



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

# 复变函数 与积分变换

第3版

学习辅导与习题全解

王一平 苏变萍 编

教育出版社



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

# 复变函数 与积分变换

第3版

学习辅导与习题全解

王一平 苏变萍 编

高等教育出版社·北京

## 内容提要

本书内容与《复变函数与积分变换》(第3版)内容编排一致。第一篇为复变函数,共六章,主要内容是:复数与复变函数、导数、积分、级数、留数、保形映照。第二篇为积分变换,共两章,主要内容是:傅里叶变换、拉普拉斯变换。各章均包括五部分:内容要点、教学要求和学习注意点、释疑解难、典型例题和习题全解。书后附模拟试题两套。

本书可作为高等院校相关专业的学生及自学人员学习复变函数与积分变换的课外辅导书,也可作为教师讲授复变函数与积分变换课程的教学参考书,以及科技工作者科研、撰写论文的参考用书。

## 图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换(第3版)学习辅导与习题全解 / 王一平,苏变萍编. --北京:高等教育出版社,2018.7  
ISBN 978-7-04-049760-1

I. ①复… II. ①王… ②苏… III. ①复变函数-高等学校-教学参考资料②积分变换-高等学校-教学参考资料 IV. ①O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第107332号

策划编辑 于丽娜      责任编辑 杨帆      封面设计 姜磊      版式设计 徐艳妮  
插图绘制 杜晓丹      责任校对 吕红颖      责任印制 田甜

出版发行	高等教育出版社	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
社 址	北京市西城区德外大街4号		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
邮政编码	100120	网上订购	<a href="http://www.hepmall.com.cn">http://www.hepmall.com.cn</a>
印 刷	北京信彩瑞禾印刷厂		<a href="http://www.hepmall.com">http://www.hepmall.com</a>
开 本	787mm×960mm 1/16		<a href="http://www.hepmall.cn">http://www.hepmall.cn</a>
印 张	14.25	版 次	2018年7月第1版
字 数	260千字	印 次	2018年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	27.00元
咨询电话	400-810-0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 49760-00

## 前 言

本辅导书是为配合“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《复变函数与积分变换》(第3版)的使用而编写的,内容编排与主教材完全一致,方便教师和学生选用。

本次修订保留了上一版的特点:系统地总结教材各部分内容的学习重点、难点以及要求掌握的程度,使学习者对自己应该学习的内容、必须学懂的知识、学到什么样的程度及可能遇到的问题等有了一个清晰的认识;整理、归纳、解释了学生学习过程中经常产生困惑的疑难点,并精心挑选了约100道典型及开放的题目予以解答。

在此基础上,结合主教材在内容变化、细节处理和实际应用上的创新尝试,将相应的内容做适当调整,相关问题的处理思路和方法也做相应改变;结合近几年教学的实际需求,将“习题选解”修改为“习题全解”,详细解答了主教材全部课后习题,同时强调基本方法的掌握,淡化解题技巧;结合读者对辅导书使用情况的反馈,在充分研究探讨的基础上,对个别内容的编写进行了精心锤炼,对上一版存在的错误和不妥之处进行了修正。

本书由长安大学王一平和西安建筑科技大学苏变萍共同编写。在编写过程中,我们得到学校、理学院和教研室同仁的支持和帮助,谨在此致以深切的谢意。对不吝赐教的本书读者深表感谢,还望继续支持、批评指正,将本书越做越好。

编 者

2017年7月

# 目 录

## 第一篇 复变函数

第 1 章 复数与复变函数	1
1.1 内容要点	1
1.2 教学要求和学习注意点	2
1.3 释疑解难	4
1.4 典型例题	6
1.5 习题全解	7
第 2 章 导数	28
2.1 内容要点	28
2.2 教学要求和学习注意点	29
2.3 释疑解难	32
2.4 典型例题	37
2.5 习题全解	40
第 3 章 积分	59
3.1 内容要点	59
3.2 教学要求和学习注意点	60
3.3 释疑解难	61
3.4 典型例题	64
3.5 习题全解	66
第 4 章 级数	80
4.1 内容要点	80
4.2 教学要求和学习注意点	81
4.3 释疑解难	82
4.4 典型例题	86
4.5 习题全解	90
第 5 章 留数	109
5.1 内容要点	109

5.2	教学要求和学习注意点	110
5.3	释疑解难	112
5.4	典型例题	114
5.5	习题全解	117
<b>第6章</b>	<b>保形映照</b>	<b>135</b>
6.1	内容要点	135
6.2	教学要求和学习注意点	135
6.3	释疑解难	136
6.4	典型例题	138
6.5	习题全解	142

## 第二篇 积分变换

<b>第1章</b>	<b>傅里叶变换</b>	<b>163</b>
1.1	内容要点	163
1.2	教学要求和学习注意点	164
1.3	释疑解难	165
1.4	典型例题	168
1.5	习题全解	170
<b>第2章</b>	<b>拉普拉斯变换</b>	<b>181</b>
2.1	内容要点	181
2.2	教学要求和学习注意点	183
2.3	释疑解难	184
2.4	典型例题	186
2.5	习题全解	188
模拟试题一		208
模拟试题一参考答案与评分标准		210
模拟试题二		213
模拟试题二参考答案与评分标准		215
主要参考书		219

# 第一篇 复变函数

## 第 1 章 复数与复变函数

### 1.1 内容要点

#### 1. 复数的各种表示方法

代数表示法:  $z = x + iy$ .

三角表示法:  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ .

指数表示法:  $z = re^{i\theta}$ .

几何表示法:  $|z|, \text{Arg } z$ .

#### 2. 复数的代数运算及几何意义

复数的加减法:  $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ .

复数的乘法:  $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ .

复数的除法:  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0)$ .

定理 1 两个非零复数乘积的模等于它们模的乘积,乘积的辐角等于它们辐角的和.

定理 2 两个非零复数商的模等于它们模的商,商的辐角等于被除数与除数的辐角差.

#### 3. 扩充复平面、平面点集

#### 4. 复变函数的概念及其几何意义

定义 1 设  $D$  是一个给定的复数集,如果有一法则  $f$ ,对于每一个数  $z \in D$ ,总有确定的复数  $w$  和它对应.则称  $f$  是定义在  $D$  上的复变数函数(简称复变函数),记作  $w = f(z)$ .数集  $D$  称为这个函数的定义域.

#### 5. 初等函数的定义及性质

## 1.2 教学要求和学习注意点

### 1. 教学要求

牢固掌握复数的各种表示方法及其运算,了解区域的概念,理解复变函数的概念,了解指数函数、对数函数、幂函数和三角函数的定义及它们的主要性质.

重点:复数的运算,复变函数的概念.

难点:初等函数中的多值函数的理解.

### 2. 学习注意点

(1) 下面的证明过程错在何处?

题目:证明 若  $z_1 z_2 z_3 = 0$ , 则  $z_1, z_2, z_3$  中至少有一个为零.

证: 设  $z_k = r_k e^{i\theta_k} (k=1, 2, 3)$ , 则

$$z_1 z_2 z_3 = r_1 r_2 r_3 e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} = 0.$$

因为  $r_1, r_2, r_3$  中至少有一个为零, 所以  $z_1, z_2, z_3$  中至少有一个为零.

答: 证明过程的设是错误的, 当  $z=0$  时,  $z$  不具有指数表达式. 正确的证明是: 若  $z_3 \neq 0$ , 则

$$z_1 z_2 = z_1 z_2 \left( z_3 \cdot \frac{1}{z_3} \right) = 0,$$

若  $z_2 \neq 0$ , 则

$$z_1 = z_1 \left( z_2 \cdot \frac{1}{z_2} \right) = 0,$$

故  $z_1, z_2, z_3$  中至少有一个为 0.

(2) 下面的解题过程错在何处?

题目: 求  $8^{\frac{1}{6}}$  的全部单根.

解:  $8^{\frac{1}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \ln 2} = e^{\frac{1}{2}(\ln 2 + i \cdot 2k\pi)} = e^{\frac{1}{2} \ln 2} \cdot e^{k\pi i} = \pm \sqrt{2}$ .

答: 此解题过程在第二步到第三步的推导时出错了, 正确的是:  
在复数范围内

$$(8)^{\frac{1}{6}} = (8e^{2k\pi i})^{\frac{1}{6}} = \sqrt{2} e^{\frac{k\pi}{3}} \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5),$$

或

$$(2^3)^{\frac{1}{6}} = (2^3 e^{2k\pi i})^{\frac{1}{6}} = \sqrt{2} e^{\frac{k\pi}{3}} \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

在实数范围内



$$(2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}.$$

(3) 下面的解题过程错在何处?

题目: 设  $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ ,  $z_2 = -1 + i$ . 求  $\arg z_1 z_2$ .

解:  $\text{Arg} z_1 z_2 = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2$

$$= \frac{2}{3}\pi + \frac{3}{4}\pi + 2k\pi = \frac{17}{12}\pi + 2k\pi,$$

所以

$$\arg z_1 z_2 = \frac{17}{12}\pi.$$

答: 因为

$$-\pi < \arg z_1 z_2 \leq \pi,$$

所以  $\arg z_1 z_2 = \frac{17}{12}\pi$  是错误的.

正确答案: 由  $\text{Arg} z_1 z_2 = -\frac{7}{12}\pi + 2k\pi$ , 得  $\arg z_1 z_2 = -\frac{7}{12}\pi$ .

(4) 证明: (a)  $\text{Ln}(i^{\frac{1}{2}}) = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi i = \frac{1}{2}\text{Ln}i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ ;

(b)  $\text{Ln}i^2 \neq 2\text{Ln}i$ .

证: (a) 因为

$$\begin{aligned} \text{Ln}(i^{\frac{1}{2}}) &= i\arg(i^{\frac{1}{2}}) + 2k\pi i \\ &= \begin{cases} \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right)i, \\ \left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}\right)i \end{cases} \\ &= \left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right)i \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\text{Ln}i = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi i,$$

所以

$$\text{Ln}(i^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\text{Ln}i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

(b) 因为

$$\text{Ln}i^2 = \text{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i,$$

$$2\operatorname{Lni} = 2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i = (4k+1)\pi i,$$

所以

$$\operatorname{Lni}^2 \neq 2\operatorname{Lni}.$$

### 1.3 释疑解难

1. 在复方程  $az^2 + bz + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的求根公式  $z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  中为什么要求  $b^2 - 4ac$  不等于 0.

答: 因为关于复数方根  $w = z^{\frac{1}{n}}$  (即  $w^n = z$ ) 的定义中要求  $w \neq 0$ , 若  $z = 0$  必有  $w = 0$ . 而  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  为复数方根的形式, 因此公式中  $b^2 - 4ac \neq 0$ .

事实上, 因为

$$az^2 + bz + c = 0,$$

所以

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0,$$

若  $b^2 - 4ac = 0$ , 则

$$z = -\frac{b}{2a}.$$

2. 证明: (a) 若  $\operatorname{Ln}z = \ln r + i\theta$  ( $r > 0, \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{9}{4}\pi$ ), 那么

$$\operatorname{Lni}^2 = 2\operatorname{Lni};$$

(b) 若  $\operatorname{Ln}z = \ln r + i\theta$  ( $r > 0, \frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{11}{4}\pi$ ), 那么

$$\operatorname{Lni}^2 \neq 2\operatorname{Lni}.$$

证: (a) 因为

$$\operatorname{Lni}^2 = \ln(-1) = \pi i, \quad 2\operatorname{Lni} = 2\left(\ln|1| + \frac{\pi}{2}i\right) = \pi i,$$

所以

$$\operatorname{Lni}^2 = 2\operatorname{Lni}.$$

(b) 因为

$$\ln i^2 = \ln(-1) = \pi i, \quad 2\ln i = 2\left(\ln|i| + \frac{10}{4}\pi i\right) = 5\pi i,$$

所以

$$\ln i^2 \neq 2\ln i.$$

由(a),(b)可知,辐角主值的定义范围可由复平面上原点引出的任一条射线为起始边、终边来划分,随之相关的性质也可能发生变化.

3. 证明: 对任何非零复数  $z_1$  和  $z_2$ ,

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1).$$

证: 因为当  $\operatorname{Re}(z_1) \geq 0, \operatorname{Re}(z_2) \geq 0$  时,

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i \quad (k=0).$$

当  $\operatorname{Re}(z_1) \geq 0$  或  $\operatorname{Re}(z_2) \geq 0$  时,

$$\arg(z_1 z_2) = \begin{cases} \arg z_1 + \arg z_2, & -\pi < \arg z_1 + \arg z_2 \leq \pi, \\ \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi, & \arg z_1 + \arg z_2 = -\pi, \\ \arg z_1 + \arg z_2 \pm 2\pi, & |\arg z_1 + \arg z_2| > \pi. \end{cases}$$

$$\ln|z_1 z_2| = \ln|z_1| + \ln|z_2|,$$

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1).$$

当  $\operatorname{Re}(z_1) \leq 0$  且  $\operatorname{Re}(z_2) \leq 0$  时,

$$\arg(z_1 z_2) = \begin{cases} \arg z_1 + \arg z_2, & -\pi < \arg z_1 + \arg z_2 \leq \pi, \\ \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi, & \arg z_1 + \arg z_2 = -\pi, \\ \arg z_1 + \arg z_2 \pm 2\pi, & |\arg z_1 + \arg z_2| > \pi. \end{cases}$$

$$\ln|z_1 z_2| = \ln|z_1| + \ln|z_2|,$$

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1).$$

综上所述,对任何非零复数  $z_1$  和  $z_2$  都有

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1).$$

4. 求证: 三个复数  $z_1, z_2, z_3$  成为等边三角形顶点的必要与充分条件是:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

证: 三角形  $z_1 z_2 z_3$  是等边三角形的必要与充分条件为: 向量  $\overrightarrow{z_1 z_2}$  绕  $z_1$  旋转  $\frac{\pi}{3}$

或  $-\frac{\pi}{3}$  得向量  $\overrightarrow{z_1 z_3}$ , 即  $z_3 - z_1 = (z_2 - z_1) e^{\pm \frac{\pi}{3} i}$  或

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

两边平方化简得结论.

## 1.4 典型例题

**例 1** 将复数  $\frac{2i}{-1+i}$  化为三角表示式和指数表示式.

解: 因为  $\frac{2i}{-1+i} = 1-i$ ,  $|1-i| = \sqrt{2}$ ,  $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$ , 所以  $\frac{2i}{-1+i}$  的三角表示式为  $\sqrt{2} \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right]$ ,  $\frac{2i}{-1+i}$  的指数表示式为  $\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i + 2k\pi i}$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

**例 2** 若  $(1+i)^n = (1-i)^n$ , 试求  $n$  的值.

解: 由  $(1+i)^n = (1-i)^n$  可得:

$$2^{\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i\sin \frac{n\pi}{4} \right) = 2^{\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i\sin \frac{-n\pi}{4} \right),$$

即

$$\sin \frac{n\pi}{4} = \sin \frac{-n\pi}{4} \Rightarrow \frac{n\pi}{4} = -\frac{n\pi}{4} + 2k\pi.$$

则得

$$n = 4k \quad (k \text{ 为整数}).$$

**例 3** 判断  $\operatorname{Im}(z) = 1$  是否为区域?

答: 点集  $\{z \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$  不是区域, 因为此点集的每一个点都不是内点, 依照区域的定义知其不是区域.

**例 4** 判断  $\operatorname{Im}(z) \geq 0$  是开区域还是闭区域, 有界否?

答: 依平面点集部分有关开区域、闭区域、有界集和无界集的概念,  $\operatorname{Im}(z) > 0$  为无界的开区域,  $\operatorname{Im}(z) = 0$  为  $\operatorname{Im}(z) > 0$  的边界, 故  $\operatorname{Im}(z) \geq 0$  为无界的闭区域.

**例 5** 如果复数  $a+ib$  是实系数方程  $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$  的根, 那么  $a-ib$  也是它的根.

证: 因为

$$\begin{aligned} & a_0 (\bar{z})^n + a_1 (\bar{z})^{n-1} + \dots + a_{n-1} \bar{z} + a_n \\ &= \overline{a_0 (z^n) + a_1 (z^{n-1}) + \dots + a_{n-1} z + a_n} \\ &= \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} \\ &= \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以,若  $z=a+ib$  为上述方程的根,则其共轭复数  $\bar{z}=a-ib$  也为方程的根.

**例 6** 为什么在复数范围内  $|\cos z| \leq 1, |\sin z| \leq 1$  未必总成立?

答: 设  $z=x+iy$ , 则

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \\ |\cos z| &= \sqrt{(\cos x \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \operatorname{sh} y)^2} \\ &= \sqrt{(1 + \operatorname{sh}^2 y) \cos^2 x + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} \\ &= \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}.\end{aligned}$$

当  $\operatorname{sh} y > 1$  时, 有  $|\cos z| > 1$ ; 当  $y \rightarrow \pm\infty$  时,  $|\cos z| \rightarrow +\infty$ . 所以,  $|\cos z| \leq 1$  未必总成立. 同理  $|\sin z| \leq 1$  也未必总成立.

**例 7** 证明: 若  $z$  在圆周  $|z|=2$  上, 那么  $\left| \frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \right| \leq \frac{1}{3}$ .

证: 因为

$$|z^4 - 4z^2 + 3| \geq \left| |z^4 - 4z^2| - 3 \right| \geq \left| |z^4| - |4z^2| - 3 \right| = 3,$$

所以

$$\left| \frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \right| \leq \frac{1}{3}.$$

**例 8** 求  $(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^{\frac{1}{3}}$  的所有的根、单根, 并说明几何意义.

解: 所有的根:  $(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^{\frac{1}{3}} = (2e^{\frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i})^{\frac{1}{3}}$   
 $= \sqrt[3]{2} e^{(\frac{2k}{3} + \frac{1}{4})\pi i} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

单根:  $\sqrt[3]{2} e^{\frac{\pi}{4}i}, \sqrt[3]{2} e^{\frac{11\pi}{12}i}, \sqrt[3]{2} e^{\frac{19\pi}{12}i}.$

几何意义: 半径为  $\sqrt[3]{2}$  的圆内接等边三角形的三个顶点.

## 1.5 习题全解

1.1.1 证明: (a)  $(3+i)(3-i)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i\right) = 2+i;$

(b)  $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = -\frac{2}{5};$

(c)  $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z);$

(d)  $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z).$

证: (a)  $(3+i)(3-i)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i\right)$

$$= 10 \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i \right)$$

$$= 2 + i;$$

$$(b) \quad \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$$

$$= \frac{(1+2i)(3+4i)}{25} + \frac{2-i}{5i} \cdot \frac{1}{1}$$

$$= -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i - \frac{2}{5}i - \frac{1}{5}$$

$$= -\frac{2}{5};$$

$$(c) \quad \operatorname{Im}(iz)$$

$$= \operatorname{Im}[i(x+iy)]$$

$$= x$$

$$= \operatorname{Re}(z);$$

$$(d) \quad \operatorname{Re}(iz)$$

$$= \operatorname{Re}[i(x+iy)]$$

$$= -y$$

$$= -\operatorname{Im}(z);$$

1.1.2 应用复数乘法的结合律、交换律证明:  $(z_1 z_2)(z_3 z_4) = (z_1 z_3)(z_2 z_4)$ .

证:  $(z_1 z_2)(z_3 z_4)$

$$= z_1 z_2 z_3 z_4$$

$$= z_1 z_3 z_2 z_4$$

$$= (z_1 z_3)(z_2 z_4).$$

1.1.3 见学习注意点.

1.1.4 证明: (a)  $\frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}$  ( $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ );

(b)  $\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \frac{z_1}{z_3} \cdot \frac{z_2}{z_4}$  ( $z_3 \neq 0, z_4 \neq 0$ ).

证: 因为

$$\frac{z z_1}{z z_2} = \frac{z_1}{z_2}, \quad z \cdot \frac{1}{z_1} = \frac{z}{z_1},$$

所以

$$(a) \quad \frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_1 z_2} \cdot \left( z_2 \cdot \frac{1}{z_2} \right) = \frac{z_2}{z_1 z_2} \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2};$$

$$(b) \quad \frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = (z_1 z_2) \left( \frac{1}{z_3} \cdot \frac{1}{z_4} \right) = \frac{z_1}{z_3} \cdot \frac{z_2}{z_4}.$$

1.1.5 证明:  $(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z_1^{n-k} z_2^k$ , 其中  $z_1, z_2$  为任意的复数,  $n$  为正整数.

证: 当  $n=1$  时, 等式显然成立.

设  $n=m$  时,  $(z_1 + z_2)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k z_1^{m-k} z_2^k$  成立, 则当  $n=m+1$  时,

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)^{m+1} &= (z_1 + z_2) \sum_{k=0}^m C_m^k z_1^{m-k} z_2^k \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k z_1^{m+1-k} z_2^k + \sum_{k=0}^m C_m^k z_1^{m-k} z_2^{k+1} \\ &= z_1^{m+1} + \sum_{k=1}^m C_m^k z_1^{m+1-k} z_2^k + \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k z_1^{m-k} z_2^{k+1} + z_2^{m+1} \\ &= z_1^{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1} C_m^{k+1} z_1^{m-k} z_2^{k+1} + \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k z_1^{m-k} z_2^{k+1} + z_2^{m+1} \\ &= z_1^{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1} (C_m^{k+1} + C_m^k) z_1^{m-k} z_2^{k+1} + z_2^{m+1} \\ &= z_1^{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1} C_{m+1}^{k+1} z_1^{m-k} z_2^{k+1} + z_2^{m+1} \\ &= z_1^{m+1} + \sum_{k'=1}^m C_{m+1}^{k'} z_1^{m+1-k'} z_2^{k'} + z_2^{m+1} \quad (\text{令 } k' = k+1) \\ &= \sum_{k'=0}^{m+1} C_{m+1}^{k'} z_1^{m+1-k'} z_2^{k'}. \end{aligned}$$

故由数学归纳法知结论成立.

1.1.6 证明:  $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ ;  $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$  ( $z_2 \neq 0$ ).

证: 设  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ , 则

$$\begin{aligned} \overline{z_1 - z_2} &= \overline{x_1 + iy_1 - (x_2 + iy_2)} \\ &= \overline{x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)} \\ &= x_1 - x_2 - i(y_1 - y_2) \\ &= \bar{z}_1 - \bar{z}_2; \end{aligned}$$

$$\overline{(z_1/z_2)} = \overline{\left( \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \right)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \right] \\
 &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - (x_2y_1 - x_1y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} \\
 &= \frac{(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\
 &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.
 \end{aligned}$$

- 1.1.7 证明: (a)  $\overline{z+3i} = \bar{z} - 3i$ ; (b)  $\overline{iz} = -i\bar{z}$ ; (c)  $\overline{(2+i)^2} = 3-4i$ ;  
 (d)  $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}|2z+5|$ .

证: (a)  $\overline{z+3i} = \bar{z} + \overline{3i} = \bar{z} - 3i$ ;

(b)  $\overline{iz} = \bar{i} \cdot \bar{z} = -i\bar{z}$ ;

(c)  $\overline{(2+i)^2} = \overline{(2+i)}^2 = (2-i)^2 = 3-4i$ ;

(d)  $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = |\sqrt{2}-i| |2\bar{z}+5| = \sqrt{3} |\overline{2z+5}| = \sqrt{3} |2z+5|$ .

1.1.8 应用数学归纳法证明: 当  $n=2, 3, \dots$  时,

(a)  $\overline{z_1+z_2+\dots+z_n} = \bar{z}_1+\bar{z}_2+\dots+\bar{z}_n$ ; (b)  $\overline{z_1z_2\dots z_n} = \bar{z}_1\bar{z}_2\dots\bar{z}_n$ .

证: (a) 因为  $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$ , 设  $\overline{z_1+z_2+\dots+z_m} = \bar{z}_1+\bar{z}_2+\dots+\bar{z}_m$  成立, 而

$$\begin{aligned}
 \overline{z_1+z_2+\dots+z_m+z_{m+1}} &= \overline{z_1+z_2+\dots+z_m+z_{m+1}} \\
 &= \overline{z_1+z_2+\dots+z_m} + \overline{z_{m+1}},
 \end{aligned}$$

所以结论成立.

(b) 因为  $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ , 设  $\overline{z_1z_2\dots z_m} = \bar{z}_1\bar{z}_2\dots\bar{z}_m$  成立, 而

$$\overline{z_1z_2\dots z_m \cdot z_{m+1}} = \overline{z_1z_2\dots z_m} \cdot \overline{z_{m+1}} = \bar{z}_1\bar{z}_2\dots\bar{z}_m \cdot \bar{z}_{m+1},$$

所以结论成立.

1.1.9 证明:  $\sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$ .

证: 因为

$$x^2 + y^2 \geq 2|x||y|,$$

所以

$$2(x^2 + y^2) \geq x^2 + 2|x||y| + y^2,$$

$$2|z|^2 \geq (|x| + |y|)^2,$$

$$\sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|.$$



1.1.10 证明:当  $z_2, z_3$  为非零复数时,

$$(a) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (b) \left| \frac{z_1}{z_2 z_3} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2| |z_3|}.$$

证: (a) 因为

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \left| \frac{1}{z_2} \cdot z_1 \right| = \left| \frac{1}{z_2} \right| \cdot |z_1|, \\ \left| \frac{1}{z_2} \right| &= \left| \frac{1}{x_2 + iy_2} \right| = \left| \frac{x_2 - iy_2}{x_2^2 + y_2^2} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)^2}} = \frac{1}{|z_2|}, \end{aligned}$$

所以

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

$$(b) \left| \frac{z_1}{z_2 z_3} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2 z_3|} = \frac{|z_1|}{|z_2| |z_3|}.$$

1.1.11 证明:当  $|z_3| \neq |z_4|$  时,下面不等式成立:

$$\left| \frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4} \right| \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{\left| |z_3| - |z_4| \right|}$$

$$\text{证: } \left| \frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4} \right| = \frac{|z_1 + z_2|}{|z_3 + z_4|} \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{\left| |z_3| - |z_4| \right|}.$$

1.1.12 证明:当  $|z| < 1$  时,  $|\operatorname{Im}(1 - \bar{z} + z^2)| < 3$ .

$$\begin{aligned} \text{证: } |\operatorname{Im}(1 - \bar{z} + z^2)| &= |\operatorname{Im}(1 - x + iy + x^2 - y^2 + 2xyi)| \\ &= |y + 2xy| \leq |y| + 2|x||y| < 3 \quad (|z| < 1). \end{aligned}$$

1.1.13 见典型例题.

1.1.14 求在下面各种情况下  $z$  的点集:

$$(a) |2z - i| = 4; \quad (b) |z + i| \leq 3; \quad (c) \operatorname{Re}(\bar{z} - i) = 2.$$

解: (a) 以  $\frac{i}{2}$  为圆心, 2 为半径的圆周上的所有的点;

(b) 以  $-i$  为圆心, 3 为半径的圆周闭圆盘上的所有的点;

(c) 直线  $x = 2$  上的所有的点.

1.1.15 证明:以  $z_0$  为圆心,  $R$  为半径的圆的方程  $|z - z_0| = R$  可以写成:

$$|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z \bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2.$$