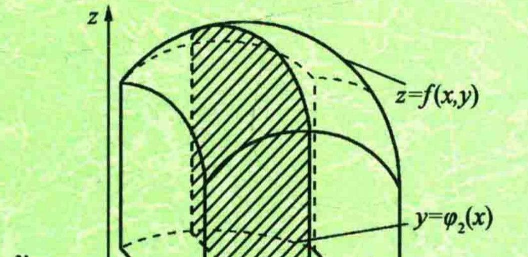
21世纪应用型本科院校规划教材

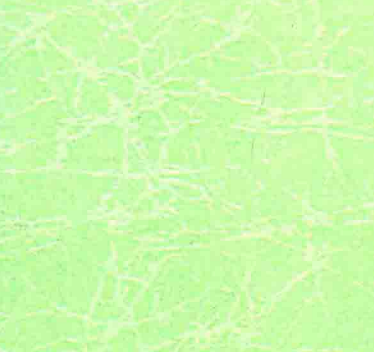
高等数学

Advanced Mathematics

下

主编 陈静 陈凌





南京大学出版社

21世纪应用型本科院校规划教材

高等数学 下

主　编　陈　静　陈　凌
副主编　徐海燕　王丙均　吴凤干
　　　　秦仁杰　王奋平

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下 / 陈静，陈凌主编. — 南京：南京大学出版社，2017.12

(21 世纪应用型本科院校规划教材)

ISBN 978-7-305-19689-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… ②陈… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 303625 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　　编 210093
出 版 人 金鑫荣

丛 书 名 21 世纪应用型本科院校规划教材
书　　名 高等数学(下)
主　　编 陈　静　陈　凌
责任编辑 戴　松　王南雁　　编辑热线 025-83593947

照　　排 南京理工大学资产经营有限公司
印　　刷 南京人文印务有限公司
开　　本 787×1092　1/16　印张 16.75　字数 364 千
版　　次 2017 年 12 月第 1 版　2017 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-19689-8
定　　价 38.00 元

网　　址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025)83594756

目　　录

第八章　空间解析几何与向量代数

在中学里，我们曾学过平面解析几何，通过建立一个平面直角坐标系，将平面上的点与一个二元有序数组对应起来，使平面上的一条直线或曲线，与某个代数方程相对应，这样就可以用代数方法来研究几何问题. 空间解析几何是平面解析几何的推广，它是在三维空间里进行这类问题的研究.

空间解析几何的研究要比平面解析几何复杂，由于向量是研究空间问题的一个有力工具，我们将在中学学过的平面向量基础上将其扩展到三维空间中.

本章将介绍向量的概念、向量的运算并建立空间直角坐标系，讨论向量的坐标表示. 在空间解析几何中，介绍一些重要的曲面和空间曲线及它们的方程，并以向量为工具讨论空间的平面与直线.

第一节　向量　空间直角坐标系

一、向量的概念

我们首先来作一简单的回顾.

在物理学中，有许多量不仅有大小而且有方向的特征，例如位移、速度等. 我们称既有大小又有方向的量为**向量**(或**矢量**)(如图 8-1 所示).

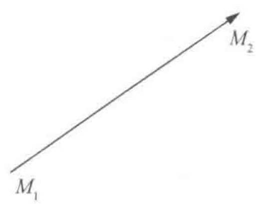


图 8-1

在数学中，往往用有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示该向量的大小，有向线段的方向表示该向量的方向. 以 M_1 为起点，M_2 为终点的有向线段表示的向量，记为$\overline{M_1M_2}$. 有时用一个粗体字母或者上面带有箭头的字母来表示，比如用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}$ 或者$\vec{a}$，$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$来表示.

我们有以下几点说明：

(1) **自由向量**：由于一切向量的共性是既有大小又有方向，所以在数学上我们只讨论与向量起点无关的向量，并称之为**自由向量**(下简称**向量**).

(2) **向量相等**：自由向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等且方向相同，那么说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 即经过平移后完全重合的向量是**相等**的.

(3) **向量的模**:向量的大小叫作**向量的模**,即有向线段的长度称为其模. 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$,$\vec{a}$,$\boldsymbol{a}$的模依次记作$|\overrightarrow{M_1M_2}|$,$|\vec{a}|$,$|\boldsymbol{a}|$.

(4) **单位向量**和**零向量**:模为 1 的向量叫作**单位向量**;模等于零的向量叫作**零向量**,记作$\vec{0}$或$\mathbf{0}$,零向量的方向可以是任意的,但规定一切零向量都相等.

(5) **负向量**和**平行向量**:两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,若长度相等,方向相反,则称它们互为**负向量**,用 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 或者 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$ 表示;若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或者相反,则称 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为**平行向量**,记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

(6) **向量共线**:当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共起点在一条直线上. 因此,两向量平行也称两**向量共线**.

(7) **向量共面**:设有 $n(n\geqslant 3)$个向量,当把它们的起点放在同一点时,这 n 个向量终点和公共起点在一个平面内,则称这 n 个**向量共面**.

二、向量的线性运算

在研究物体受力时,作用于一个质点的两个力可以看作两个向量. 而它的合力就是以这两个力作为边的平行四边形的对角线上的向量. 我们现在讨论向量的加法就是对合力这个概念在数学上的抽象和概括.

1. 平行四边形法则

已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,以任意点 O 为始点,分别以 A,B 为终点,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,再以 OA,OB 为边作平行四边形 $OACB$,对角线的向量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,称为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 之和,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(如图 8-2($a$)所示).

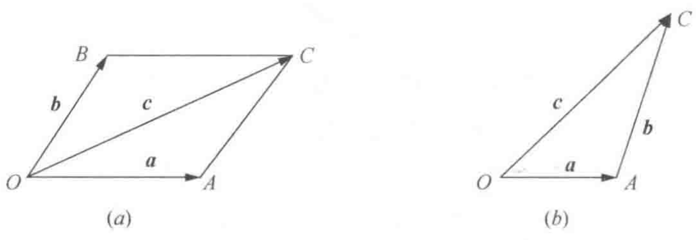


图 8-2

由 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的过程叫作向量的加法,这种用平行四边形的对角线上的向量来规定两向量之和的方法叫作向量加法的**平行四边形法则**. 若两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 在同一直线上(或者平行),则两向量的和规定为:

(1) 若 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 同向,其和向量的方向就是 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的共同方向,其模为 $\boldsymbol{a}$ 的模和 $\boldsymbol{b}$ 的模之和.

(2) 若 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 反向,其和向量的方向为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 中较长的向量的方向,其模为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 中较大的模与较小的模之差.

2. 三角形法则

已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,现在以任意点 O 为始点,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,再以 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 为始点,作$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,即将两向量首尾相连. 连接 OC,且令$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,即得 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种方法称为向量加法的三角形法则(如图 8 - 2(b)所示).

向量加法的三角形法则的实质是:

将两个向量的首尾相连,则一向量的首指向另一向量的尾的有向线段就是两个向量的和向量.

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,我们有:

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0};$$
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

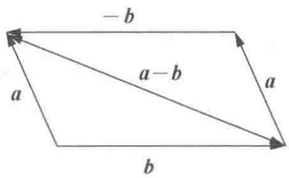


图 8 - 3

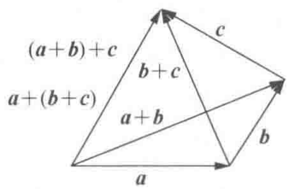


图 8 - 4

由三角形法则可得向量的减法:我们规定 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 只要把与 $\boldsymbol{b}$ 长度相同而方向相反的向量$-\boldsymbol{b}$ 加到向量$\boldsymbol{a}$ 上. 由图 8 - 3 可见,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 是平行四边形另一对角线上的向量.

向量的加法满足下列运算规律:

(1) 交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(2)的验证可由图 8 - 4 得到.

由于向量的加法满足交换律、结合律,三个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 之和就可以简单地记为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,其次序可以任意交换.

一般地,对于 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$,⋯, $\boldsymbol{a}_n$,它们的和可记作 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$. 它们之间不需加括号,各向量相加次序可以任意交换.

按向量相加的三角形法则,可得 n 个向量相加的法则如下:使前一向量的终点作为下一向量的起点,相继作向量 $\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,⋯, $\boldsymbol{a}_n$,再以第一向量的起点为起点,最后一个向量的终点为终点作一向量,这个向量即为所求的这 n 个向量的和.

例 1　证明:三角形两边的中点的连线平行于第三边,且长等于第三边的一半.

证明　记△ABC 的三边分别为 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CA}$,E,F 分别为 AB,AC 的中点,

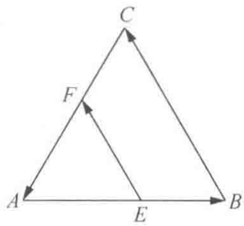


图 8 - 5

如图 8 - 5 所示,知:

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

所以

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

故
$$EF=\frac{1}{2}BC.$$

3. 向量与数量的乘法

设 λ 是一个实数,向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 规定为

(1) 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 表示一向量,其方向与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同,其模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 λ 倍,即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$;

(2) 当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,即 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

(3) 当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 表示一向量,其方向与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反,其模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍,即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

特别地:当 $\lambda=-1$ 时,$(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

数量和向量的乘积满足下列运算规律(以下 λ,μ 是实数):

(1) 结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$. (1.1)

因为由向量和数的乘积可知:向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$,$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$,$(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$ 是平行的三个向量,并且它们的方向也是相同的,它们的大小如下:

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|(\mu\lambda)\boldsymbol{a}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|,$$

所以可得:
$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a}.$$

(2) 分配律:
$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},\tag{1.2}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.\tag{1.3}$$

证明略.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此我们常用向量与数的乘积来表达两个向量的平行关系,有如下定理:

定理一　向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是:存在不全为 0 的实数 λ_1,λ_2,使 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

定理一也可以改写为

定理二　设 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是:存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

证明略.

设 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量.显然,$|\boldsymbol{a}^0|=1$,由于 $\boldsymbol{a}^0$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,且 $\boldsymbol{a}^0\neq\boldsymbol{0}$,所以存在一个正实数 λ,使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}^0$.

现在我们来确定这个λ,在$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}^0$的两边同时取模,

$$|\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}^0|=\lambda|\boldsymbol{a}^0|=\lambda\cdot 1=\lambda,$$

所以$\lambda=|\boldsymbol{a}|$,即得:

$$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0=\boldsymbol{a}.$$

现在规定,当$\lambda\neq 0$时,$\frac{\boldsymbol{a}}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$.

由此可得:$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,即一非零向量除以自己的模便得到一个与其同向的单位向量.

例 2　已知平行四边形两邻边向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,其对角线交点为$M$,求$\overrightarrow{OM}$,$\overrightarrow{MA}$,$\overrightarrow{MB}$.

解　如图 8-6 所示，显然$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$,

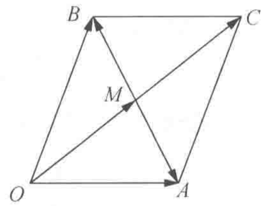


图 8-6

又　$$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

所以　$$2\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

得　$$\overrightarrow{OM}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}.$$

又因为　$$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},$$

即　$$\overrightarrow{MA}+\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}=\boldsymbol{a}.$$

因此　$$\overrightarrow{MA}=\boldsymbol{a}-\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2},$$

$$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MA}=\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2}.$$

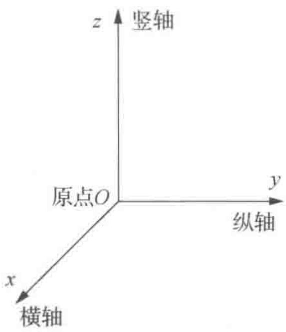
三、空间直角坐标系与空间点的直角坐标

1. 空间直角坐标系

在研究空间解析几何的开始,我们首先建立一个空间直角坐标系.

过空间一个定点O,和三个两两垂直的单位向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,就确定了三条都以$O$为原点的两两垂直的数轴,它们都以$O$为原点且一般来说都具有相同的单位长度,这三条轴分别叫作x**轴**(**横轴**)、y**轴**(**纵轴**)、z**轴**(**竖轴**),统称为**坐标轴**. 它们的正方向要符合右手法则,即以右手握住z轴,当右手的四个手指从x轴正向以$\frac{\pi}{2}$角度转向y轴正向时,大拇指的指向就是z轴的正向(如图 8-7 所示),这样的三条坐标轴就组成了一个**空间直角坐标系**,点O叫作**坐标原点**(或**原点**).

在某些书中,这种坐标轴又称为空间直角右手坐标系. 因为相应的还有一个左手坐标系,但不常用. 本书中,使用右手坐标系.



空间直角坐标系

图 8-7

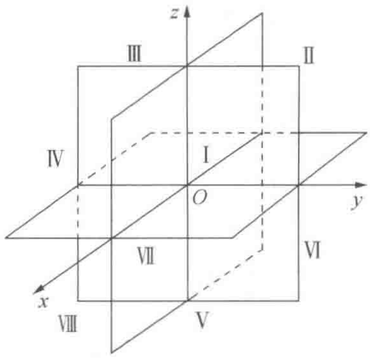


图 8-8

通常把 x 轴和 y 轴置于水平面上，而 z 轴则是铅垂线，三条坐标轴中的任意两条坐标轴可以确定一个平面，分别叫作 xOy **面**、yOz **面**和 zOx **面**，这样定出的三个平面统称为**坐标面**，三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫作一个**卦限**，含有 x 轴、y 轴及 z 轴正半轴的那个卦限叫作**第一卦限**，其他**第二、三及四卦限**在 xOy 面上方，按逆时针方向确定，在 xOy 面下方与第一至第四卦限相对应的是第五至第八卦限. 这八个卦限分别用Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示(如图 8-8 所示).

2. 空间点的直角坐标

空间直角坐标系建立以后，我们就可以建立空间的点与三元有序数组之间的对应关系.

对于空间中任意一点 M，过 M 作三个平面，分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，且交点分别为 P,Q,R(如图 8-9 所示). 这三个点分别在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x,y,z. 这样点 M 就唯一地确定了一个有序数组(x,y,z).

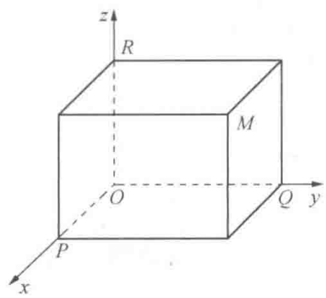


图 8-9

反之，对任意一个三元有序数组(x,y,z)，在空间中总可以确定唯一的点 M. 事实上，在 x 轴上，取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上，取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上，取坐标为 z 的点 R. 经过 P,Q,R 分别作平行于坐标面 yOz，zOx，xOy 的平面，这三个平面相互垂直，且交于一点 M. 显然，点 M 是由三元有序组(x,y,z)唯一确定的.

从上面两个方面我们可以知道，在建立空间直角坐标系后，空间的点 M 和三元有序数组(x,y,z)之间建立了一个一一对应的关系. 这组数(x,y,z)就称为点 M 的**坐标**，并依次称 x,y 和 z 为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**，通常记为 $M(x,y,z)$. 根据坐标画点时，可按图 8-9 的形式进行.

坐标面和坐标轴上的点，其坐标各有一些特征，这里就不详细描述了. 而各卦限内的点(除去坐标面上的点外)的坐标符号如下：

$$\text{Ⅰ}(+,+,+),\text{Ⅱ}(-,+,+),\text{Ⅲ}(-,-,+),\text{Ⅳ}(+,-,+),$$

Ⅴ(+,+,−),Ⅵ(−,+,−),Ⅶ(−,−,−),Ⅷ(+,−,−).

3. 空间中两点间的距离

在数轴上,$M_1(x_1)$,$M_2(x_2)$两点之间的距离为

$$d=|M_1M_2|=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}.$$

在平面上,$M_1(x_1,y_1)$,$M_2(x_2,y_2)$两点之间的距离为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

那么,在空间中任意两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$之间的距离可以用下式表示:

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

事实上,过M_1,M_2各作分别垂直于三条坐标轴的平面,这六个平面围成一个以M_1M_2为体对角线的长方体,如图 8-10 所示.

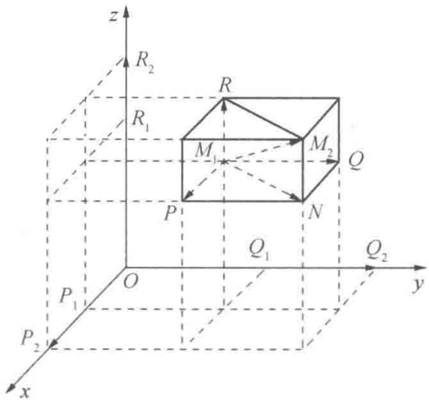


图 8-10

所以

$$\begin{aligned}d^2&=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2\\&=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2\\&=|P_1P_2|^2+|Q_1Q_2|^2+|R_1R_2|^2\\&=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2,\end{aligned}$$

可得　$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$,

这就是空间两点的距离公式.

注意:(1)坐标原点$O(0,0,0)$与点$M(x,y,z)$的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

(2) $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$两点之间的距离等于 $0\Leftrightarrow M_1$与M_2两点重合,也即$x_1=x_2$,$y_1=y_2$,$z_1=z_2$.

(3) $|M_1M_2|=|M_2M_1|$.

例 3　已知三角形的顶点为$A(1,2,3)$,$B(7,10,3)$和$C(-1,3,1)$.证明:角A为钝角.

证　$|AB|^2=(7-1)^2+(10-2)^2+(3-3)^2=100$;

$|AC|^2=(-1-1)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=9$;

$|BC|^2=(-1-7)^2+(3-10)^2+(1-3)^2=117$.

可见,$|BC|^2>|AC|^2+|AB|^2$,由余弦定理,可知角A为钝角.

例 4　在z轴上,求与$A(-4,1,7)$和$B(3,5,-2)$两点等距离的点.

解　设M为所求的点,因为M在z轴上,故可设M的坐标为$(0,0,z)$.

根据题意,$|MA|=|MB|$,即

$$\sqrt{[0-(-4)]^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(0-5)^2+[z-(-2)]^2},$$

等式两边平方,整理得:

$$z=\frac{14}{9},$$

所以 $$M\left(0,0,\frac{14}{9}\right).$$

例 5 试在 xOy 平面上求一点 M,使它到 $A(1,-1,5)$,$B(3,4,4)$ 和 $C(4,6,1)$ 各点的距离相等.

解 点 M 在 xOy 平面上,设 M 的坐标为 $(x,y,0)$,又由题意知:

$$|MA| = |MB| = |MC|,$$

即

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(0-5)^2}&=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(0-4)^2}\\&=\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2+(0-1)^2},\end{aligned}$$

化简可得

$$\begin{cases}4x+10y=14,\\2x+4y=12,\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x=16,\\y=-5,\end{cases}$$

所以,所求的点为 $M(16,-5,0)$.

习题 8-1

1. 指出下列点在空间中的位置:

$A(-4,-2,1)$, $B(1,-5,-3)$, $C(-1,0,0)$,

$D(1,0,2)$, $E(0,0,3)$, $F(4,5,-1)$.

2. 点 $P(3,2,-1)$ 关于 xOy 坐标面的对称点是________,关于 yOz 坐标面的对称点是________,关于 zOx 坐标面的对称点是________,关于 x 轴的对称点是________,关于 y 轴的对称点是________,关于 z 轴的对称点是________,关于原点的对称点是________.

3. xOy,yOz,zOx 坐标面上的点的坐标有什么特点?

4. x,y,z 轴上的点的坐标各有什么特点?

5. 求下列两点之间的距离：

(1) $(0,0,0)$，$(2,3,4)$；　　　　(2) $(1,2,3)$，$(2,-3,-4)$.

6. 求在 x 轴上与两点 $A(-4,2,5)$ 和 $B(1,5,-1)$ 等距离的点.

7. 试证明：三点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

8. 设点 P 在 x 轴上，它到 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的两倍，求点 P 的坐标.

9. 已知空间直角坐标系下，立方体的 4 个顶点为 $A(-a,-a,-a)$，$B(a,-a,-a)$，$C(-a,a,-a)$ 和 $D(a,a,a)$，则其余顶点分别为________，________，________，________.

10. 已知梯形 $OABC$，$\overrightarrow{CB}//\overrightarrow{OA}$，且 $|\overrightarrow{CB}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|$，若 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$.

11. 设有非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则必有　　（　　）

A. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$　　　　B. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

C. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$　　　　D. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

12. 已知△ABC 中，点 P，Q 分别是边 AB，AC 上的点，且 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，试证明：$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

13. 试用向量方法证明：空间四边形相邻各边中点的连线构成平行四边形.

第二节　向量的坐标

这一节，我们主要讨论向量在空间直角坐标系中如何用坐标表示. 对空间上的点，我们可以用有序数组来表示，对我们讨论的自由向量是否也可以用有序数组来表示呢？如果可以，又怎样来表示呢？

一、向量的坐标表示

1. 数轴上向量的坐标表示

设数轴 u 由点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定，M 为数轴上一点，坐标为 u（如图 8-11 所示）. 点 M 对应数轴上的向量 $\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OM}//\boldsymbol{e}$，由第一节定理二知，必存在唯一实数 λ，使 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{e}$.

注意到 $|\overrightarrow{OM}|=|u|$，$|\boldsymbol{e}|=1$，

故 $|u|=|\lambda|$.

图 8-11

当点 M 位于原点 O 的右边时，$u>0$，同时，$\overrightarrow{OM}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同向，$\lambda>0$，有 $u=\lambda$；

当点 M 位于原点 O 的左边时，$u<0$，同时，$\overrightarrow{OM}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 反向，$\lambda<0$，也有 $u=\lambda$；

当点 M 与原点 O 重合时,有 $u=\lambda=0$.

这样恒有$\overrightarrow{OM}=u\boldsymbol{e}$.

这表明,**数轴上以原点为起点的向量可由它的坐标与该数轴单位向量乘积表示.**

2. 空间中向量的坐标表示

在空间直角坐标系中,任给向量 $\boldsymbol{r}$ 的起点是原点 O,终点是 $M(x,y,z)$,则 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$. 过点 M 作垂直于三个坐标面的垂面,得到一个长方体 $OPNQ$-$RHMK$(如图 8-12 所示),由向量的三角形法则,有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

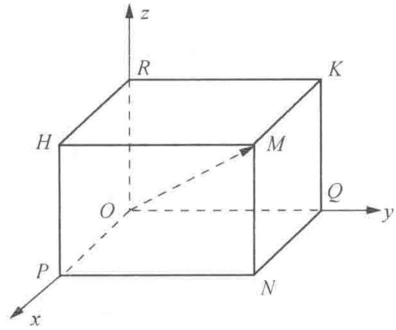


图 8-12

用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示 x 轴、y 轴、z 轴方向上的单位向量,由上知:

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}.$$

则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标分解式**, $x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.

由于向量 $\boldsymbol{r}$ 中的三个有序数 x,y,z,即为点 M 的三个坐标,而点 M 与其坐标 (x,y,z) 一一对应,故

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow \text{点 } M \leftrightarrow \text{实数组}(x,y,z).$$

因此在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,定义有序实数组 (x,y,z) 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标,记作

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z) \text{ 或 } \boldsymbol{r}=\{x,y,z\};$$

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$称为点 M 关于原点 O 的向径.

上述定义表明,一个点与该点的向径有相同的坐标,记号 (x,y,z) 既可以表示点 M,又可以表示向量$\overrightarrow{OM}$. 在运用中,应结合上下文来分清其含义.

二、向量的线性运算的坐标表示

利用向量的坐标,可得向量的加法、减法以及向量与实数的乘法运算如下:

设两个向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,及实数 λ,即

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\quad \boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z).$$

由向量加法的交换律与结合律,以及向量与数的乘法的结合律与分配律,可得如下公式:

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z),$$

$$\lambda \boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

由上可知,对向量进行加、减、数量乘法,只需对向量各分量坐标分别进行运算即可.

由第一节定理二知,空间两个向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$)平行的充要条件是:

存在唯一实数 λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,即:$(a_x,a_y,a_z)=\lambda(b_x,b_y,b_z)$,

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\lambda. \tag{2.1}$$

即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的对应坐标成比例.

这是向量平行的对称式条件,当分母有为零的元素时,应依如下规则来理解它的意义:

(1) 当 b_x,b_y,b_z 中仅有一个为零时,如 $b_z=0$,则(2.1)式理解为

$$\begin{cases}a_z=0,\\ a_xb_y-a_yb_x=0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}a_z=0,\\ \dfrac{a_x}{b_x}-\dfrac{a_y}{b_y}=0.\end{cases}$$

(2) 当 b_x,b_y,b_z 中仅有两个为零时,如 $b_y=b_z=0$,则(2.1)式理解为:

$$\begin{cases}a_y=0,\\ a_z=0.\end{cases}$$

对空间中的两个点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$(如图 8-13 所示),则由$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1O}+\overrightarrow{OM_2}=-\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$.

易知向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示为:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

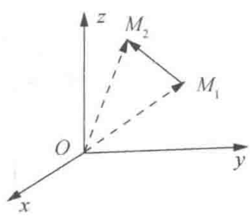


图 8-13

例 1　已知 $A(x_1,y_1,z_1)$和 $B(x_2,y_2,z_2)$两点,而在 AB 直线上的点 M 分有向线段 AB 为两部分 AM,MB,使它们的值的比等于数λ($\lambda\neq-1$),即$\dfrac{AM}{MB}=\lambda$,求分点 M 的坐标.

解　设 $M(x,y,z)$为直线上的点,知:

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB},$$

而

$$\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1),$$
$$\overrightarrow{MB}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z).$$

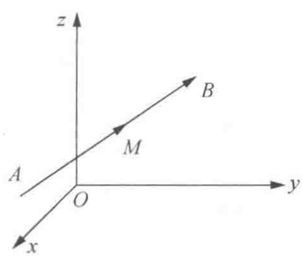


图 8-14

由公式(2.1)知

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,\frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda,\frac{z-z_1}{z_2-z}=\lambda,$$

解得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},$$

M 为有向线段 $\overrightarrow{AB}$的定比分点.

当 M 为有向线段 $\overrightarrow{AB}$的中点时,有:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

三、向量的模与方向余弦

1. 向量的模

向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 的模就是其起点与终点的距离,作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$,则点 $O(0,0,0)$,点 $M(a_x,a_y,a_z)$,因此

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

在空间中任意两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,则向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模就是点 M_1 与点 M_2 的距离$|M_1M_2|$. 由于

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{M_1O}+\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)\\&=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 2 设向量 $\boldsymbol{a}=(4,3,0)$, $\boldsymbol{b}=(1,3,2)$, 求 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 及$|\boldsymbol{a}|$.

解 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2(4,3,0)+(1,3,2)=(9,9,2)=9\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,

$$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}=(4,3,0)-(4,12,8)=(0,-9,-8)=-9\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k},$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+3^2+0^2}=5.$$

例 3 求证:以 $M_1(1,2,-1)$,$M_2(3,4,2)$,$M_3(4,0,1)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 因为三角形三边长度的平方为

$$|M_1M_2|^2=(3-1)^2+(4-2)^2+[2-(-1)]^2=17,$$