高中数学60问

彭家麒　编著

$$(x+a)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ka^{n-k}$$

上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE

高中数学60问

彭家麒　编著

$$(x+a)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k a^{n-k}$$

上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

高中数学60问 / 彭家麒编著. —上海：上海教育出版社，
2018.1
ISBN 978-7-5444-8117-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①彭… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参
考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第005426号

策划编辑 季陆生
责任编辑 宁彦锋 王嫣斐
谭桑梓 余 地
封面设计 周 亚

高中数学 60 问
彭家麒 编著

出版发行 上海教育出版社有限公司
官 网 www.seph.com.cn
地 址 上海市永福路 123 号
邮 编 200031
印 刷 上海展强印刷有限公司
开 本 700×1000 1/16 印张 9.25 插页 1
字 数 172 千字
版 次 2018 年 1 月第 1 版
印 次 2018 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5444-8117-5/G·6718
定 价 45.00 元

如发现质量问题，请向本社调换 电话 021-64377165

CONTENTS | 目录

1. 空集是有限集还是无限集?

F.豪斯道夫的《集论》(科学出版社，1960)从对集的这样的朴素说明开始："把一个个的东西集合起来成一个整体，这样便形成一个集"，并且表示"我们将以此为满足"；随后便给出定义："一个集可以由某个自然数(注：该书所谓的"自然数"不包括0，即所指为正整数)所表示的那么多个事物组成，也可以由无限多个事物组成，我们分别称之为有限或无限集".显然，他不仅没有打算给空集在有限集或无限集中安排任何位置，而且也没有承认空集，因为离开"一个个的东西"就无所谓"集".空集概念是在此之后才引进的.书中这样解释："为方便计，也容许有集0(注：该书以0表示空集，认为联系上下文不致产生歧义)，所谓零集或空集，这是不含有任何元的集.$A=0$ 的意义是：集 A 没有元，是空的，'消失了'".简言之，为了某些方便而把本来没有集的情形当做有空集.该书对这种虚构的集始终单独看待，没有使它归属于有限集或无限集.

S.C.克林的《元数学导论》(科学出版社，1984)很早就确认"集有所谓空集(或零集)，即没有元素的集".后来先给出定义"空集的基数为0"和"如果 $a\notin M$，则 $M\cup\{a\}$的基数$=M$ 的基数$+1$"，继而又给出定义"若把自然数 $0,1,2,\cdots,n$，$n+1,\cdots$当作已知的客体系列，则上述两个定义便把每个自然数都对应于一个基数，具有这些基数的集叫做有穷集"和"如果一个集不是有穷的，便叫做无穷的".只要知道"有穷集"和"无穷集"分别是"有限集"和"无限集"的另一说法，就会看出此书观点：空集是有限集.

上海教育出版社《数学高一年级第一学期》中定义"含有有限个元素的集合叫做有限集"，对于一个集合，它的元素个数怎样算是"有限"？现今的集合论学者认识一致："可以用某个自然数表示".因此，元素个数可以用某个自然数表示的集合叫做有限集，该教材明确指出0是自然数，所以元素个数为零的集合是有限集，即空集是有限集.

参考文献

[1] 王树茗.集合的分类与空集的归宿[J].数学通讯，2010(3).

2. 怎样多角度证明基本不等式？

对基本不等式的证明，除了教材给出的方法，还能怎样证明？我们可以从下列各角度证明，获得对基本不等式新的认识.

一、代数视角

1. 平均值换元法

令 $a=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$，$b=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}$（其中 $a>0$，$b>0$），

则 $ab=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

所以 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

2. 增量换元法

不妨设 $a\geqslant b$，令 $t=a-b$，则 $t\geqslant 0$，且 $b=a-t$，其中 $a>0$，$b>0$，

则 $ab=a(a-t)=a^2-at=\left(a-\frac{t}{2}\right)^2-\frac{t^2}{4}\leqslant\left(a-\frac{t}{2}\right)^2$，

所以 $\sqrt{ab}\leqslant a-\frac{t}{2}=\frac{a+b}{2}$.

二、方程视角

构造以 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$（$a>0$，$b>0$）为根的一元二次方程 $(x-\sqrt{a})(x-\sqrt{b})=0$，

即 $x^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})x+\sqrt{ab}=0$.此方程有两个实根，

故其判别式 $\Delta=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4\sqrt{ab}=a+b-2\sqrt{ab}\geqslant 0$，即 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

三、函数视角

1. 构造函数

$$f(x)=x+\frac{1}{x}\ (x>0)$$

因为 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递减，在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

故当 $x=1$ 时 $f(x)$ 取得最小值 2，即当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\frac{1}{x}\geqslant 2$.

所以 $f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}\geqslant 2$，即$\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\geqslant 2$.所以$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

2. 构造函数

$$f(x)=\frac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a^x+b^x}(a>0,b>0,a\neq b)$$

不妨设 $a>b$，则 $f(x)=\frac{a\left(\frac{a}{b}\right)^x+b}{\left(\frac{a}{b}\right)^x+1}=a+\frac{b-a}{\left(\frac{a}{b}\right)^x+1}$.

因为$\frac{a}{b}>1$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)<f(0)$，即$\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}<\frac{a+b}{2}$，$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}}<\frac{a+b}{2}$.

所以$\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$.

3. 构造函数

$$f(x)=(\sqrt{a}x+\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}x+\sqrt{a})^2$$

因为函数 $f(x)=(a+b)x^2+4\sqrt{ab}x+(a+b)\geqslant 0$ 对任意实数 x 恒成立，

所以 $\Delta=(4\sqrt{ab})^2-4(a+b)^2\leqslant 0$，即$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

4. 构造凹凸函数

我们知道，如果函数 $f(x)$ 是下凸函数，则有 $f(x)+f(y)\geqslant 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ 成立.

若构造函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$，因为 $f(x)$ 是下凸函数，所以 $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y\geqslant 2\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$.

由于 $a>0,b>0$，可令 $a=\mathrm{e}^x,b=\mathrm{e}^y$，则 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$.

若构造函数 $f(x)=\lg x$，易知 $f(x)$ 是下凹函数，则 $f(x)+f(y)\leqslant 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

类似可得 $\lg a+\lg b\leqslant 2\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$，即$\frac{1}{2}\lg(ab)\leqslant\lg(\frac{a+b}{2})$，所以$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

四、统计视角

1. 构造方差

如果 $\overline{x}$ 为一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数，s^2 为这组数据的方差，易知

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2).$$

视$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$为一组数据，则由方差公式，得

$$s^2=\frac{1}{2}\left[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\left(a+b-\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)\geqslant 0.$$

所以$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

2. 构造分布列

视$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$为一组随机变量，其分布列为

ξ	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则 $\mathrm{E}\xi=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$，$\mathrm{E}\xi^2=\frac{a+b}{2}$.

由 $\mathrm{E}\xi^2\geqslant(\mathrm{E}\xi)^2$，得$\frac{a+b}{2}\geqslant\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$，整理，得$\frac{a+b}{2}\geqslant\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4}$.

所以$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

五、向量视角

构造向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\sqrt{a},\sqrt{b})$，$\boldsymbol{\beta}=(\sqrt{b},\sqrt{a})$，

则由$|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|\geqslant|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|$，知$\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{b+a}\geqslant 2\sqrt{ab}$，所以$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

六、复数视角

记 $z_1=\sqrt{a}+\sqrt{b}\,\mathrm{i}$，$z_2=\sqrt{b}-\sqrt{a}\,\mathrm{i}(a>0,b>0)$，则 $z_1\cdot z_2=2\sqrt{ab}+(b-a)\mathrm{i}$.

因为$|z_1|\cdot|z_2|=|z_1\cdot z_2|\geqslant\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2)$，所以 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，即$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

七、三角视角

1. 借助三角函数定义

构造两点 $A(\sqrt{a},\sqrt{b})$，$B(\sqrt{b},\sqrt{a})$，如图 1 所示，把它们写成参数形式，即点 A 的参数方程为

$$\begin{cases}\sqrt{a}=\sqrt{a+b}\cos\alpha,\\ \sqrt{b}=\sqrt{a+b}\sin\alpha,\end{cases}$$

点 B 的参数方程为

$$\begin{cases}\sqrt{b}=\sqrt{a+b}\cos\beta,\\ \sqrt{a}=\sqrt{a+b}\sin\beta,\end{cases}\text{其中 }\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

则 $2\sqrt{ab}=\sqrt{a+b}\cos\alpha\cdot\sqrt{a+b}\cos\beta+\sqrt{a+b}\sin\alpha\cdot\sqrt{a+b}\sin\beta$

$=(a+b)\cos(\alpha-\beta)\leqslant a+b$，所以 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

2. 借助余弦定理

在平面直角坐标系中，构造两点 $A(\sqrt{a},\sqrt{b})$ 和 $B(\sqrt{b},\sqrt{a})$，如图 1 所示.

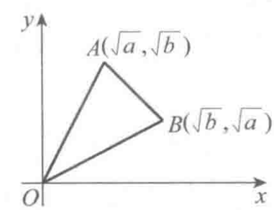

图 1

则 $|OA|=|OB|=\sqrt{a+b}$，$|AB|=\sqrt{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\sqrt{2}|\sqrt{a}-\sqrt{b}|$.

在 $\triangle AOB$ 中，由余弦定理，得

$$\cos\angle AOB=\frac{|OA|^2+|OB|^2-|AB|^2}{2|OA||OB|}$$

$$=\frac{2(a+b)-2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2(a+b)}=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}.$$

因为 $\angle AOB\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\angle AOB\leqslant 1$，故 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

八、解析几何视角

1. 借助点到直线的距离

因为直线 $\sqrt{a}x+\sqrt{b}y=0(a>0,b>0)$ 过原点，

所以点 $(\sqrt{b},\sqrt{a})$ 到直线 $\sqrt{a}x+\sqrt{b}y=0$ 的距离不大于该点到原点的距离，即

$$\frac{|\sqrt{ab}+\sqrt{ab}|}{\sqrt{a+b}}\leqslant\sqrt{a+b}.$$

所以 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

2. 借助三角形的面积

在平面直角坐标系中，构造关于 x 轴对称的两点 $A(\sqrt{a},\sqrt{b})$ 和 $B(\sqrt{a},-\sqrt{b})$，如图 2 所示.

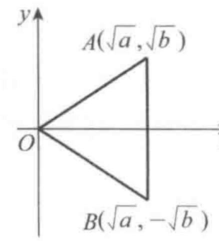

图 2

则 $|AB|=2\sqrt{b}$，$\triangle AOB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB||x_A|=\sqrt{ab}$.

又 $S=\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}\cdot\sin\angle AOB\leqslant\frac{a+b}{2},$$

所以 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

3. 借助曲线

当 $x>0$，$y>0$ 时，考虑平面直角坐标系中固定直线 $l: x+y=2m$ 及双曲线 $xy=c(c>0)$，如图 3 所示. 令直线 $y=x$ 交双曲线于点 $P(x_P,y_P)$，交直线 l 于点 $Q(x_Q,y_Q)$.

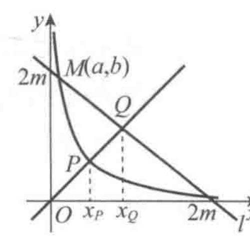

图 3

因为 $\sqrt{xy}$ 中的 x，y 与 $\frac{x+y}{2}$ 中的 x，y 相同，

所以直线 l 与双曲线必有交点，设交点坐标为 $M(a,b)$，则 $ab=x_P\cdot y_P=c$.

又 $x_P=y_P$，所以 $\sqrt{ab}=\sqrt{x_P\cdot y_P}=x_P$.

因为 $x_Q=m=\frac{a+b}{2}$，且 $x_P\leqslant x_Q$，所以 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

参考文献

[1] 方亚斌.怎样认识新课标中的基本不等式[J].数学通报，2013(2).

3. 怎样用几何方法证明均值不等式链？

我们知道，对于正数 a,b，称 $\sqrt{ab}$ 为几何平均数，$\frac{a+b}{2}$ 为算术平均数，$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 为平方平均数，$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ 为调和平均数，这些平均数之间的大小关系如下：

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$，当且仅当 $a=b$ 时各等号成立.

下面我们从几何角度探究上面不等式链的证明.

一、三角形中的线段

如图 1 所示，已知在直角三角形 ABC 中，$\angle BAC=90°$，AD 是斜边 BC 上的高，AE 是斜边 BC 上的中线.

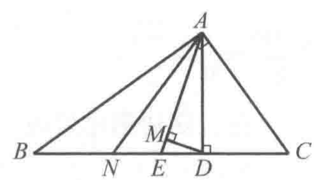

图 1

设 $BD=a$，$CD=b(a\geqslant b>0)$，那么 $AD=\sqrt{ab}$，$AE=\frac{a+b}{2}$.

过点 D 作 $DM\perp AE$，垂足为 M，则 $AM=\frac{AD^2}{AE}=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

在 BD 上取一点 N，使得 $DN=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$，则由 $DE=DB-BE=a-\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{2}$ 知 $DN\geqslant DE$，而 $AN=\sqrt{AD^2+DN^2}=\sqrt{ab+\frac{(a-b)^2}{2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

显然，$AM\leqslant AD\leqslant AE\leqslant AN$，即 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，当且仅

当 $a=b$ 时，有 $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\sqrt{ab}=\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

二、梯形中的割线

如图 2 所示，设在梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，且 $AB=b$，$CD=a(a>b>0)$.作 4 条直线均平行于两底边分别交两腰于点 A_i，$B_i(i=1,2,3,4)$.

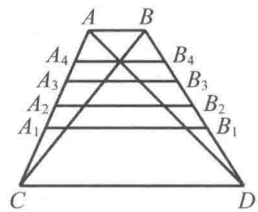

图 2

其中 A_1B_1 平分梯形的面积，有 $A_1B_1=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$；$A_2B_2$ 为中位线，有 $A_2B_2=\dfrac{a+b}{2}$；A_3B_3 分梯形为两个相似梯形，有 $A_3B_3=\sqrt{ab}$；A_4B_4 过两对角线的交点，有 $A_4B_4=\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$.

由 $AB<A_4B_4<A_3B_3<A_2B_2<A_1B_1<CD$，得 $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}<\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$，当且仅当梯形称为平行四边形即 $a=b$ 时，有 $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\sqrt{ab}=\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

三、四边形中线段

如图 3 所示，作直角三角形 ABC，使 $AC=\dfrac{a-b}{2}$，$AB=\dfrac{a+b}{2}(a>b>0)$，$\angle BAC=90°$，则 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

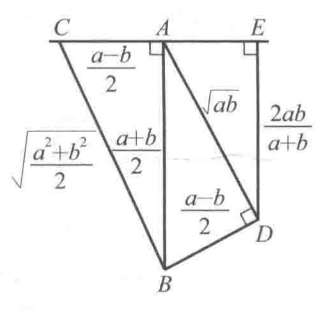

图 3

以 AB 为斜边作直角三角形 ADB，使 $BD=\dfrac{a-b}{2}$，则 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{ab}$.

过点 D 作 $DE\perp AC$ 的反向延长线，垂足为点 E，由 $\triangle ADE\backsim\triangle BAD$，得 $DE=\dfrac{AD^2}{AB}=\dfrac{ab}{\dfrac{a+b}{2}}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$.

显然 $DE<AD<AB<BC$，即$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

当且仅当 $a=b$ 时，有$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\sqrt{ab}=\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

四、圆的切割线

如图 4 所示，直线 PM 过圆 A 的圆心，交圆 A 于 P，Q 两点. 过点 M 作圆 A 的切线，切点为 C，连接 AC. 过点 C 作 $CH\perp PM$，H 为垂足. 过点 A 作 $AR\perp PM$，交圆 A 于点 R，连接 RM.

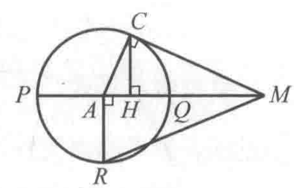

图 4

设 $PM=a$，$QM=b\,(a\geqslant b>0)$，则 $AR=\dfrac{a-b}{2}$，$AM=\dfrac{a+b}{2}$.

在直角三角形 ACM 中，$CM=\sqrt{AM^2-AC^2}=\sqrt{AM^2-AR^2}=\sqrt{ab}$，

$$HM=\frac{CM^2}{AM}=\frac{ab}{\dfrac{a+b}{2}}=\frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}.$$

在直角三角形 ARM 中，$RM=\sqrt{AM^2+AR^2}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

又 $HM\leqslant CM\leqslant AM\leqslant RM$，所以$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

参考文献

[1] 杨沧州. 不等式链的几种几何证明[J]. 数学教学，2011(3).

[2] 薛党鹏. 均值不等式链的统一性证明探究[J]. 数学教学，2011(3).

4. 为什么称不等式“$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\,(a>0,b>0)$”为基本不等式?

教材将不等式“$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\,(a>0,b>0)$”称为基本不等式,这是为什么呢?经过认真思考和查阅资料,之所以称不等式“基本”,我想有以下几点原因:

一、“基本”强调知识基础性

基本不等式不仅是有用的、有意义的,还是基础性的、本源性的.我们从基本不等式$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\,(a>0,b>0)$的生发角度分析其基础性.

首先看其生成,基本不等式所表示的不等关系和相等关系一样,都是数学中的基本关系;不等关系更普遍,更基本,能用不等关系刻画相等关系.从代数的角度看,该不等式是对正实数a,b进行加法、除法、乘法、开方等基本代数运算,且$\dfrac{a+b}{2}$表示两个正数的算术平均或等差中项,而$\sqrt{ab}$表示两个正数的几何平均或等比中项.其中算术平均与几何平均、等差中项与等比中项反映了算术或数列中的基本量.基本不等式的数学本质是任意实数平方的非负性的表现.不等式左边是对称的和式结构,右边是对称的积式结构,该不等式沟通这两种基本结构之间的关联.从几何角度看,基本不等式的几何意义有:周长相等的矩形中,正方形的面积最大;或者,以$a+b$为斜边的直角三角形中,等腰直角三角形的高最长;或者,更直观地,在圆中,弦长不大于直径等.正如章建跃老师所述,该不等式涉及的是代数、几何中的基本量.该不等式由这些基本量、基本运算有机组合而来,用“基本”命之,体现了包含在该不等式中众多数学概念的基础性,名正言顺.

其次,我们对该不等式进行发展性分析.该不等式可以推广到多元,还能证明其他众多的不等式,的确具有基本性.

二、“基本”凸显知识内在联系

强调基本不等式是一种基础性的数学知识,更能凸显数学知识之间的内在联系.由于基本不等式本身有多种等价形式,证明方法也多样,教学中如果能引导学生通过观察、探索、归纳和验证,得到该不等式的多种等价形式和证明方法,

还能得到意想不到的收获.这对完善学生数学认知结构具有积极的作用.文[1]中通过加、减、乘、除、开方、取倒数等一系列代数运算，在对运算结果之间的大小关系比较中，不仅得到了其等价形式，还推出了“调和平均数、几何平均数、算术平均数、平方平均数”的均值不等式链.由于基本不等式在代数中的基本性，教师若能引导学生将其头脑中零散的数学知识结构有机串联起来，就能帮助学生优化认知结构.文[1]中将代数与几何有机结合在一起，突出了数形结合的思想方法.从赵爽弦图、正交切分方块、斜交切分方块、射影定理、切割线定理、自相似直角三角形翻折等几何模型中，推导出基本不等式.这说明了基本不等式与几何知识之间有内在的联系，基本不等式的教学能沟通不同几何知识间的关联性.文[2]中构造了多种证明不等式的方法，除了从代数、函数、方程不同角度证明不等式外，还从统计、向量、复数、解析几何、三角、平面几何等不同角度对基本不等式进行了证明.这说明基本不等式与其他数学知识也有着深刻的联系.

基本不等式也是沟通数学与其他学科之间的桥梁.文[3]中设计物理学的背景知识，进行物体质量测量.首先，用无刻度的天平测得物体的质量，利用杠杆原理，计算物体的质量，这是一个结果；其次，两次测量物体的质量，用平均值估计物体实际质量，这又是一个结果；最后，通过比较两个质量之间的大小关系，得出基本不等式.文[4]中介绍了基本不等式在高中物理中解决非弹性碰撞、连接体的速度极值等极值问题的应用.在历史上，有人通过比较匀加速运动过程中的平均速度，和运动过程中时刻中点的瞬时速度，也能得到基本不等式.基本不等式和物理知识相关联，能培养学生跨学科的应用意识，同时有利于学生理解整个中学知识体系的关联性，优化认知结构.

三、“基本”重视知识认知过程

基本不等式告诉学生：这个不等式是证明诸多不等式的一个出发点，是一个过程的开始，有利于培养学生的思维能力.数学思想方法孕育于知识的发生发展过程中.思想是概念的灵魂，是数学素养的源泉，是从技能到能力的桥梁；过程是思想的载体，是领悟概念本质的平台，是培养数学能力的土壤.没有过程等于没有思想.如，基本不等式的证明方法多种多样，若充分利用函数的思想方法，则构造函数 $y=\ln x$，取 $x_1=a$，$x_2=b$，得$\frac{\ln a+\ln b}{2}\leqslant\ln(\frac{a+b}{2})$.化简可得到基本不等式.若充分利用方程的思想方法，则构造方程$(x-\sqrt{a})(x-\sqrt{b})=0$，方程化简，得 $x^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})x+\sqrt{ab}=0$.如果 $a>0$，$b>0$，方程恒有解，那么 $\Delta\geqslant0$，化简，得基本不等式.在多样化的证明过程中，能够培养学生灵活运用函数与方程的思想方法，突出了重视教学过程和认知过程，应重视在过程中培养学生思维的

理念.

四、“基本”还体现在可推广性、可迁移性

基本不等式与其他方面的数学知识有着紧密的联系，数学教学要重视引导学生从中挖掘出这些内在的关系，并对其进行推广.前面提到，可以将其推广到三元甚至 n 元的算术—几何平均值不等式或平均值不等式链.若将其条件中的范围扩大到实数域，结论又会如何呢？n 个数(不一定为正)的算术平均是一个重要的统计量，用途广泛.在统计中，可将其应用于某一统计量理想值的最佳估计中，等等.在对不等式作多方面的推广过程中，数学的应用天地更广阔了，更有用了.数学知识在数学上具有可推广性，在认知结构上具有可迁移性.我国教学历来重视基本，如基本知识、基本技能的说法深入人心，现在还新增了基本思想方法、基本活动经验的说法.强调基本，从迁移性来说，就是说这种认知方法、认知态度或认知策略具有超越具体情境的功能，不局限于特定的情境.在平常教学中，是在特定情境下学习特定的知识.为什么要学习这些知识？是因为这些知识中蕴含了可迁移的基本性要素.

参考文献

[1] 肖建辉.解读基本不等式的代数背景[J].中小学数学(高中版)，2010(3).

[2] 方亚斌.怎样认识新课标中的基本不等式[J].数学通报，2013(2).

[3] 袁泉润.“重要”不等式为何改为“基本”不等式[J].数学通讯，2014(9).

[4] 汤云强.浅谈“基本不等式”在高中物理解题中的应用[J].物理通报，2011(1).