高等院校精品课系列教材

高等院校经济数学系列教材

Probability

概率论

第二版

何其祥　主编

上海财经大学出版社

本书由上海财经大学浙江学院发展基金资助出版

高等院校精品课系列教材
高等院校经济数学系列教材

概 率 论

（第二版）

何其祥　主编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论/何其祥主编. —2版. —上海:上海财经大学出版社,2018.9
高等院校精品课系列教材
高等院校经济数学系列教材
ISBN 978-7-5642-3094-4/F・3094

Ⅰ.①概… Ⅱ.①何… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 Ⅳ.①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 185088 号

□ 责任编辑 刘光本
□ 责编电邮 lgb55@126.com
□ 责编电话 021—65904890
□ 封面设计 杨雪婷

GAI LÜ LUN
概 率 论
(第二版)
何其祥 主编

上海财经大学出版社出版发行
(上海市中山北一路 369 号 邮编 200083)
网 址:http://www.sufep.com
电子邮箱:webmaster @ sufep.com
全国新华书店经销
上海宝山译文印刷厂印刷装订
2018 年 9 月第 2 版 2018 年 9 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16 13 印张 333 千字
(习题集 12 印张 307 千字)
印数:4 201—8 200 定价:69.00 元

(本教材赠习题集,请向售书单位索取)

第二版前言

本书第一版出版以来，被不少兄弟院校选作经济管理类专业数学基础课的教材。编写独立学院的教材，我们还在探索中，经过第一版共两年的使用，陆续发现一些问题，本校学生和兄弟院校的同行们也提了不少宝贵意见，在此一并表示感谢。

本次修订工作并未调整总的框架，但还是做了较大的改动，包括：

1. 对第二章、第四章和第五章的内容进行了重新编写，以增强文字的可读性以及前后章节的连贯性，增强了对有关概率思想、定理或结论的阐述和解释。

2. 考虑到独立学院学生的数学基础相对薄弱，对若干定理的证明等以“*”标注，这些内容可根据具体情况适当取舍，并不影响其他内容的教学。

3. 全书增加了例题的数量，希望通过这一形式，能贴合独立学院学生的教学。

4. 对第二章、第四章的课后习题做了较大的改动和调整。

本次修订由何其祥完成。在本书的编写和出版过程中，得到了上海财经大学浙江学院领导的关心，得到了上海财经大学浙江学院发展基金的大力支持，并得到了上海财经大学出版社的协助，尤其是刘光本博士的认真编辑和校对，保证了本书的质量，在此表示衷心的感谢。本书出版正值上海财经大学浙江学院建校十周年之际，谨以此书献给十周年校庆。

本书可供独立学院和相当层次的学生作为教学用书，也可作为其他相关专业的参考书。

由于编者水平所限，书中错误难免，恳请专家和本书使用者批评指正。

前言

概率论是研究随机现象数量规律的学科，是建立和分析带有随机因素的数学模型的基础，在经济管理、工程技术、自然科学等众多领域有着广泛的应用，尤其在近几十年中，概率统计的思想和方法被大量和成功地用于经济、金融等领域。概率论是经济管理类学生重要的基础课程。

概率论的教材，包括国内作者的著作和国外介绍过来的译本，已有相当的出版量，其中不乏优秀教材，其内容是比较固定的。随着我国高等教育事业逐步普及化，尤其是独立学院的不断涌现，适合于独立学院学生层次的教材还不多见。独立学院学生基础相对薄弱，且数学基础课程的课时数被不断压缩已是普遍现象。考虑到这些因素，根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制订的《大学数学课程教学基本要求》，我们研究和借鉴了国内外众多优秀教材的结构和内容安排，并充分考虑到经管类学生的需求和特点，编写了这本教材。本书由何其祥主编，全书共五章，第一章由何其祥编写，第二章由晁海舟编写，第三章由邹晓光、沈炳良编写，第四章由刘小锋、罗平编写，第五章由胡志明编写。全书力求用较通俗的语言和方法介绍这一课程的主要思想、概念，但又保持其系统性、严谨性。

本书可读性强，既可以作为独立学院或相当层次的学生学习用书，又可以用作其他专业学生的参考书。为满足不同层次学生的需求，本书内容分为必学部分和选学部分(加 * 部分)，习题分为(A)(B)两组，(B)组略难。

在概率论课程建设和本书的编写、出版过程中，得到了上海财经大学浙江学院领导的关心，以及教务处的大力支持，并得到了上海财经大学出版社的协助，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免不妥之处和错误，恳请广大读者和同行批评指正。

目　录

第一章

随机事件与概率

概率论是研究随机现象的数量规律的学科，是统计学的理论基础．事件和概率是概率论中最基本的两个概念．在这一章中，我们将以深入浅出的方式介绍这些概念，主要内容包括：随机现象与随机试验、随机事件及其运算、古典概型和几何概率、概率的公理化定义、条件概率、全概率公式和贝叶斯公式、事件的独立性和贝努利概型等．

§1.1 随机现象与样本空间

一、随机现象

当我们观察自然界和人类社会中各种事物的变化规律时，会发现两种不同类型的现象．一种我们称之为**决定性现象**，它在一定的条件下必然出现某个结果．例如，在没有外力作用下，做匀速直线运动的物体必然继续做匀速直线运动；太阳必然从东方升起；任何一种生物总要经历生长、发育、衰老直至死亡等各个阶段；等等．这种在一定条件下必然会发生的事情称为**必然事件**；反之，那种在一定条件下必然不会发生的事情称为**不可能事件**．例如，"在一个大气压下，没有加热到 100℃的水沸腾"是不可能的．

必然事件和不可能事件，虽然表现形式有所不同，但两者的本质是一样的．必然事件的反面就是不可能事件，而不可能事件的反面就是必然事件．必然事件和不可能事件组成决定性现象，它广泛存在于自然现象和社会现象中，概率论以外的数学学科研究的就是决定性现象的数量规律．

除了决定性现象外，在自然界和社会现象中还存在着与它有着本质区别的另一类现象．例如，今天无法准确地确定明天的最高或最低气温；金融领域中事先无法断言将来某时刻某证

交所的指数；经过某交叉路口时事先不能确定交通信号灯的颜色；同一条生产线上用同样的工艺生产出来的灯泡寿命长短也呈现出偶然性，这是在生产过程中乃至对灯泡寿命试验的过程中种种偶然性的条件差异，使得每只灯泡的寿命不能事先确定；概率论中最经典的例子，要数向上掷一枚硬币，结果可能是正面或反面朝上，事先无法断定．这些现象的共同特点是：在基本条件不变的情况下，一系列的试验或观察会得到各种不同的结果，换言之，就某一次的试验或观察而言，它可能出现这种结果，可能出现那种结果，事先无法确定，呈现出一种偶然性，这种现象称为**随机现象**(random phenomenon)．概率论的研究对象就是这种随机现象的数量规律．

那么随机现象是否普遍呢？回答是肯定的．世界上的万事万物都是相互依赖、相互影响的，某一次的观察或试验，其结果如何，往往受到许多偶然因素的影响，表现形式往往是偶然的或"随机的"，因而随机现象是普遍存在的，从而概率论的研究不但具有理论上的意义，而且具有广泛的应用价值．

事实上，概率论和以它为基础的数理统计作为现代数学的重要组成部分，由于它们在研究方法上的鲜明特色，在自然科学、社会科学、工程技术、军事科学等各个领域有着广泛的应用，特别是最近几十年中，概率论与数理统计的思想和方法在经济、管理、金融、保险等方面得到了大量、深入的应用，使得这些领域的研究方法和研究范围取得了实质性的进步并得到了蓬勃的发展．正因为如此，概率论与数理统计成了财经类专业最重要的数学基础课之一．

二、样本空间

对于随机现象，我们感兴趣的是它的结果，因此必须对它进行观察或试验，这种对随机现象的某一特征的试验或观察，称为**随机试验**，简称**试验**(trial)．具体来说，称一个试验为随机试验，必须满足下述条件：

(1)试验可以在相同的条件下重复进行；

(2)试验之前能确定所有可能的结果；

(3)试验之前不能确定将出现所有可能结果中的哪一个．

例如，T_1：向上掷一枚硬币，观察正、反面出现的情况；

T_2：检查某企业应收账款余额；

T_3：观察某市过去一年发生的交通事故数．

我们把随机试验的每一个可能结果称为**样本点**(sample point)，用 ω 表示．样本点全体组成的集合称为**样本空间**(sample space)，用 Ω 表示．要认识一个随机试验，首先必须弄清楚它可能出现的各种结果，因此确定样本空间是研究随机现象的第一步．下面我们来看几个例子．

例 1－1　向上掷一枚骰子，观察朝上一面的点数，所有可能结果组成的样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，如果将六个面分别涂以红、黄、蓝、绿、白、黑六种颜色，则 $\Omega=\{$红、黄、蓝、绿、白、黑$\}$，这两个样本空间表面上不同，但本质上是一致的，它们可以统一抽象地记为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$.

一般地，像上面只有有限个样本点的样本空间可以表示为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$.

样本空间的这种抽象表示，实质上是抓住了随机现象的本质，使得那些表面上不同而本质上一致的各种随机现象能用统一的模型来表示．例如，只包含两个样本点的样本空间，既能作为掷硬币出现正面、反面的模型，又能用于人寿保险中“生存”与“死亡”的模型，以及描述天气时“下雨”与“不下雨”的模型，或者某公共汽车站“有人排队”与“无人排队”的模型等．

例 1－2　观察某“110”报警台在 $[0,t]$ 内来到的报警电话数，其结果显然为一非负整数，但很难确定报警数的上界，因此样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$，这一样本空间包含无穷多个样本点，但它们可以按某种次序排列出来，这时我们称它有**可列**个样本点，其一般形式为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

例 1－3　测量某一零件的长度，考察其测量结果与真正长度的误差，样本空间 Ω 可取作 $[-M,M]$，其中 M 为最大正误差，如果无法确定这一最大值，将 Ω 取作 $(-\infty,+\infty)$ 也无妨．这里的样本空间 $[-M,M]$ 也含有无穷多个样本点，但它无法像例 1－2 中的样本空间那样将样本点一一排出，我们称这样的样本空间所包含的样本点有**不可列**个．

例 1－4　为评价某学校小学生身体的生长发育状况，需要同时测量小学生的身高、体重和胸围，在这一随机试验中，任一样本点是一个有序数组 (x,y,z)，其中 x,y,z 分别表示被测量小学生的身高、体重和胸围，因此样本空间为 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0<x\leqslant a,0<y\leqslant b,0<z\leqslant c\}$，这里的 a,b,c 分别表示该校学生身高、体重和胸围的最大值．这一样本空间所包含的样本点显然也有不可列个，但例 1－3 是一维的，而这里是高维的．

从以上这些例子不难发现，随着所讨论随机试验的不同，相应的样本空间可能很简单，也可能较复杂．在今后的讨论中，我们一般假定样本空间是预先给定的，这种必要的抽象使我们能更好地抓住随机现象的本质，得到的结果也能得到广泛的应用．

§1.2　随机事件与频率稳定性

一、随机事件

对于随机现象，我们除了关心随机试验中某一结果是否会出现，往往还会关心试验的结果

是否具有某一特征，称试验结果具有某一特征为**随机事件**，简称**事件**(event). 习惯上，用 A,B,C等大写拉丁字母表示随机事件.

例如，在例 1—1 中，样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，如果以 A 表示“得到的为奇数”，显然 $A=\{1,3,5\}$；如果以 B 表示“得到的点数不大于 4”，则 $B=\{1,2,3,4\}$，这里的 A、B 均有一定的特征，为随机事件，它们都是由 Ω 中的若干个样本点构成. 当然，像“出现的点数为 1”“出现的点数为 5”等都是随机事件，它们只包含单个样本点. 又如在考察测量误差的例 1—3 中，样本空间 $\Omega=[-M,M]$，如果以 A 表示“测量结果与真正长度的误差绝对值不大于 0.5 个单位”，则 $A=[-0.5,0.5]$.

由此可见，**随机事件是由若干个样本点组成的集合，或者说是样本空间的某个子集**. 称某个随机事件 A 发生，当且仅当该事件所包含的某个样本点出现.

由于随机事件是样本空间的子集，所以样本空间 Ω 本身也可以看作一个事件，由于在任何一次试验中总有 Ω 中的某一样本点出现，也就是说，Ω 总发生，所以 Ω 就是必然事件.而不包含有任何样本点的空集 $\varnothing$ 也可以作为一个事件，由于在任何一次试验中总不可能有 $\varnothing$ 中的某一样本点出现，即 $\varnothing$ 总不发生，因此 $\varnothing$ 就是不可能事件. 当然，必然事件和不可能事件均归属于决定性现象，但我们宁可把它们作为随机事件的两个极端来处理，这既是必需的，也是方便的.

二、事件之间的关系与运算

给定一个样本空间，显然可以定义不止一个随机事件，分析这些事件之间的相互关系，不仅有助于认识事物的本质，而且可以通过对简单事件规律的研究去推算复杂事件的规律. 下面我们介绍事件之间的相互关系和运算. 在下面的叙述中，如果没有特别声明，均认为样本空间 Ω 已经给定，而 $A,B,A_i,(i=1,2,\cdots)$等均为事件.

1. 事件之间的关系

(1)包含关系

若事件 A 的每一个样本点都属于事件 B，则称 A **包含于** B，或称 B **包含** A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，这时事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生.

例如在例 1—2 中，若以 A 表示事件“$[0,t]$内来到的报警电话不少于1 500次”，而 B 表示事件“$[0,t]$内来到的报警电话数不少于1 200次”，那么 $A=\{1\ 500,1\ 501,\cdots\}$，$B=\{1\ 200,1\ 201,\cdots\}$，容易看出 A 的每一个样本点都属于事件 B，即 $A\subset B$，此时 A 的发生必然导致事件 B 的发生. 显然，对任一事件 A，总有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

(2)相等事件

对事件 A 与 B,如果同时成立 $A\subset B$ 和 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B 是**等价**的或 A **等于** B,记为 $A=B$. 实际上,此时 A 与 B 表示同一个事件,它们所包含的样本点完全相同.

(3)不相容事件

若在任何一次试验中,事件 A 与 B 都不可能同时发生,则称事件 A 与 B **互不相容**,也称 A 与 B 为**互斥事件**. 类似地,若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则称这 n 个事件互不相容. 更进一步,若可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容,则称 $A_1,A_2,\cdots$ 互不相容.

2. 事件之间的运算

(1)交(积)

由同时属于事件 A 与事件 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的**交或积**,记为 $A\cap B$ 或 AB,事件 AB 表示事件 A 与事件 B 同时发生.

两个事件的交运算可以容易地推广到 n 个事件以至于可列个事件的场合. 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交事件记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$,它由同时属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的样本点组成,表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生. 在可列个事件的场合,我们定义 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

显然,事件 A 与 B 互不相容即 $AB=\varnothing$. n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing$, $i\neq j$, $i,j=1,2,\cdots,n$. 可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j$, $i,j=1,2,\cdots$.

(2)并

由至少属于事件 A 与 B 中的一个的样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的**并**,记为 $A\cup B$,事件 $A\cup B$ 表示事件 A 与 B 中至少有一个发生.

如果事件 A 与 B 互不相容,则称它们的并为**和**,记为 $A+B$.

两个事件的并运算可以容易地推广到 n 个事件以至于可列个事件的场合. 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并事件记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,它由至少属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的一个的样本点组成,表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生. 同样,如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,则称它们的并为**和**,记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$.

对于可列个事件的场合,我们定义 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 进一步,若这可列个事件互不相容,则称它们的并为**和**,记为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(3)逆

对于事件A,由所有不属于A的样本点组成的集合称为事件A的**逆事件**或**对立事件**,记为$\overline{A}$,$\overline{A}$表示事件A不发生. 例如,若A表示事件"$[0,t]$内来到的报警电话数为偶数或0",则$\overline{A}$表示"$[0,t]$内来到的报警电话数为奇数". 显然,若$\overline{A}$是A的对立事件,则A也是$\overline{A}$的对立事件,即$\overline{\overline{A}}=A$.必然事件和不可能事件互为对立事件.

(4)差

由属于事件A而不属于事件B的样本点组成的集合称为事件A与B的**差**,记为$A-B$,事件$A-B$表示事件A发生而事件B不发生,显然$A-B=A\overline{B}=A-AB$.

在进行事件的运算时,我们做如下顺序的约定:首先进行逆的运算,再进行交的运算,最后进行并或差的运算.

由于事件是通过集合来定义的,所以上面介绍的事件之间的关系与运算,和相应的集合之间的关系与运算非常相似. 因此,我们可以借助集合论的知识和方法来帮助理解事件之间的关系与运算,譬如可以用下面直观的维恩(Venn)图来描述上面介绍的这些关系与运算(见图1—1);另一方面,应学会用概率论的观点来解释这些关系与运算.

对于事件之间的运算,成立以下法则:

(1)交换律:$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

(2)结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3)分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4)德莫根(De Morgan)定理:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

上述运算法则可以推广到多个事件甚至可列个事件,譬如对于德莫根定理,我们有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i};\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$
$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i};\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

例1—5 设A,B,C为三个事件,利用它们表示下列事件:

(1)A发生而B,C都不发生:$A\overline{B}\,\overline{C}$或$A-B-C$或$A-(B\cup C)$;

(2)三个事件都不发生:$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$或$\overline{A\cup B\cup C}$;

(3)三个事件中恰好有一个发生:$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$;

(4)三个事件中至少发生一个:$A\cup B\cup C$或$ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$;

(5)三个事件中至少有一个不发生:$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$或$\overline{ABC}$.

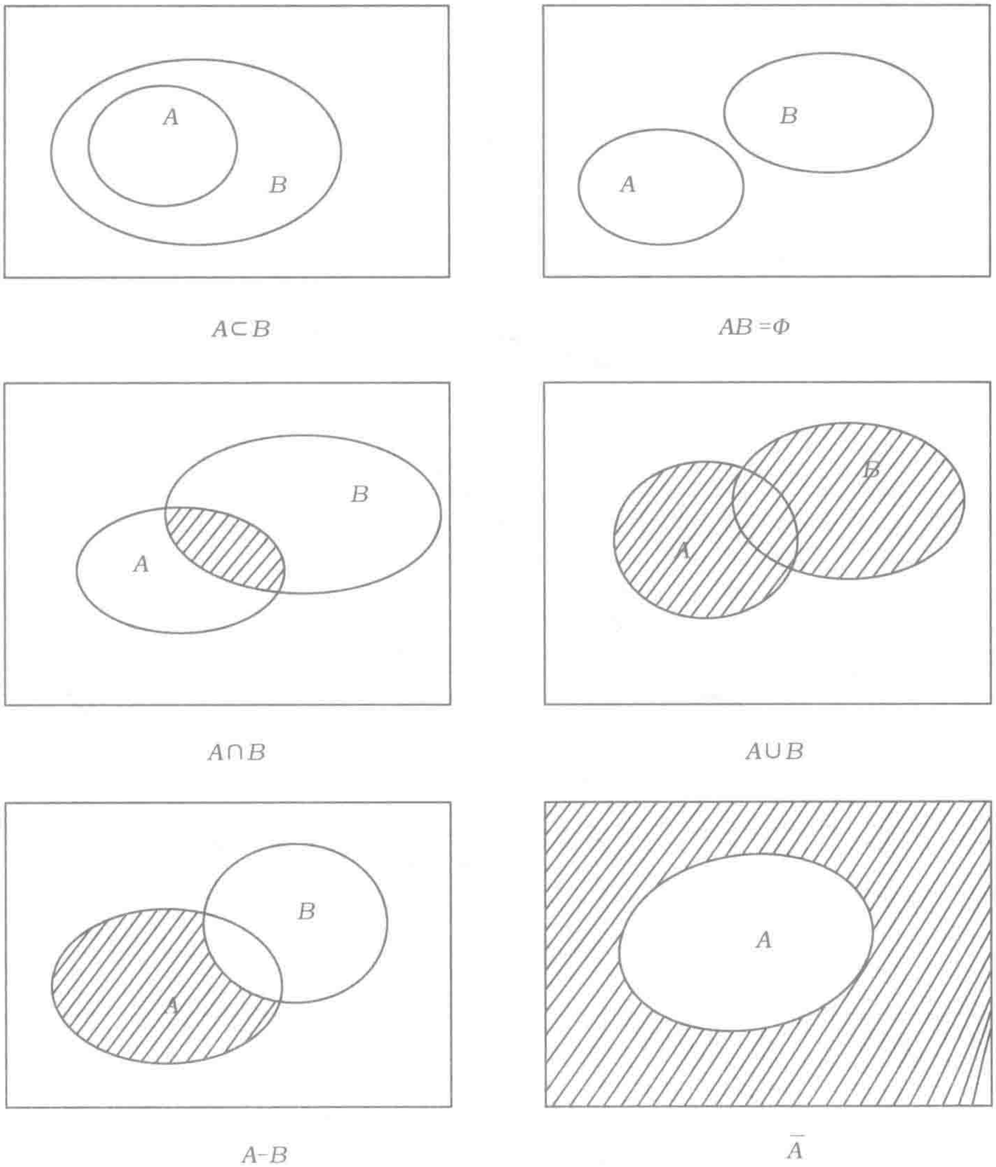

图 1—1　事件之间的关系与运算

三、频率与概率

某一次试验或观察中出现结果的偶然性并不等于说随机现象是杂乱无章和无规律的，当我们对随机现象进行大量重复的试验或观察时，就会呈现出明显的规律性——频率稳定性．

定义 1—1　对于随机事件 A，若在 n 次试验中出现了 μ_n 次，则称

$$F_n(A)=\frac{\mu_n}{n}$$

为随机事件 A 在 n 次试验中出现的**频率**(frequency)．

为了说明频率稳定性，让我们先来看一些经典的例子．

例 1—6 抛一枚硬币,可能出现正面,也可能出现反面,事先作出确定的判断是不可能的.但假如硬币是均匀的,那么,我们有理由认为出现正面和反面的可能性应该一样,即在大量重复的试验中出现正面和反面的频率都应接近 50%,为验证这一点,历史上曾有不少人做过试验,其结果如下:

表 1—1 掷硬币试验数据表

实 验 者	投掷数	出现正面的次数	出现正面的频率
德莫根(D.Morgan)	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
费勒(Feller)	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊(K.Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊(K.Pearson)	24 000	12 012	0.500 5

例 1—7 任意指定一本英文书,翻到任意一页,任意指定该页中的某一行及该行中的任意一个位置,记录所得到的字符,大量重复这一试验,会发现 26 个字母和其他字符(包括标点符号和空格)的使用频率相当稳定. 表 1—2 是经过大量试验后得出的:

表 1—2

字符	其他	E	T	O	A	N	I	R	S
频率	0.2	0.105	0.072	0.065 4	0.063	0.059	0.055	0.054	0.052
字符	H	D	L	C	F	U	M	D	
频率	0.047	0.035	0.029	0.023 4	0.022 5	0.022 5	0.021	0.017 5	
字符	W	G	B	U	K	X	J	Q	Z
频率	0.012	0.011	0.010 5	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001

这样的例子还可以举出很多. 例如,多次测量同一零件的长度,其结果不一定相同,但当测量次数不断增加时,测量结果的算术平均会越来越接近于某一常数;衣服总在同样的部位破损,"水滴石穿"揭示的也是同样的道理. 这些例子表明这样一个事实:虽然在一次试验或观察中某一个随机事件 A 是否发生是偶然的,但当试验次数 n 很大时,事件 A 出现的频率总在某个固定常数附近摆动,而且一般说来,n 越大,摆动的幅度越小,这一规律称为**频率稳定性**(frequency stability).

频率稳定性是由观察对象的固有属性所决定的. 抛掷一枚硬币,可能出现正面或反面,假