (参见图 1), 因为四条直线唯一地决定一条抛物线, 而所论的图形则相当于每两条是“无限邻近”的情况. 设其参数方程为

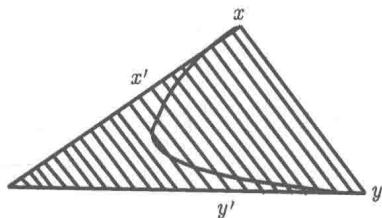


图 1

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{2!} \ddot{x}_0 t^2, \quad (3.2)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} x_0 = x(0) = x, \quad \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)_0 &= \text{const} \cdot x', \\ x_1 = x(t_1) = y, \quad \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)_{t_1} &= \text{const} \cdot y'. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

二线素 $x, x'; y, y'$ 所决定的三角形面积 f 是

$$f = \frac{1}{2} \frac{(x', y-x)(y-x, y')}{(x', y')}. \quad (3.4)$$

这里和以下, 我们单用 $(,)$ 代替行列式记号 $\det |,|$. 从 (3.3) 得出

$$f = \frac{1}{2} \frac{(\dot{x}_0, x_1 - x_0)(x_1 - x_0, \dot{x}_1)}{(\dot{x}_0, \dot{x}_1)}. \quad (3.5)$$

1) 参考 W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie, und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, Band 2, Berlin, 1923 年版, 以下简称 BlaschkeDG II.

然而

$$x_1 - x_0 = \dot{x}_0 t_1 + \ddot{x}_0 \frac{t_1^2}{2}, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_0 + t_1 \ddot{x}_0,$$

所以

$$f = \frac{1}{8} t_1^3 (\dot{x}_0, \ddot{x}_0). \quad (3.6)$$

同样的方法适用于抛物线在其两点 t_1, t_2 处的三角形面积的推导, 因而导致面积表示:

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{8} (t_2 - t_1)^3 (\dot{x}_0, \ddot{x}_0). \quad (3.7)$$

由此可见, 函数 $f^{1/3}$ 满足欧氏距离的类似加法定理: 当三点 $t_1 < t_2 < t_3$ 在同一条抛物线上时,

$$f^{1/3}(t_1, t_2) + f^{1/3}(t_2, t_3) = f^{1/3}(t_1, t_3). \quad (3.8)$$

二线素 $x, x'; y, y'$ 的仿射距离 r 是

$$r = 2 \cdot f^{1/3},$$

式中 f 表示由二线素 $x, x'; y, y'$ 决定的三角形面积, 而且立方根取实数值.

从 (3.7) 还可导出一种对于抛物线的参数规范化, 就是以参数 s 代替 t , 使得

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2} \right) = 1. \quad (3.9)$$

这条件显然关于等积仿射变换是不变的. 这个参数 s 除了点 $s = 0$ 的选取而外是确定了. 实际上,

$$s = (\dot{x}_0, \ddot{x}_0)^{1/3} t + \text{const.}$$

而且由 (3.7) 得到

$$f(s_1, s_2) = \frac{1}{8} (s_2 - s_1)^3. \quad (3.10)$$

我们还有这样的结论: 抛物线的二线素 s_1, s_2 的仿射距离等于 $s_2 - s_1$. 换言之, 二点 s_1, s_2 之间的抛物线弧具有仿射长度 $s_2 - s_1$.

其次, 我们将上述关于抛物线仿射弧长的概念扩充到一般曲线 (3.1) 去, 以推导它的仿射弧长 s .

假定

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \right) = (\dot{x}, \ddot{x})$$

在曲线的任何点不等于 0, 这就是说: 曲线无拐点. 另外假定积分

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{x}, \ddot{x})^{1/3} dt \quad (3.11)$$

存在. 那么决定一个参数 s 使得

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}\right) = (x', x'') = 1. \quad (3.12)$$

这种决定不仅对于等积仿射变换是不变的, 而且除了 $s = 0$ 的选择而外是确定了. 这是由于

$$x' = \dot{x} \frac{dt}{ds}, x'' = \ddot{x} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{x} \frac{d^2t}{ds^2},$$

成立关系

$$(x'x'') = (\dot{x}\ddot{x}) \left(\frac{dt}{ds}\right)^3,$$

因此按 (3.12) 就有

$$s = \int (\dot{x}\ddot{x})^{1/3} dt. \quad (3.13)$$

从假设得知, s 是 t 的单调函数而且反过来也是真的.

对 (3.12) 进行导微, 我们有

$$(x', x''') = 0. \quad (3.14)$$

所以二向量 x' 和 x''' 线性相关, 也就是 (因为 $x' \neq 0$)

$$x''' + kx' = 0, \quad (3.15)$$

式中 $k(s)$ 表示一个数量. 它可表成

$$k = (x'', x'''), \quad (3.16)$$

是所论曲线 (3.1) 的最简单微分不变量. 我们称 k 为仿射曲率, 称 x'' 为仿射法向量. 按 (3.14) 还导出

$$k = (x^{\text{IV}}, x'). \quad (3.17)$$

令 $\varphi = (\dot{x}, \ddot{x})$, 并经参数变换 $t = t(s)$, 我们容易算出

$$k = (x'', x''') = \frac{(\ddot{x}, \ddot{x})}{\varphi^5} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varphi^2} \right)_{tt}. \quad (3.18)$$

特别是取 $t = x_1$, 从而曲线是由方程

$$x_2 = x_2(x_1) \quad (3.19)$$

给定时, 我们导出

$$\left. \begin{aligned} x' &= \left\{ \ddot{x}_2^{-1/2}, \dot{x}_2 \ddot{x}_2^{-1/2} \right\}, \\ x'' &= \left\{ -\frac{1}{3} \ddot{x}_2^{-5/3} \ddot{x}_2, \ddot{x}_2^{1/3} - \frac{1}{3} \dot{x}_2 \ddot{x}_2^{-5/3} \ddot{x}_2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

和

$$k = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx_1^2} \ddot{x}_2^{-2/3} = -\frac{5}{9} \ddot{x}_2^{-8/3} \ddot{x}_2^2 + \frac{1}{3} \ddot{x}_2^{-5/3} \ddot{x}_2. \quad (3.21)$$

根据 $(x', x'') = 1$, 我们通过一个等积仿射变换把坐标原点移到曲线的点 x_0 , 并使有关的二向量 x'_0, x''_0 分别具有坐标 1, 0; 0, 1. 按 (3.20) 我们便获得曲线 (3.19) 在原点的归范展开:

$$x_2 = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{3k_0}{4!} x_1^4 + \frac{3k'_0}{5!} x_1^5 + \cdots, \quad (3.22)$$

式中 k_0, k'_0 分别表示 k, k' 在原点的值.

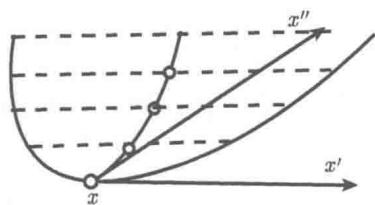


图 2

如图 2 所示, 在 x 引切线和曲线的平行弦, 各弦的中点画成点 x 的对应重心线, 那么后者在 x 的切线就是仿射法线.

同样, 称

$$k = k(s) \quad (3.23)$$

为曲线 (3.1) 的仿射自然方程. 和欧氏平面曲线论一样, 以给定的 $k(s)$ 为仿射曲率的曲线 $x(s)$ 必存在, 而且实际上, 除了等积仿射变换而外, 这

种曲线是唯一决定的.

作为一个特殊的但是重要的例子, 我们举出下列情况:

$$k = \text{const.}$$

首先假定 $k = 0$. 那么从 (3.15) 得到一般解:

$$x = x_0 + x'_0 s + \frac{1}{2} x''_0 s^2, \quad (x'_0, x''_0) = 1. \quad (3.24)$$

所以仿射曲率恒为零的唯一曲线是抛物线.

第二, 假定 $k = k^2 > 0$. 这时, 曲线可以表成

$$x_1 = a \cos k^{1/2} s, \quad x_2 = b \sin k^{1/2} s.$$

条件 $(x', x'') = 1$ 表明了

$$abk^{3/2} = 1.$$

因此, 我们得到作为解的一条椭圆

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad k = \left(\frac{\pi}{F}\right)^{2/3}, \quad (3.25)$$

式中 $F = \pi ab$ 表示椭圆的面积.

第三, 假定 $k = -k^2 < 0$. 这时, 我们有一条双曲线的解:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a \cosh(-k)^{1/2}s, x_2 = b \sinh(-k)^{1/2}s, \\ \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} &= 1, k = -(ab)^{-2/3}. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

所以双曲线是有负常数仿射曲率的唯一曲线.

以上所述充分表明了仿射曲率与普通曲率之间的类似性, 所不同者仅在于二次曲线代替圆 (包括直线) 而已. 从此引导我们讨论密切二次曲线的概念如下.

为此, 我们考察两条相交于一点 $x_0 = \bar{x}_0$ 的无拐点曲线 C 和 $\bar{C}$, 那么不妨假定这二曲线的仿射弧长 s 都是从 x_0 量起的, 而且把它们表成

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x'_0 s + x''_0 \frac{s^2}{2!} + \cdots, \\ \bar{x} &= \bar{x}_0 + \bar{x}'_0 s + \bar{x}''_0 \frac{s^2}{2!} + \cdots. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

当 $(x'_0, \bar{x}_0) = 0, x'_0 \neq \bar{x}'_0$ 时, 我们说: 二曲线在 x_0 “一阶” 或 “二点” 相切. 一般说来, 当

$$x'_0 = \bar{x}'_0, \dots, x_0^{(n-1)} = \bar{x}_0^{(n-1)}, \quad x_0^{(n)} \neq \bar{x}_0^{(n)} \quad (3.28)$$

($n > 1$) 时, 这二曲线 n 阶或 $(n+1)$ 点相切. 按照 (3.20) 可以这样断定: 这种定义和普通的相切重合, 因为在采取 x_2 轴, 使同公共切线不一致的措施下, 在 x_0 n 阶相切是等同于下列条件:

$$\frac{d^k(\bar{x}_2 - x_2)}{dx_1^k} \begin{cases} = 0, & \text{当 } k = 1, 2, \dots, n, \\ \neq 0, & \text{当 } k = n + 1. \end{cases} \quad (3.29)$$

如果 $\bar{C}$ 是抛物线 $\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{x}''_0 s + \frac{1}{2} \bar{x}''_0 s^2$, 那么立即看出: 在各点 x_0 有而仅有一条和所论曲线至少三阶相切的抛物线, 即

$$\bar{x} = x_0 + x'_0 s + \frac{1}{2} x''_0 s^2. \quad (3.30)$$

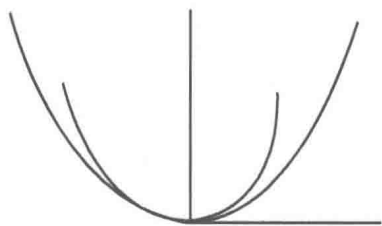


图 3

称它为曲线 C 在 x_0 的密切抛物线. 图 3 中的淡描曲线表示这条抛物线. 为了密切抛物线在切点有高于三阶的相切, 就是, 为了有一个稳定的密切抛物线, 必须有 $x_0''' = 0$, 或者按照 (3.15) 必须有

$$k_0 = 0. \quad (3.31)$$

如果我们取任何二次曲线为 $\bar{C}$, 那么在 C 的各点 x_0 可以要求至少有四阶相切的情况. 为

此, 必要条件是

$$x_0' = \bar{x}_0', \quad x_0'' = \bar{x}_0'', \quad x_0''' = \bar{x}_0'''.$$

可是 $x_0''' + k_0 x_0' = 0$, $\bar{x}_0''' + \bar{k}_0 \bar{x}_0' = 0$, 所以 C 和 $\bar{C}$ 在 x_0 的仿射曲率 k_0 和 $\bar{k}$ 必须相等. 另一方面, 微分方程 $\bar{x}''' + k_0 \bar{x}' = 0$ 在初始条件 $\bar{x}_0 = x_0$, $\bar{x}_0' = x_0'$, $\bar{x}_0'' = x_0''$ 之下有唯一的二次曲线 $\bar{C}$ 的解. 我们称 $\bar{C}$ 为 C 在 x_0 的密切二次曲线.

联系到上述的特例, 我们便看出:

曲线 C 在其非拐点 x_0 的密切二次曲线按照 C 在 x_0 的仿射曲率 k_0 为正, 为负或为零而分别是椭圆, 是双曲线或是抛物线.

我们对这三种可能性相应地可以这样说: C 在 x_0 是椭圆、双曲或抛物地弯曲. 当 $k > 0$ 时, 我们写出密切二次曲线的方程如下:

$$y(s, \sigma) = x(s) + \frac{\sin(\sqrt{k} \cdot \sigma)}{\sqrt{k}} x'(s) + \frac{1 - \cos(\sqrt{k} \cdot \sigma)}{k} x''(s), \quad (3.32)$$

式中 σ 表示密切二次曲线的仿射弧长.

此外, 我们讨论一个稳定密切二次曲线的条件, 也就是密切二次曲线在 x_0 要有高于四阶密切的条件. 为此, 充要条件是

$$\bar{x}_0^{IV} = x_0^{IV}.$$

然而从 $x''' + kx' = 0$ 和 $\bar{x}''' + k_0 \bar{x}' = 0$, 以及 (3.28) 经过导微, 我们在 x_0 处有

$$\begin{aligned} x_0^{IV} + k_0 x_0'' + k_0' x_0' &= 0, \\ \bar{x}_0^{IV} + k_0 \bar{x}_0'' &= 0. \end{aligned}$$

所以得出所求的条件:

$$k_0' = \left(\frac{dk}{ds} \right)_0 = 0. \quad (3.33)$$

称这样的点 x_0 为 C 的六重点.