工科类大学数学公共课程系列教学丛书

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

（上册）

曹殿立 马巧云 主编

科学出版社

工科类大学数学公共课程系列教学丛书
普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

（上册）

曹殿立　马巧云　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是普通高等教育"十三五"规划教材.内容包括函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、积分、定积分的应用、微分方程等.

本书注重内容的科学性、系统性,以及教材的适用性和通用性.在内容的编排上,注意概念实际背景的介绍,突出基本概念的系统理解和解题方法的把握.教材起点低、坡度缓、难点分散、脉络清晰、详略适当、重点突出,例题、习题及题型丰富.习题除按小节配置外,各章末还设有综合练习题,书末附有答案.

本书可作为高等院校工科类、管理类以及对高等数学有较高要求的经济类、非数学专业理科类各专业本科生的高等数学课程教材、教学参考书以及考研学习或自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/曹殿立,马巧云主编.—北京:科学出版社,2017.8
工科类大学数学公共课程系列教学丛书
普通高等教育"十三五"规划教材
ISBN 978-7-03-053849-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①曹… ②马… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 146520 号

责任编辑:张中兴 梁 清/责任校对:邹慧卿
责任印制:徐晓晨/封面设计:迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
北京京华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 8 月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2018 年 1 月第二次印刷 印张:21
字数:423 000
定价:45.00 元
(如有印装质量问题,我社负责调换)

《高等数学（上册）》编委会

主　编　曹殿立　马巧云

副主编　胡丽平　荆会芬　张香伟

编　者　马文雅　吕海燕　汪松玉　侯贤敏

前　言

高等数学是高等院校各专业重要的基础课，也是在自然科学、社会科学中广泛应用的数学基础.

本书按照教育部高等学校“工科类专业本科数学基础课程教学基本要求”，结合作者长期的高等数学教学实践，并在充分借鉴当前国内外同类教材的基础上编写而成. 在内容上突出了以下四个特点：

1. 简明实用，通俗易学. 略去了部分极限的精确定义和一些抽象、烦琐的理论证明，直接从客观世界所提供的模型和原理中导出基本概念，使表达更加简明，易于理解.

2. 突出基本概念和基本计算的教学. 在课程内容的编排上，注意明晰概念以及理清概念之间的内在联系，注意基本计算方法的系统把握，并设置较多的例题、习题和综合练习来进一步强化.

3. 突出数学的应用性. 引导学生理解概念的内涵和背景，培养学生用高等数学的思想和方法分析、解决问题的能力.

4. 体现工科特色. 较多地设置了有关工程、机械、电子、能源、交通、食品工程、生物工程、环境工程以及经济管理等方面的实例，突出高等数学在工科专业中的应用，为学生学习专业知识奠定基础.

参加本书编写的有河南农业大学的曹殿立、马巧云、胡丽平、马文雅、吕海燕、汪松玉、侯贤敏，河南财经政法大学的荆会芬，郑州师范学院的张香伟，最后由曹殿立统一定稿.

东华大学的秦玉明教授仔细审阅了全稿，并提出了许多意见和建议，在此表示由衷的谢意！

对科学出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动表示衷心感谢！

虽然我们十分努力，但由于水平所限，难免存在疏漏与不妥之处，恳请读者批评指正.

编　者

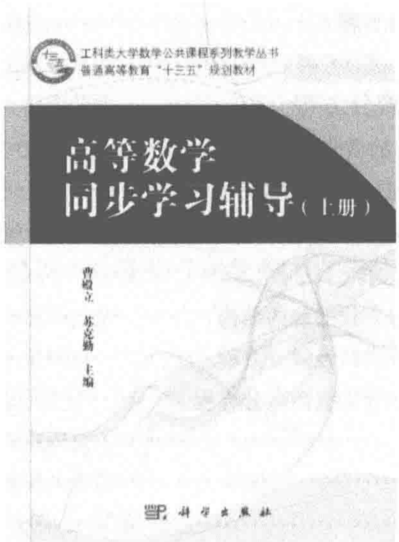
2017 年 3 月 1 日

本书同步学习辅导教材《高等数学同步学习辅导》(上册)(曹殿立,苏克勤主编)注重课程内容的系统归纳与总结,突出典型例题的示范讲解,注重思路分析和方法归纳,提供主教材**全部习题及综合练习题的详尽解答**,含历年典型考研真题,提前体验典型考研题型.

同步学习辅导教材为您提供**知识总览、典型例题、历年考研典型真题、习题与综合练习题详解**等丰富教学内容,助您学有所成!

书名:《高等数学同步学习辅导》(上册)

书号:978-7-03-053851-2　定价:43.00 元



扫辅导书二维码,提高等数学成绩.科学出版社电子商务平台上本辅导书的购买二维码链接如下:

目 录

第 1 章　函数的极限与连续

函数的极限与连续是高等数学的基础，它突出地表现了不同于初等数学的特点，为我们思考和解决实际问题提供了有效的方法. 本章主要介绍函数、极限、连续等基本概念以及它们的有关性质，为学习后续章节做好准备.

1.1　函　　数

1.1.1　区间与邻域

1.1.1.1　集合

定义 1.1　具有特定属性的对象所组成的总体称为一个**集合**. 组成这个集合的对象称为该集合的**元素**.

通常用大写英文字母 A,B,C 等表示集合，用小写英文字母 a,b,c 等表示元素. 若 a 是集合 A 的元素，就记作 $a\in A$；若 a 不是集合 A 的元素，记作 $a\notin A$.

有限多个元素组成的集合称为**有限集**，无限多个元素组成的集合称为**无限集**. 如果这个集合不含有任何元素，则称该集合为**空集**，记为 $\varnothing$. 一般地，全体自然数的集合记为 $\mathbf{N}$，全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$，全体有理数的集合记为 $\mathbf{Q}$，全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$.

表示集合的方法通常有两种，一种是**列举法**，列出集合中的所有元素. 例如，由方程 $x^2-3x+2=0$ 的根组成的集合可以表示为 $A=\{1,2\}$. 另一种为**描述法**，描述出集合中元素的特征，即 $A=\{x\mid x$ 具有的特征$\}$. 例如，方程 $x^2-3x+2=0$ 的根的集合可以表示为 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$.

本书中的集合主要是数集，即元素都是数的集合. 如果没有特别说明，提到的数都是实数. 同时，由于实数与数轴上的点一一对应，数集也称为**点集**.

1.1.1.2　区间

设 $a,b\in\mathbf{R},a<b$，常见的区间有

(1) **开区间**　$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$.

(2) **闭区间** $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

(3) **半开区间** $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$； $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

以上区间都是**有限区间**.

此外还有几类**无限区间**,类似地表示如下：

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\};\quad [a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\};\quad (-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}.$$

需要注意的是,“∞”是表示无限性的一种记号,读作“**无穷大**”.

$+\infty$可以理解为数轴正向的无穷远处,它大于数轴正向任何一个确定点的值；$-\infty$可以理解为数轴负向的无穷远处,它小于数轴负向任何一个确定点的值. ∞, $+\infty$, $-\infty$只是记号不是数,不表示任何点或任何值,不能像数一样进行运算. 全体实数集 $\mathbf{R}$ 记为$(-\infty,+\infty)$.

1.1.1.3 邻域

定义 1.2 设 a 和 δ 是两个实数,$\delta>0$,数集$\{x||x-a|<\delta\}$称为**点 a 的 δ 邻域**,记作 $U(a,\delta)$. 点 a 为**邻域中心**,δ 为**邻域半径**.

显然,$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$. 如图 1.1 所示.

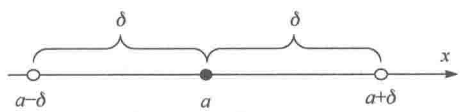


图 1.1

同理,称集合 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$为 a 的 δ **去心邻域**,如图 1.2 所示.

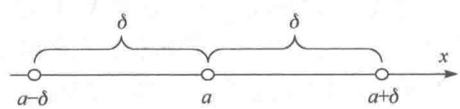


图 1.2

此外,区间$[a,a+\delta)$,$(a,a+\delta)$,$(a-\delta,a]$,$(a-\delta,a)$依次称为点 a 的 δ **右邻域**、点 a 的 δ **右去心邻域**、点 a 的 δ **左邻域**以及点 a 的 δ **左去心邻域**.

需要注意的是,δ 通常代表一个很小很小的正数,也就是说,邻域 $U(a,\delta)$(或去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$)是一个以点 a 为中心的半径极小的开区间.

1.1.2 函数的定义

定义 1.3 设 D 和 W 是两个实数集,f 是一个对应规则. 在此规则下,若对于每一个 $x\in D$,在 W 中都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作

$y=f(x)$. 数集 D 叫做函数的**定义域**, x 叫做**自变量**, y 叫做**因变量**.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$. W 的子集 $f(D)=\{y\mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

例 1.1　求函数 $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{x}{2}$ 的定义域.

解　要使函数有意义，必须使 $x^2-4\geqslant 0$ 且 $\left|\dfrac{x}{2}\right|\leqslant 1$，即 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -2$ 且 $-2\leqslant x\leqslant 2$，所以该函数的定义域是 $\{x\mid x=\pm 2\}$.

函数的定义域是使函数有意义的自变量的变化范围. 在实际问题中，应根据问题的实际意义来确定. 如设做自由落体运动的物体开始下落时刻为 $t=0$，落地时刻为 $t=T$，则函数 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的定义域为 $D=[0,T]$.

由函数定义可知，一个函数由其对应规则 f 及定义域 D 完全确定. 如果两个函数的定义域和对应规则都相同，那么这两个**函数是相同的**.

例如，函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，而且对应规则也相同，因而这两个函数是相同的.

而函数 $f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是不相同的. 这两个函数的对应规则相同，但 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

显然，$f(x)=\sin x$ 与 $g(t)=\sin t$ 是同一个函数.

需要说明的是，在定义 1.3 中，要求定义域中的每一个 x，都有唯一确定的 y 与之对应. 但 x 与 y 还存在着诸如 $x^2+y^2=1$ 这样的对应关系. 显然，对每一个 $x\in[-1,1]$，由 $x^2+y^2=1$ 确定的是 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$，y 的值不唯一. 为表达方便，常称之为**多值函数**，把定义 1.3 中的函数称为**单值函数**.

对于多值函数，往往只需要附加一些条件，就可以化为单值函数. 例如在 $x^2+y^2=1$ 中限定 $y\geqslant 0$，则确定了一个单值函数 $y=\sqrt{1-x^2}$；限定 $y\leqslant 0$，则得到了另一个单值函数 $y=-\sqrt{1-x^2}$. 除特别说明外，本书中所说的函数都是单值函数.

例 1.2　常数函数 $y=1$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $f(D)=\{1\}$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1.3 所示.

例 1.3　函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

称为**绝对值函数**，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $f(D)=[0,+\infty)$，如图 1.4 所示.

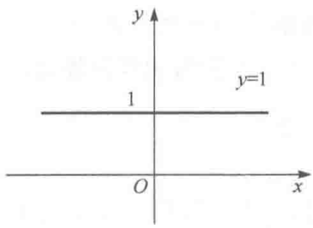


图 1.3

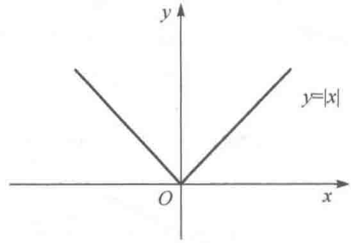


图 1.4

例 1.4 函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $\{-1,0,1\}$,如图 1.5 所示.

例 1.5 设 x 为任意实数,不超过 x 的最大整数,记作$[x]$.

例如,$[-0.1]=-1$,$[0.99]=0$,$[1]=1$,$[\sqrt{3}]=1$. 把 x 看作自变量,函数 $y=[x]$称为**取整函数**. 它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为整数集 $\mathbf{Z}$. 如图 1.6 所示.

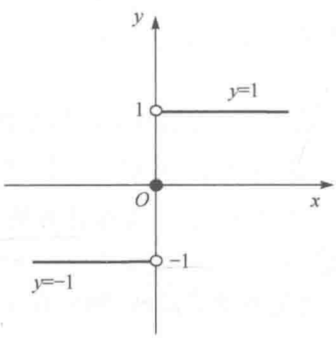


图 1.5

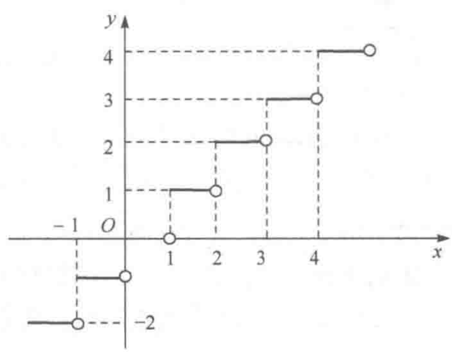


图 1.6

例 1.6 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为$\{1,0\}$.

例 1.3—例 1.6 的几个函数有一个共同的特征:在定义域的不同范围内,有不同的对应规则. 这类函数称为**分段函数**.

分段函数在实际生活中广泛存在. 如出租车的计价与行驶里程的关系;阶梯水

价与用水量的关系;个人所得税分段税率与个人收入的关系等.

分段函数的对应规则是由自变量所在的范围确定的. 在求分段函数的函数值时,应根据自变量所在的范围,选择相应的对应规则.

例如,对于函数

$$y=f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x\leqslant 1, \\ \ln x, & x>1, \end{cases}$$

因为 $0\in(-\infty,1]$,所以 $f(0)=e^0-1=0$;因为 $e\in(1,+\infty)$,所以 $f(e)=\ln e=1$.

例 1.7　设 $f(x)=\begin{cases} x^3+4x+1, & x\geqslant 1, \\ x+2, & x<1. \end{cases}$ 求 $f(x+4)$的定义域.

解　将 $f(x)$及定义域中的 x 分别用 $x+4$ 替换,得

$$\begin{aligned} f(x+4) &= \begin{cases} (x+4)^3+4(x+4)+1, & x+4\geqslant 1, \\ (x+4)+2, & x+4<1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^3+12x^2+52x+81, & x\geqslant -3, \\ x+6, & x<-3. \end{cases} \end{aligned}$$

故 $f(x+4)$的定义域为$(-\infty,-3)\cup[-3,+\infty)=(-\infty,+\infty)$.

1.1.3　函数的几何性质

1.1.3.1　有界性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$. 若存在实数 $K>0$,对任意的 $x\in D$ 都有

$$|f(x)|\leqslant K,$$

则称函数 $f(x)$在 D 上**有界**.

例如函数 $y=\sin x$,对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $|\sin x|\leqslant 1$,所以它在$(-\infty,+\infty)$上有界;而函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上无界.

函数的有界性还可以等价地表述为

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,若存在两个实数 m 和 M,对任意的 $x\in D$ 都有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 D 上**有界**,其中 m 称为 $f(x)$在 D 上的**下界**,M 称为 $f(x)$在 D 上的**上界**.

显然,函数在 D 上有界的充要条件是它在 D 上既有上界又有下界. 有上界而无下界,有下界而无上界,既无上界又无下界,都是无界的.

1.1.3.2　单调性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,若对任意的 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$$(f(x_1)\geqslant f(x_2))$成立,则称 $f(x)$在 D 上**单调增加(减少)**. 上述不等式中若等号不成立,则称 $f(x)$在 D 上**严格单调增加(减少)**. 单调增加或单调减少的函数

均称为**单调函数**.

若 $f(x)$在某个区间上为单调函数,则称该区间为函数 $f(x)$的**单调区间**.

例如,$y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上是严格单调增加的,称$(-\infty,+\infty)$为 $y=x^3$ 的严格单调增加区间(图 1.7);$y=x^2$ 的严格单调减少区间为$(-\infty,0)$,严格单调增加区间为$(0,+\infty)$,但 $y=x^2$ 在其整个定义域$(-\infty,+\infty)$上不是单调的(图 1.8).

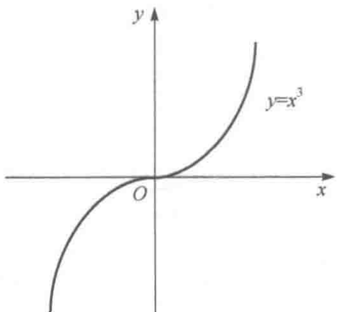


图 1.7

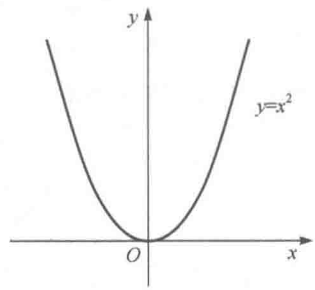


图 1.8

函数 $y=[x]$在$(-\infty,+\infty)$上单调增加但不是严格单调增加,因为对于任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,当 $x_1<x_2$ 时,有$[x_1]\leqslant[x_2]$.

1.1.3.3 奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称.若对任意 $x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为**奇函数**;若对任意的 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为**偶函数**.

例如 $y=\sin x$,$y=x^3$ 是奇函数;$y=\cos x$,$y=x^2$ 是偶函数;$y=\sin x+\cos x$,$y=x^2+x^3$ 既不是奇函数也不是偶函数.

一般地,两个奇函数(偶函数)相加或相减得到的函数为奇函数(偶函数);两个奇函数(偶函数)相乘或相除得到的函数为偶函数;一个奇函数与一个偶函数相加或相减得到的函数既不是奇函数也不是偶函数;一个奇函数与一个偶函数相乘或相除得到的函数是奇函数.

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

例 1.8 判定函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性.

解 因为

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$$
$$=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2})^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$