

21世纪高等学校规划教材 | 电子信息

电磁场与电磁波

李锦屏 编著



清华大学出版社

高等学校规划教材 | 电子信息



电磁场与电磁波

李锦屏 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

针对电类不同专业本科生及电磁场与电磁波理论性强的特点,本书在内容上加强了基础部分,补充了多年来教学效果较好的相关例题,并对个别例题加入仿真场图以增强其直观性,尽量做到各专业能够通用。使教师用得顺手,学生学得轻松。

本书共6章。第1章复习矢量分析的基本知识,集中学习场的分析方法,建立场的概念。第2~4章介绍静态场,论述了静电场、恒定电场和恒定磁场的基本概念和计算方法及其应用,并将边值问题贯穿其中,使理论和计算融为一体。第5章介绍时变电磁场的基本理论,介绍了时变电磁场的基本属性、运动规律和计算方法。第6章介绍了平面电磁波传播特性与传播参数以及电磁波极化特性。每章都配有提要、习题,附录给出了部分习题答案。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/李锦屏编著. —北京:清华大学出版社,2018

(21世纪高等学校规划教材·电子信息)

ISBN 978-7-302-48485-1

I. ①电… II. ①李… III. ①电磁场—高等学校—教材 ②电磁波—高等学校—教材 IV. ①O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第227743号

责任编辑:郑寅堃 李 晔

封面设计:傅瑞学

责任校对:梁 毅

责任印制:刘海龙

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课件下载:<http://www.tup.com.cn>,010-62795954

印 装 者:北京国马印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:13

字 数:308千字

版 次:2018年1月第1版

印 次:2018年1月第1次印刷

印 数:1~1000

定 价:39.00元

产品编号:074798-01

出版说明

随着我国改革开放的进一步深化,高等教育也得到了快速发展,各地高校紧密结合地方经济建设发展需要,科学运用市场调节机制,加大了使用信息科学等现代科学技术提升、改造传统学科专业的投入力度,通过教育改革合理调整和配置了教育资源,优化了传统学科专业,积极为地方经济建设输送人才,为我国经济社会的快速、健康和可持续发展以及高等教育自身的改革发展做出了巨大贡献。但是,高等教育质量还需要进一步提高以适应经济社会发展的需要,不少高校的专业设置和结构不尽合理,教师队伍整体素质亟待提高,人才培养模式、教学内容和方法需要进一步转变,学生的实践能力和创新精神亟待加强。

教育部一直十分重视高等教育质量工作。2007年1月,教育部下发了《关于实施高等学校本科教学质量与教学改革工程的意见》,计划实施“高等学校本科教学质量与教学改革工程”(简称“质量工程”),通过专业结构调整、课程教材建设、实践教学改革、教学团队建设等多项内容,进一步深化高等学校教学改革,提高人才培养的能力和水平,更好地满足经济社会发展对高素质人才的需要。在贯彻和落实教育部“质量工程”的过程中,各地高校发挥师资力量强、办学经验丰富、教学资源充裕等优势,对其特色专业及特色课程(群)加以规划、整理和总结,更新教学内容、改革课程体系,建设了一大批内容新、体系新、方法新、手段新的特色课程。在此基础上,经教育部相关教学指导委员会专家的指导和建议,清华大学出版社在多个领域精选各高校的特色课程,分别规划出版系列教材,以配合“质量工程”的实施,满足各高校教学质量和教学改革的需要。

为了深入贯彻落实教育部《关于加强高等学校本科教学工作,提高教学质量的若干意见》精神,紧密配合教育部已经启动的“高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作”,在有关专家、教授的倡议和有关部门的大力支持下,我们组织并成立了“清华大学出版社教材编审委员会”(以下简称“编委会”),旨在配合教育部制定精品课程教材的出版规划,讨论并实施精品课程教材的编写与出版工作。“编委会”成员皆来自全国各类高等学校教学与科研第一线的骨干教师,其中许多教师为各校相关院、系主管教学的院长或系主任。

按照教育部的要求,“编委会”一致认为,精品课程的建设工作从开始就要坚持高标准、严要求,处于一个比较高的起点上。精品课程教材应该能够反映各高校教学改革与课程建设的需要,要有特色风格、有创新性(新体系、新内容、新手段、新思路,教材的内容体系有较高的科学创新、技术创新和理念创新的含量)、先进性(对原有的学科体系有实质性的改革和发展,顺应并符合21世纪教学发展的规律,代表并引领课程发展的趋势和方向)、示范性(教材所体现的课程体系具有较广泛的辐射性和示范性)和一定的前瞻性。教材由个人申报或各校推荐(通过所在高校的“编委会”成员推荐),经“编委会”认真评审,最后由清华大学出版

社审定出版。

目前,针对计算机类和电子信息类相关专业成立了两个“编委会”,即“清华大学出版社计算机教材编审委员会”和“清华大学出版社电子信息教材编审委员会”。推出的特色精品教材包括:

- (1) 21世纪高等学校规划教材·计算机应用——高等学校各类专业,特别是非计算机专业的计算机应用类教材。
- (2) 21世纪高等学校规划教材·计算机科学与技术——高等学校计算机相关专业的教材。
- (3) 21世纪高等学校规划教材·电子信息——高等学校电子信息相关专业的教材。
- (4) 21世纪高等学校规划教材·软件工程——高等学校软件工程相关专业的教材。
- (5) 21世纪高等学校规划教材·信息管理与信息系统。
- (6) 21世纪高等学校规划教材·财经管理与应用。
- (7) 21世纪高等学校规划教材·电子商务。
- (8) 21世纪高等学校规划教材·物联网。

清华大学出版社经过三十多年的努力,在教材尤其是计算机和电子信息类专业教材出版方面树立了权威品牌,为我国的高等教育事业做出了重要贡献。清华版教材形成了技术准确、内容严谨的独特风格,这种风格将延续并反映在特色精品教材的建设中。

清华大学出版社教材编审委员会

联系人:魏江江

E-mail: weijj@tup.tsinghua.edu.cn

前言

随着科学技术的发展,电磁场理论的应用研究已涉及微波技术、光纤通信、天线与雷达、电磁成像、电磁兼容及电机与电气设备的计算机辅助设计等领域。电磁场理论是高等学校工科相关专业的一门重要技术基础课,本课程的主要任务是在大学物理中电磁学的基础上,以工程数学的矢量分析和场论为工具,进一步研究电磁场的基本规律,以培养学生的逻辑推理和科学思维能力,使学生能用“场”的观点定性分析判断电磁现象,掌握计算简单电磁场问题的基本方法。

本书共6章。第1章复习矢量分析的基本知识,集中学习场的分析方法,建立场的概念,为以后的学习奠定教学基础。第2~4章介绍静态场,论述了静电场、恒定电场和恒定磁场的基本概念和计算方法及其应用,并将边值问题贯穿其中,使理论和计算融为一体。第5章介绍时变电磁场的基本理论,论述了麦克斯韦方程组,以此为基础介绍了时变电磁场的基本属性、运动规律和计算方法。第6章介绍了平面电磁波传播特性与传播参数以及电磁波极化特性。每章都配有提要、习题,附录给出了部分习题答案,教学中可结合专业情况适当取舍。

本书由兰州交通大学电信学院李锦屏统编全稿。第2、4、5章由李锦屏执笔,第1、3、6章由兰州交通大学电信学院李新颖执笔。研究生李小兵、张文霞、张文静参与了部分文档的录入及图形的绘制工作。本书编写过程中,得到了电信基础教研室教师们的大力支持,参考了许多国内外相关教材和资料,在此一并表示衷心的感谢。限于编者的水平,书中难免疏漏和不妥之处,欢迎使用本书的师生和其他读者批评指正。

编者

2017年8月

目 录

第 1 章 矢量分析	1
1.1 矢量代数	1
1.1.1 标量和矢量	1
1.1.2 矢量的加法和减法	2
1.1.3 矢量的乘法	2
1.1.4 矢量函数的导数与微分	3
1.2 三种常用的正交坐标系	3
1.2.1 直角坐标系	3
1.2.2 圆柱坐标系	5
1.2.3 球坐标系	6
1.3 标量场的梯度	8
1.3.1 标量场的等值面	8
1.3.2 方向导数	9
1.3.3 梯度	10
1.4 矢量场的通量和散度	12
1.4.1 矢量场的矢量线	12
1.4.2 通量	12
1.4.3 散度	13
1.4.4 散度定理	14
1.5 矢量场的环流与旋度	15
1.5.1 环流	15
1.5.2 旋度	16
1.5.3 斯托克斯定理	17
1.6 无旋场与无散场	18
1.6.1 无旋场	18
1.6.2 无散场	19
1.7 亥姆霍兹定理	20
提要	21
思考题	21
习题 1	22
第 2 章 静电场	25
2.1 电场强度及电位	25

2.1.1	电场强度	25
2.1.2	分布电场的电场强度	26
2.1.3	电位	29
2.1.4	叠加积分法计算电位	31
2.2	静电场的基本方程	33
2.2.1	静电场中的导体和电介质	33
2.2.2	高斯定理	35
2.2.3	用高斯定律计算静电场	36
2.2.4	静电场基本方程	38
2.3	分界面上的衔接条件	39
2.4	静电场边值问题	41
2.4.1	泊松方程和拉普拉斯方程	42
2.4.2	静电场边值问题	42
2.4.3	唯一性定理	44
2.5	镜像法	45
2.5.1	镜像法	45
2.5.2	导体球面的镜像	46
2.5.3	介质平面的镜像	47
2.5.4	导体圆柱面的镜像	48
2.6	电容和部分电容	50
2.6.1	电容	50
2.6.2	部分电容	52
2.6.3	静电屏蔽	56
2.7	静电能量与力	56
2.7.1	带电体系统中的静电能量	56
2.7.2	静电能量的分布及其密度	57
2.7.3	静电力	59
	提要	61
	思考题	63
	习题 2	66
第 3 章 恒定电场		69
3.1	导电介质中的电流	69
3.1.1	电流密度和元电流	69
3.1.2	欧姆定律的微分形式	70
3.1.3	焦耳定律的微分形式	71
3.2	电源电动势与局外场强	72
3.2.1	电源电动势与局外场强	72
3.2.2	恒定电场	72

3.3 恒定电场基本方程及边界条件	73
3.3.1 电流连续性方程	73
3.3.2 电场强度的环路线积分	73
3.3.3 恒定电场的基本方程	73
3.3.4 分界面上的边界条件	74
3.3.5 恒定电场的边值问题	76
3.4 电导	77
3.4.1 电导	77
3.4.2 接地电阻	79
3.4.3 跨步电压	79
提要	80
思考题	81
习题 3	81
第 4 章 恒定磁场	83
4.1 磁感应强度	83
4.2 真空中的安培环路定律	86
4.3 介质的磁化	88
4.3.1 磁偶极子	88
4.3.2 磁化强度	88
4.3.3 磁化电流	89
4.4 恒定磁场的基本方程	90
4.4.1 一般形式的安培环路定律	90
4.4.2 磁通连续性原理	91
4.4.3 恒定磁场的基本方程	92
4.5 分界面上的边界条件	92
4.6 矢量磁位和标量磁位	94
4.6.1 矢量磁位	94
4.6.2 标量磁位	97
4.7 镜像法	98
4.8 电感	100
4.8.1 自感	100
4.8.2 互感	103
4.8.3 纽曼公式	103
4.9 磁场能量与力	104
4.9.1 恒定磁场中的能量	104
4.9.2 磁场能量的分布及其密度	106
4.9.3 磁场力	107
4.10 磁路及其计算	109

4.10.1	铁磁质和非铁磁质的分界面	109
4.10.2	磁路定律	110
提要	113
思考题	115
习题 4	116
第 5 章	时变电磁场	119
5.1	电磁感应定律	119
5.1.1	电磁感应定律	119
5.1.2	感应电场	120
5.2	全电流定律	122
5.3	电磁场基本方程组	125
5.3.1	麦克斯韦方程组的积分形式	125
5.3.2	麦克斯韦方程组的微分形式	126
5.3.3	介质的本构关系	126
5.4	电磁场的边界条件	127
5.4.1	一般情况	127
5.4.2	两种特殊情况下的边界条件	128
5.5	磁场的位函数	130
5.5.1	位函数	131
5.5.2	达朗贝尔方程	131
5.5.3	达朗贝尔方程的解	132
5.6	电磁能量守恒定律	133
5.7	正弦电磁场	136
5.7.1	正弦电磁场的复数表示法	136
5.7.2	玻印廷定理的复数形式	137
5.7.3	达朗贝尔方程的复数形式及其解	139
提要	140
思考题	141
习题 5	142
第 6 章	均匀平面电磁波的传播	145
6.1	电磁波动方程和平面电磁波	145
6.1.1	电磁波动方程	145
6.1.2	平面电磁波	146
6.2	理想介质中的均匀平面电磁波	147
6.2.1	一维波动方程的解及其物理意义	147
6.2.2	理想介质中的正弦均匀平面波	149
6.3	导电介质中的均匀平面电磁波	152

6.3.1	导电介质中正弦均匀平面波的传播特性	152
6.3.2	低损耗介质中的波	154
6.3.3	良导体中的波	155
6.4	平面电磁波的极化	157
6.4.1	直线极化	158
6.4.2	圆极化	158
6.4.3	椭圆极化	159
6.5	平面电磁波的反射与折射	160
6.5.1	平面电磁波在理想介质分界面上的反射与折射	160
6.5.2	平面电磁波在理想介质分界面上的全反射和全折射	162
6.5.3	平面电磁波在良导体表面上的反射与折射	165
6.6	平面电磁波对分界面的正入射	165
6.6.1	对理想导体的正入射	165
6.6.2	对理想介质的正入射	168
6.6.3	入端阻抗 $Z(x)$	173
	提要	174
	思考题	176
	习题 6	177
附录 A 重要的矢量公式		181
A.1	矢量恒等式	181
A.2	三种坐标系的梯度、散度、旋度和拉普拉斯运算	182
附录 B 习题参考解答		183
	习题 1 参考解答	183
	习题 2 参考解答	184
	习题 3 参考解答	186
	习题 4 参考解答	187
	习题 5 参考解答	189
	习题 6 参考解答	190
参考文献		192

在许多科学和技术问题中,常常要研究某些物理量(如电位、电场强度、磁场强度等)在空间的分布和变化规律。为此,引入了场的概念。实际上,人们周围的空间也确实存在着各种各样的场,例如自由落体现象,说明存在一个重力场;人们能感觉到室内外的冷暖,说明我们周围分布着一个温度场等等。如果每一时刻,一个物理量在空间中的每一点都有一个确定的值,则称在此空间中确定了该物理量的场。场是一种特殊的物质,它是具有能量的。根据物理量的不同分为标量场和矢量场。

电磁场是分布在三维空间的矢量场,矢量分析是研究电磁场在空间的分布和变化规律的基本数学工具之一。标量场在空间的变化规律由其梯度来描述,而矢量场在空间的变化规律则通过场的散度和旋度来描述。本章首先介绍矢量代数和三种常用的正交坐标系,然后着重讨论标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的概念及其运算规律,在此基础上介绍亥姆霍兹定理。

1.1 矢量代数

1.1.1 标量和矢量

数学上,任一代数量 a 都可称为标量。在物理学中,任一代数量一旦被赋予“物理单位”,则称为一个具有物理意义只有大小的标量,即所谓的物理量,如电压 u 、电荷量 Q 、质量 m 、能量 W 等都是标量。

一般的三维空间内某一点 P 处存在的一个既有大小又有方向特性的量,称为矢量。本书中用黑斜体字母表示矢量,例如 \mathbf{A} 。而用 A 来表示矢量 \mathbf{A} 的大小即 \mathbf{A} 的模。矢量一旦被赋予“物理单位”,则称为一个具有物理意义的矢量,如电场强度矢量 \mathbf{E} 、磁场强度矢量 \mathbf{H} 、作用力矢量 \mathbf{F} 、速度矢量 \mathbf{v} 等。

一个矢量 \mathbf{A} 可用一条有方向的线段来表示,线段的长度表示矢量 \mathbf{A} 的模 A ,箭头指向表示矢量 \mathbf{A} 的方向,如图 1.1 所示。

一个模为 1 的矢量称为单位矢量。本书中用 \mathbf{e}_A 表示与矢量 \mathbf{A} 同方向的单位矢量,显然

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} \quad (1.1)$$

而矢量 \mathbf{A} 则可表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_A A \quad (1.2)$$

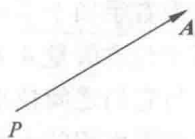


图 1.1 P 点处的矢量

1.1.2 矢量的加法和减法

两个矢量 A 与 B 相加,其和是另一个矢量 D 。矢量 $D=A+B$ 可按平行四边形法则得到:从同一点画出矢量 A 与 B ,构成一个平行四边形,其对角线量即为矢量 D ,如图 1.2 所示。

矢量的加法服从交换律和结合律:

$$A + B = B + A \quad (\text{交换律}) \quad (1.3)$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (\text{结合律}) \quad (1.4)$$

矢量的减法定义为:

$$A - B = A + (-B) \quad (1.5)$$

式中 $-B$ 的大小与 B 的大小相等,但方向与 B 相反,如图 1.3 所示。

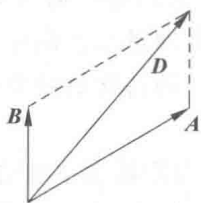


图 1.2 矢量的加法

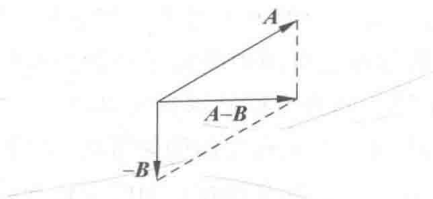


图 1.3 矢量的减法

1.1.3 矢量的乘法

矢量的乘法分为数乘、点乘和叉乘。

数乘是指一个标量 k 与一个矢量 A 的乘积, kA 仍为一个矢量,其大小为 $|k|A$,若 $k > 0$,则 kA 与 A 同方向;若 $k < 0$,则 kA 与 A 反方向。 kA 矢量的长度是原矢量 A 的 $|k|$ 倍。

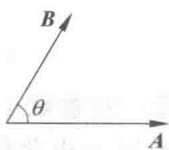


图 1.4 矢量 A 与 B 的夹角

两个矢量 A 与 B 的点乘(点积) $A \cdot B$ 是一个标量,定义为矢量 A 和 B 的大小与它们之间较小的夹角的余弦之积,如图 1.4 所示,即

$$A \cdot B = AB \cos \theta \quad (1.6)$$

A 与 B 的点乘结果可看作 A 的模乘以 B 在 A 上的投影。

矢量的点乘服从交互律和分配律:

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (1.7)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (1.8)$$

另外还有 $A \cdot A = A^2$ 及 $e_A \cdot e_A = 1$ 等公式。若 $A \cdot B = 0$,则 A 和 B 相互垂直。

两个矢量 A 与 B 的叉乘(叉积) $A \times B$ 是一个矢量,它的方向为右手四个手指从矢量 A 到 B 旋转 θ 时大拇指的方向,垂直于包含矢量 A 和 B 的平面;其大小定义为矢量 A 和 B 的大小与它们之间较小的夹角的正弦之积 $AB \sin \theta$,即 A 和 B 两矢量所围面积的大小。如图 1.5 所示,即

$$A \times B = e_n AB \sin \theta \quad (1.9)$$

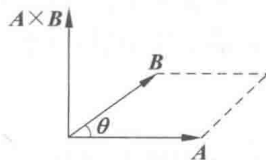


图 1.5 矢量 A 与 B 的叉积

根据叉乘的定义,显然有

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1.10)$$

因此,叉乘不服从交换律,但叉乘服从分配律

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1.11)$$

另外还有 $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ 。若 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, 则 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 两矢量平行。

矢量 \mathbf{A} 与矢量 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 的点积 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 称为标量三重积,它具有如下运算性质:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.12)$$

矢量 \mathbf{A} 与矢量 $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 的叉积 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 称为矢量三重积,它具有如下运算性质:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.13)$$

1.1.4 矢量函数的导数与微分

设 $\mathbf{A}(t) = e_x A_x(t) + e_y A_y(t) + e_z A_z(t)$ 是 t 的矢量函数,且对于任意的 t , $\mathbf{A}(t)$ 的起点都在原点,当 t 在其定义域内从 t 变到 $t + \Delta t$ 时,对应的矢量从 $\mathbf{A}(t)$ 变化到 $\mathbf{A}(t + \Delta t)$, 则称 $\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)$ 为 $\mathbf{A}(t)$ 对应于 Δt 的增量。

设矢量函数 $\mathbf{A}(t)$ 在点 t 的某个邻域内有定义, 并设 $t + \Delta t$ 也在此邻域内。如果

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}(t + \Delta t) - \Delta \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_x}{\Delta t} e_x + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_y}{\Delta t} e_y + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_z}{\Delta t} e_z$$

存在, 则称 $\mathbf{A}(t)$ 在点 t 可导, 并称 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_x}{\Delta t} e_x + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_y}{\Delta t} e_y + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_z}{\Delta t} e_z$ 为 $\mathbf{A}(t)$ 在点 t

处的导数。记作 $\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}$ 或 $\mathbf{A}'(t)$, 即

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_x}{\Delta t} e_x + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_y}{\Delta t} e_y + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_z}{\Delta t} e_z \\ &= \frac{dA_x}{dt} e_x + \frac{dA_y}{dt} e_y + \frac{dA_z}{dt} e_z \end{aligned} \quad (1.14)$$

这样就把一个矢量函数导数的计算转化为了三个标量函数的导数的计算。

同样, 矢量函数的积分也可对矢量函数的各分量分别进行操作。

1.2 三种常用的正交坐标系

为了考查物理量在空间的分布和变化规律, 必须引入坐标系。在电磁场理论中, 最常用的坐标系为直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

1.2.1 直角坐标系

如图 1.6 所示, 直角坐标系中的三个坐标变量是 x 、 y 和 z , 它们的变化范围分别是

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty$$

空间任一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 是三个坐标曲面 $x = x_0$, $y = y_0$ 和

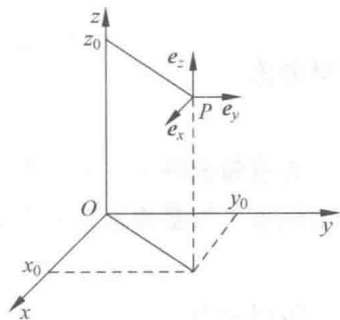


图 1.6 直角坐标系

$z=z_0$ 的交点。

在直角坐标系中,过空间任一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的三个相互正交的坐标单位矢量 e_x 、 e_y 和 e_z 分别是 x 、 y 和 z 增加的方向,且遵循右手螺旋法则:

$$e_x \times e_y = e_z, e_y \times e_z = e_x, e_z \times e_x = e_y \quad (1.15)$$

任一矢量 \mathbf{A} 在直角坐标系中可表示为坐标矢量的线性组合:

$$\mathbf{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z \quad (1.16)$$

其中 A_x 、 A_y 和 A_z 分别是矢量 \mathbf{A} 在 e_x 、 e_y 和 e_z 方向上的投影。该矢量的模为 $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

\mathbf{A} 的单位矢量为

$$\begin{aligned} e_A &= \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x}{A} e_x + \frac{A_y}{A} e_y + \frac{A_z}{A} e_z \\ &= \cos\alpha e_x + \cos\beta e_y + \cos\gamma e_z \end{aligned}$$

$\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$ 称为 \mathbf{A} 的方向余弦, α 、 β 、 γ 分别为 \mathbf{A} 与 x 、 y 、 z 轴正向的夹角,如图 1.7 所示。矢量 \mathbf{A} 可用方向余弦表示为

$$\mathbf{A} = A \cos\alpha e_x + A \cos\beta e_y + A \cos\gamma e_z$$

两个矢量 $\mathbf{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z$ 与 $\mathbf{B} = e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z$ 的和等于对应分量之和,即

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = e_x (A_x + B_x) + e_y (A_y + B_y) + e_z (A_z + B_z) \quad (1.17)$$

\mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的点积为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z) \cdot (e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (1.18)$$

\mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的叉积为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z) \times (e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z) \\ &= e_x (A_y B_z - A_z B_y) + e_y (A_z B_x - A_x B_z) + e_z (A_x B_y - A_y B_x) \\ &= \begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.19)$$

在直角坐标系中,位置矢量

$$\mathbf{r} = e_x x + e_y y + e_z z \quad (1.20)$$

其微分为

$$d\mathbf{r} = e_x dx + e_y dy + e_z dz \quad (1.21)$$

在直角坐标系中沿三个坐标 x 、 y 和 z 增加方向上的微分长度元为 dx 、 dy 和 dz ,则与三个坐标单位矢量相垂直的三个面积元分别为

$$dS_x = dydz, \quad dS_y = dx dz, \quad dS_z = dx dy \quad (1.22)$$

体积元为

$$dV = dx dy dz \quad (1.23)$$

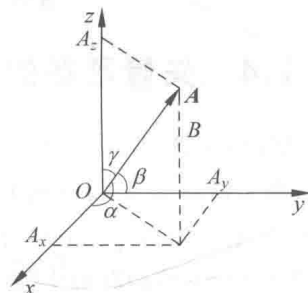


图 1.7 直角坐标系中矢量的分解

1.2.2 圆柱坐标系

如图 1.8 所示,圆柱坐标系中任一点 P 的位置用三个坐标变量 ρ 、 ϕ 和 z 表示,它们的变化范围分别是

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

空间任一点 $P(\rho_0, \phi_0, z_0)$ 是如下三个坐标曲面的交点: $\rho = \rho_0$ 的圆柱面、包含 z 轴并与 xOz 平面构成夹角为 $\phi = \phi_0$ 的半平面和 $z = z_0$ 的平面。

圆柱坐标系与直角坐标系之间的变换关系为

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan(y/x), \quad z = z \quad (1.24)$$

或

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z \quad (1.25)$$

在圆柱坐标系中,过空间任一点 $P(\rho, \phi, z)$ 的三个相互正交的坐标单位矢量 e_ρ 、 e_ϕ 和 e_z 分别是 ρ 、 ϕ 和 z 增加的方向,且遵循右手螺旋法则,即

$$e_\rho \times e_\phi = e_z, \quad e_\phi \times e_z = e_\rho, \quad e_z \times e_\rho = e_\phi \quad (1.26)$$

必须强调指出,圆柱坐标系中的坐标单位矢量 e_ρ 和 e_ϕ 都不是常矢量,因为它们的方向是随空间坐标变化的。由图 1.9 可得到 e_ρ 、 e_ϕ 与 e_x 、 e_y 之间的变换,关系为

$$e_\rho = e_x \cos \phi + e_y \sin \phi, \quad e_\phi = -e_x \sin \phi + e_y \cos \phi \quad (1.27)$$

或

$$e_x = e_\rho \cos \phi - e_\phi \sin \phi, \quad e_y = e_\rho \sin \phi + e_\phi \cos \phi \quad (1.28)$$

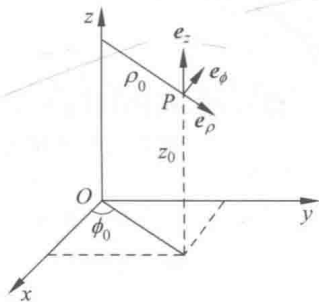


图 1.8 圆柱坐标系

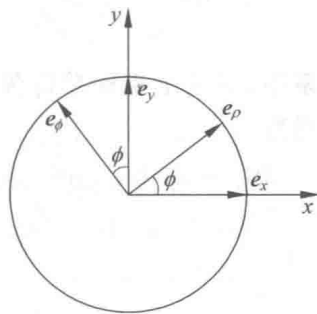


图 1.9 直角坐标系与圆柱坐标系的坐标单位矢量的关系

由式(1.27)可以看出, e_ρ 和 e_ϕ 是随 ϕ 变化的,且

$$\begin{cases} \frac{\partial e_\rho}{\partial \phi} = -e_x \sin \phi + e_y \cos \phi = e_\phi \\ \frac{\partial e_\phi}{\partial \phi} = -e_x \cos \phi - e_y \sin \phi = -e_\rho \end{cases} \quad (1.29)$$

任一矢量 A 在圆柱坐标系中可以表示为

$$A = e_\rho A_\rho + e_\phi A_\phi + e_z A_z \quad (1.30)$$

其中 $\mathbf{A} = e_\rho A_\rho + e_\phi A_\phi + e_z A_z$ 与矢量 $\mathbf{B} = e_\rho B_\rho + e_\phi B_\phi + e_z B_z$ 的和为

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = e_\rho (A_\rho + B_\rho) + e_\phi (A_\phi + B_\phi) + e_z (A_z + B_z) \quad (1.31)$$

\mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的点积为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (e_\rho A_\rho + e_\phi A_\phi + e_z A_z) \cdot (e_\rho B_\rho + e_\phi B_\phi + e_z B_z) \\ &= A_\rho B_\rho + A_\phi B_\phi + A_z B_z \end{aligned} \quad (1.32)$$

\mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的叉积为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (e_\rho A_\rho + e_\phi A_\phi + e_z A_z) \times (e_\rho B_\rho + e_\phi B_\phi + e_z B_z) \\ &= e_\rho (A_\phi B_z - A_z B_\phi) + e_\phi (A_z B_\rho - A_\rho B_z) + e_z (A_\rho B_\phi - A_\phi B_\rho) \\ &= \begin{pmatrix} e_\rho & e_\phi & e_z \\ A_\rho & A_\phi & A_z \\ B_\rho & B_\phi & B_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.33)$$

在圆柱坐标系中,位置矢量为

$$\mathbf{r} = e_\rho \rho + e_z z \quad (1.34)$$

其微分元是

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= d(e_\rho \rho) + d(e_z z) = e_\rho d\rho + \rho de_\rho + e_z dz \\ &= e_\rho d\rho + e_\phi \rho d\phi + e_z dz \end{aligned} \quad (1.35)$$

在 ρ 、 ϕ 和 z 增加方向上的微分元分别是 $d\rho$ 、 $\rho d\phi$ 和 dz ,如图 1.10 所示。 $d\rho$ 、 $\rho d\phi$ 和 dz 都是长度,它们同各自坐标的微分之比称为度量系数(或拉梅系数),即

$$h_\rho = \frac{d\rho}{d\rho} = 1, \quad h_\phi = \frac{\rho d\phi}{d\phi} = \rho, \quad h_z = \frac{dz}{dz} = 1 \quad (1.36)$$

在圆柱坐标系中,与三个坐标单位矢量相垂直的三个面积元分别为

$$dS_\rho = \rho d\phi dz, \quad dS_\phi = d\rho dz, \quad dS_z = \rho d\rho d\phi \quad (1.37)$$

体积元则为

$$dV = \rho d\rho d\phi dz \quad (1.38)$$

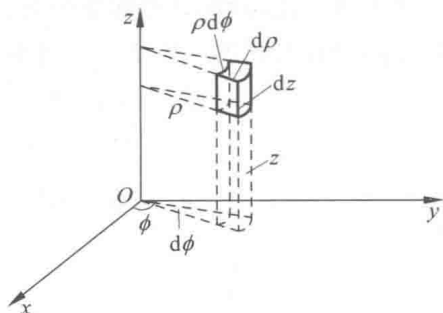


图 1.10 圆柱坐标系的长度元、面积元和体积元

1.2.3 球坐标系

如图 1.11 所示,球坐标系中任一点 P 的三个坐标变量是 r 、 θ 和 ϕ ,它们的变化范围分别是

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

空间任一点 $P(r_0, \theta_0, \phi_0)$ 是如下三个坐标曲面的交点: 球心在 origin、半径 $r=r_0$ 的球面; 顶点在 origin、轴线与 z 轴重合且半顶角 $\phi=\phi_0$ 的正圆锥面; 包含 z 轴并与 xy 平面构成夹角为 $\theta=\theta_0$ 的半平面。