普通高等教育精品教材

微积分学习指导与习题集

WEIJIFEN XUEXI ZHIDAO YU XITIJI

（下册）

主编 陈育栎

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育精品教材

微积分学习指导与习题集

（下册）

主编　陈育栎

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是与《微积分》教材相配套的学习指导与习题集（下册），全书分为三大模块，第一模块为《微积分》理论知识讲解、学法建议和例题解析；第二模块为模拟试卷；第三模块为课后习题．本书按照学校建设“应用技术型”大学的要求，以及教育部教学指导委员会对《微积分》课程的要求，对复杂的微积分理论知识进行处理，在通俗易懂、重在应用和模块编排上下功夫．在介绍基本理论、基本方法和重要定理之后，通过模拟试卷和课后习题及时巩固所学知识，提高读者运用数学知识和技能分析问题和解决问题的能力．

本书可作为高等学校工科、理科（非数学专业）、经管类各专业的教材以及研究生入学考试的参考书，也可供工程技术人员、科技工作者参考．

图书在版编目（CIP）数据

微积分学习指导与习题集．下册 / 陈育栎主编．—— 上海 ：上海交通大学出版社，2017
ISBN 978-7-313-14071-5

Ⅰ．①微… Ⅱ．①陈… Ⅲ．①微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ．①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 019137 号

微积分学习指导与习题集（下册）

主　　编：陈育栎
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：郑益慧
印　　制：三河市祥达印刷包装有限公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787mm×1092mm　1/16　　印　　张：13.25　　字　　数：230 千字
版　　次：2017 年 2 月第 1 版　　印　　次：2017 年 2 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN　978-7-313-14071-5/O
定　　价：30.60 元

前　言

“微积分”是高等院校理工类和经管类本科各专业的一门重要基础学科．本书在遵循数学学科教育教学规律的同时，围绕经济社会发展的实际需要，为适应当前应用技术型大学的高等数学教学改革，以及培养科学精神和人文素养兼备的应用型专门人才而编写．

本书是全书的下册，包含四个章节内容：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数．

本书在编写过程中，力求体现以下特色：

1．**简洁易懂**

具体内容的编写力求简洁易懂，特别是对数学知识点的阐述和归纳，以及例题的选取均采用由易到难的顺序，使读者能循序渐进地掌握．对各章节知识点的归纳和教学应用部分覆盖微积分在经济学、物理学和几何学等的各个方面，理工类和经管类学生都适用，鼓励读者跨专业全面发展，扩大知识面．

2．**紧扣教材，例题详解**

本书第一模块内容按章编写，每章包括主要内容、学法建议、例题解析．

- **主要内容**：将各章节的知识点进行归纳总结，且注重前后衔接，按“了解”“理解”“掌握”的次序表示程度上的差异．
- **学法建议**：根据每章所要求掌握的知识点的特征，提出中肯的学习方法．
- **例题解析**：本书的重心所在，是教师上习题课和学生自学的良好辅导素材．编者力图将学习内容、基本方法、解题技巧、释疑解难、数学应用等多方面的教学要求融于典型方法和例题之中，引导读者思考问题，开拓思路，培养读者的理性思维能力以及分析问题和解决问题的能力．

3．**模拟试卷自测**

本书第二模块的模拟试卷选自本科院校历年期中以及期末试题，供学生阶段性自测和复习之用．

4．**课后习题随堂练习**

本书第三模块为针对每节课程内容的课后习题，配合各个章节的知识点，覆盖面广且从易到难、循序渐进，兼顾文、理科学生课后巩固知识的需要，让读者在每次课后自行思考、解题，以达到对问题更深刻和更透彻理解的目的．

需要指出的是，我们希望提醒学生学习数学应重视平时训练和过程考核，反之，平时不亲自动手做题，仅靠考前临时抱佛脚是绝对无益的．

本书配有相应模拟试卷的答案，读者可登陆“至诚数学微课堂”微信号，与教师随时互动. 该平台是致力于大学数学课堂数字化教学的实践与研究平台，集中优势资源，提供师生互动；引导数学学习，拓宽数学视野，通过移动终端随时随地学习数学知识；打开数学思维，学会各种题型解题方法与技巧；触类旁通，巩固提高，答疑解惑，互动交流，突破数学学习能力，提高数学素养.

本书由陈育栋组织、策划、编写、定稿，陈育栋担任主编，叶静妮、吴春晨、施春玲、侯远担任副主编。本书第八章由吴春晨编写，第九章由叶静妮编写，第十章由侯远编写，第十一章由施春玲编写.

由于编者水平有限，书中存在疏漏之处，敬请广大读者批评指正. 具体意见和建议请发送至本书的策划编辑邮箱：63724403@qq.com.

编　者

2017 年 1 月

目　　录

第八章　空间解析几何

一、主要内容

1. 空间直角坐标系

为了确定空间中任意一点的位置，我们建立了空间直角坐标系．在空间直角坐标系中，三个坐标轴中任意两条可以确定一个平面，称为**坐标面**．x 轴与 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 面，由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面，分别称为 yOz 面和 xOz 面．三个坐标面把空间分成八个部分，即八个卦限，在 xOy 面上方，从第一卦限开始，按逆时针方向依次确定的三个卦限分别称为第二、第三、第四卦限．在 xOy 面下方，由第一卦限之下的第五卦限，按逆时针方向确定第五至第八卦限，，这八个卦限分别用Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ表示．

空间任意一点 M 和一个三元有序数组 (x,y,z) 建立了一一对应关系，记为 $M(x,y,z)$．

2. 向量的概念

向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$．向量的线性运算、加减法、数乘、点乘与叉乘（定义式、坐标计算式、性质）：

（1）加减法：三角形或平行四边形法则．

（2）数乘：$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$．

（3）点乘（数量积）：向量的数量积．

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=(a_x,a_y,a_z)\cdot(b_x,b_y,b_z)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=$数值；

$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$；

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\Rightarrow|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$（求向量模的方法）；

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$．

（4）叉乘（向量积）：向量的向量积．

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\boldsymbol{c}$，其中，$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$；$\boldsymbol{c}$ 的方向既垂直 $\boldsymbol{a}$ 又垂直 $\boldsymbol{b}$，符合右手法则；

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}；\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}；\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.$$

（5）两个向量的垂直与平行的充要条件：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}；$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

3. 平面

（1）$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，点 (x_0,y_0,z_0).

点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$；

化简得一般式：$Ax+By+Cz+D=0$；

截距式（适合画图）：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

（2）直线方程

二要素：方向向量（平行于直线）$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，点 (x_0,y_0,z_0).

点向式方程：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$；

令比例系数为 t，参数式方程（适合求交点）：$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt;\end{cases}$

根据直线为两平面交线，得一般式方程（不唯一）：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$

4. 曲面与方程

曲面 S 上任何一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$，而不在曲面 S 上的任何一点的坐标都不满足方程 $F(x,y,z)=0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 称为曲面 S 上的方程.

（1）平面　空间中任意一个平面的方程为三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中 A,B,C,D 为常数，且 A,B,C 不全为 0.

（2）球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 表示球心在 (a,b,c)、半径为 R 的球面方程.

（3）旋转曲面 一条平面曲线绕其所在平面上一定直线旋转一周所形成的曲面称为**旋转曲面**，旋转曲线和定直线分别称为旋转曲面的**母线**和**旋转轴**. 我们考虑以坐标轴为旋转轴的曲面.

① 抛物线 $z=y^2$ 绕 z 轴旋转所成的曲面方程是旋转抛物面

$$z=x^2+y^2.$$

② 椭圆 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ 绕 z 轴旋转所成的曲面方程为旋转椭球面

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

③ 双曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$ 绕 z 轴旋转所成的曲面方程为单叶旋转双曲面

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1.$$

④ 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转所成的曲面方程为双叶旋转双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

⑤ 直线 $z=y$ 绕 z 轴旋转所成的曲面方程为旋转锥面或圆锥面

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\text{，即 } z^2=x^2+y^2.$$

（4）柱面 平行于定直线 l 并沿着曲线 C 移动的动直线 L 形成的轨迹称为**柱面**，定曲线 C 称为柱面的**准线**，动直线 L 称为柱面的**母线**.

5. 二次曲面

常见的二次曲面如下：

椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$； 单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

双叶双曲面 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$； 椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$；

双曲抛物面（马鞍面）$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$.

6. 极坐标

平面上的点与有序实数组的一种对应关系. 在平面上取一定点 O 称为**极点**，从 O 点出发引一条射线 Ox 称为**极轴**，再取定一长度单位，通常规定角度取逆时针方向为正，这

样，平面上任一点 P 的位置就可以用线段 OP 的长度 ρ 以及从 Ox 到 OP 的角度 θ 来确定，有序数对 (ρ,θ) 就称为 P 点的**极坐标**，记为 $P(\rho,\theta)$，称 ρ 为 P 点的**极半径或极径**，θ 为 P 点的**极角**.

7. 空间曲线方程

（1）空间曲线是两个曲面的交线，方程

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{8-1}$$

就是这两个曲面交线 C，上式称为空间曲线的**一般方程**.

（2）空间曲线 C 上动点的坐标 x,y,z 可表示成为参数 t 的函数

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$$

随着 t 的变动可得到曲线 C 上的全部点，方程组称为空间曲线的**参数方程**. 空间曲线的一般方程也可以化为参数方程.

（3）对方程（8-1）去 z 得方程 $H(x,y)=0$. 方程

$$\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$$

就是曲线 C 关于 xOy 面的投影曲线. 同理，将曲线 C 的方程组中分别消去变量 y 和 x 后得到方程 $G(x,z)=0$ 和 $F(y,z)=0$，它们分别表示曲线 C 关于 xOz 面和 yOz 面的投影柱面，再分别和 $x=0$ 或 $y=0$ 联立，就可得到包含曲线 C 在 xOz 面与 yOz 面上投影的曲线方程

$$\begin{cases} G(x,z)=0, \\ y=0 \end{cases} \text{与} \begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases}$$

8. 空间直线、平面及其方程

（1）平面的点法式方程　平面 π 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且与向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 垂直，则

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

（2）空间直线的对称式方程　若已知直线上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，非零方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，则

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

二、学法建议

1．空间直角坐标系与坐标面

（1）点与卦限的对应关系　第Ⅰ～Ⅳ卦限点的正负号分别是：

(正，正，正)，(负，正，正)，(负，负，正)，(正，负，正)；

第Ⅴ～Ⅷ卦限点的正负号分别是：

(正，正，负)，(负，正，负)，(负，负，负)，(正，负，负)．

（2）xOy 平面的方程是 $z=0$，同样 yOz 平面和 xOz 平面的方程是 $x=0$ 和 $y=0$；而 $x=a$，$y=b$ 和 $z=c$ 分别表示平行于坐标面 yOz，xOz，xOy 的平面．

2．理解几种常见的曲面方程、旋转曲面、母线平行于坐标轴的柱面、简单二次曲面，能由给出的条件或图形建立曲面方程或曲线方程，能由给出的方程想象出曲面、曲线图形．熟悉旋转曲面、柱面的方程与图形，了解二次曲面图形的基本方程．掌握空间曲面的一般方程与参数方程．

三、例题解析

例 1　下面各点分别位于空间直角坐标系中的哪个卦限：

（1）$(1,-1,-1)$；　　（2）$(-1,-1,-1)$；

（3）$(-1,1,-1)$；　　（4）$(1,1,-1)$；

（5）$(1,-1,1)$；　　（6）$(-1,-1,1)$；

（7）$(-1,1,1)$；　　（8）$(1,1,1)$．

解　（1）第Ⅷ卦限；　　（2）第Ⅶ卦限；

（3）第Ⅵ卦限；　　（4）第Ⅴ卦限；

（5）第Ⅳ卦限；　　（6）第Ⅲ卦限；

（7）第Ⅱ卦限；　　（8）第Ⅰ卦限．

例 2　指出下列方程各表示什么图形：

（1）$z+2x^2+y^2=0$；　　（2）$x^2-2y^2=0$；

（3）$x^2+y^2-(z-1)^2=0$；　　（4）$z^2=5x$；

（5）$x^2-y^2=4z$；　　（6）$x^2+y^2=0,x=0,y=0$；

（7）$\begin{cases}x^2+4y^2-16z^2=64,\\ y=0.\end{cases}$

解　（1）顶点在 $(0,0,0)$，开口向下的椭圆抛物面；

（2）通过 z 轴的两相交平面；

（3）顶点在 $(0,0,1)$ 的圆锥面；

（4）母线平行于 y 轴，以 zOx 坐标面上 $z^2=5x$ 为准线的抛物柱面；

（5）双曲抛物面；

（6）Oz 轴；

（7）zOx 坐标面上的一条双曲线.

第九章 多元函数微分学

一、主要内容

1. 平面点集

坐标平面上具有某种性质的点的集合，称为**平面点集**. 如下面两个点集

$$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2<r^2\},\quad B=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\},$$

其中 A 是以原点 $O(0,0)$ 为中心、r 为半径的圆内所有点的集合. 如果以 P 表示点 (x,y)，$|OP|$ 表示点 P 到原点的距离，则点集 A 可表示为 $A=\{P\,\|OP|<r\}$. 点集 B 是其对应边平行于坐标轴的矩形，可记为 $b=[a,b]\times[c,d]$，称为两线段 $[a,b]$ 与 $[c,d]$ 的**笛卡尔积**.

1）**点的邻域**

在平面上，以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，$\delta>0$ 为半径的圆内所有点 $P(x,y)$ 所成的点集，称为点 P_0 的 **δ 邻域**，记作 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\,\|P_0P|<\delta\}=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在 P_0 的 δ 邻域中去掉中心点 P_0 后的点集，称为 P_0 的**去心 δ 邻域**，记作 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$，即

$$\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|P_0P|<\delta\}.$$

如果不需要强调邻域半径 δ 的大小，则可用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，而用 $\overset{\circ}{U}(P_0)$ 表示 P_0 的某个去心邻域.

2）**点集的内点、边界点及聚点（理）**

设 E 为一个平面点集，则平面上的一个点 P 与点集 E 的位置关系可能有以下三种情况.

（1）E 的内点

如果存在点 P 的一个邻域 $U(P)$，使得

$$U(P)\subset E,$$

则称点 P 是点集 E 的**内点**.

如图 9-1 所示，E 表示曲线所围内部的点集，则 P_1 是 E 的内点.

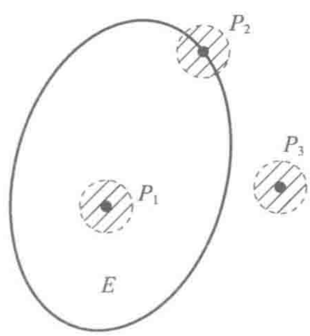

图 9-1

由定义可见，要使 P 成为 E 的内点，不仅 P 本身要属于 E，而且还要有 P 的一个邻域 $U(P)$，使得整个邻域的点都属于 E.

（2）E 的边界点

如果点 P 的每一个邻域 $U(P)$ 内既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则称点 P 为点集 E 的**边界点**.

如图 9-1 所示，点 P_2 为点集 E 的边界点.

注意：点集 E 的边界点 P 可能属于 E，也可能不属于 E.

E 的所有边界点的全体所组成的点集，称为 E 的**边界**，记作 ∂E .

下面我们再根据点 P 与点集 E 相联系的密切程度，定义点集 E 的聚点概念.

（3）E 的聚点

如果点 P 的每一个邻域 $U(P)$ 内都含有无穷多个属于 E 的点，则称点 P 为点集 E 的**聚点**.

E 的内点必是 E 的聚点，E 的边界点可能是 E 的聚点，也可能不是 E 的聚点.

E 的全部聚点所成的点集称为 E 的**导集**，记作 E' .

2. 开集、闭集及区域

如果点集 E 的每一个点都是 E 的内点，则称 E 为**开集**. 如果 E 的聚点都是 E 的点，即 $E' \subset E$ ，则称 E 为**闭集**.

如果点集 G 是开集，并具有**连通性**，即开集 G 中任意两点，都可以用一组完全落在 G 中的折线相连接，则称 G 为**区域**（或**开区域**）.

开区域及其边界上所有点构成的点集称为**闭区域**.

全平面 $\mathbf{R}^2$ 既是开区域，也是闭区域.

对于点集 E，如果存在正数 r，使得对于任意 $(x,y)\in E$ ，都有 $\sqrt{x^2+y^2}<r$ ，即 $E\subset U(O,r)$，其中 O 为坐标系的原点，则称 E 为**有界集**. 不是有界集的点集称为**无界集**.

3. 多元函数的概念

1）二元函数

定义 1　设 D 是平面上的非空点集，D 到实数集 $\mathbf{R}$ 的映射

$$f: D\to \mathbf{R}$$

称为定义在 D 上的**二元函数**，记为

$$z=(x,y),(x,y)\in D,$$

或

$$z=f(p),p\in D,$$

其中点集 D 称为函数的**定义域**，x，y 称为**自变量**，z 称为**因变量**. 有时我们也说：z 是 x 和 y 的函数.

当自变量 (x,y) 取值为 (x_0,y_0) 时，用记号 $f(x_0,y_0)$ 表示对应的 z 的函数值. 当 (x,y)

在 D 中变化时，$z=f(x,y)$ 所对应的一切函数值组成的实数集称为函数 f 的**值域**，记为 $f(D)$.

在函数 $z=f(x,y)$ 的定义域 D 中任取一点 $P(x,y)\in D$，对应的函数值为 $z=f(x,y)$，这样的 x，y，z 的值确定三维空间中的一个点 $M(x,y,z)$，当 P 在 D 中变化时，点 M 就描绘出空间一个确定的点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}.$$

这个点集通常是一张曲面，称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的**图像**，如图 9-2 所示.

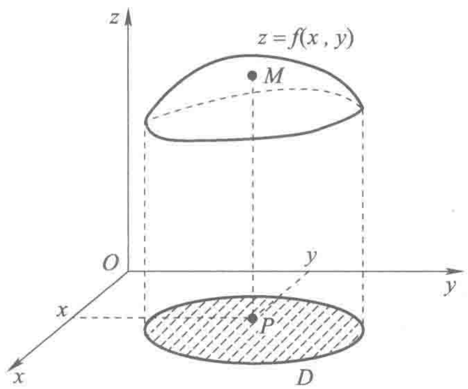

图 9-2

例如，函数 $z=ax+by$ 的图像是一个平面，$z=x^2+y^2$ 的图像是一个旋转抛物面，$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的图像是一个半球面.

2）**多元函数**

如果将定义 1 中的平面点集 D 换作 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点集 D，则映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 就称为定义在 D 上的 n **元函数**，记为

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D,$$

或简记为

$$u=f(x),\quad x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D.$$

三维空间中，点的坐标通常用 x，y，z 表示，因此，三元函数常记作

$$u=f(x,y,z),\quad (x_1,x_2,x_3)\in D.$$

三元函数的定义域 D 是空间中的点集，其图像已不能在三维空间中直观地描述. 当 $n\geqslant 4$ 时，n 元函数的定义域及图像也是如此，但仍然可以说：n 元函数的定义域为 n 维空间的点集，其图像是 $n+1$ 维空间中的**超曲面**.

多元函数的四则运算与一元函数情形类似，这里不再重述.

4. 二元函数的极限

定义 2 设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，在点 $P_0(x_0,y_0)$ 及其附近有定义（P 点可除外），如果存在常数 A，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $P(x,y)\in D\bigcap \overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$ 时，有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A\ \ ((x,y)\to(x_0,y_0)),$$

也可记为

$$\lim_{P\to P_0} f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A\ \ (P\to P_0).$$

二元函数的极限有时也称为**二重极限**.

注：

（1）根据二重极限的定义，在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的去心邻域内，动点 $P(x,y)$ 趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 的方式是任意的. 尽管动点 $P(x,y)$ 沿着任一直线（任一方向）趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 的极限都存在且都等于 A，但毕竟只是沿着直线变动，因而无法肯定当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的二重极限是否存在，更不能断言二重极限是 A 了.

（2）判定二重极限不存在常用的方法：

① 选取 $P\to P_0$ 的一种方式，通常沿某条过 P_0 的直线或曲线趋于 P_0，按此方式，$\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y)$ 不存在；

② 找出 $P\to P_0$ 的两种方式，通常沿两条过 P_0 的直线或曲线 C_1, C_2，使得

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in C_1}} f(x,y)=A_1,\quad \lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in C_2}} f(x,y)=A_2,$$

且 $A_1\neq A_2$，则二重极限 $\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y)$ 不存在.

5. 二元函数的连续性

定义 3 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 及其附近有定义，若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ **连续**.

若二元函数 $f(x,y)$ 在 D 上有定义，且 $f(x,y)$ 在 D 上的每一点都连续，则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上**连续**.

与一元函数类似，二元连续函数经过四则运算和复合运算后仍为二元连续函数，且二