普通高等教育"十三五"规划教材
公共基础课精品系列

经济数学基础学习辅导之二

总主编 朱弘毅

线性代数学习辅导

（第二版）

上海高校《经济数学基础学习辅导》编写组 编

立信会计出版社
LIXIN ACCOUNTING PUBLISHING HOUSE

普通高等教育"十三五"规划教材
公共基础课精品系列

经济数学基础学习辅导之二

总主编 朱弘毅

线性代数学习辅导

（第二版）

上海高校《经济数学基础学习辅导》编写组 编

立信会计出版社
LIXIN ACCOUNTING PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习辅导 / 上海高校《经济数学基础》编写组编. —2 版. —上海：立信会计出版社，2017. 11

普通高等教育“十三五”规划教材. 公共基础课精品系列

ISBN 978 - 7 - 5429 - 5577 - 7

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 261788 号

策划编辑　蔡莉萍
责任编辑　蔡莉萍

线性代数学习辅导（第二版）

出版发行	立信会计出版社		
地　　址	上海市中山西路 2230 号	邮政编码	200235
电　　话	(021)64411389	传　　真	(021)64411325
网　　址	www. lixinaph. com	电子邮箱	lxaph@sh163. net
网上书店	www. shlx. net	电　　话	(021)64411071
经　　销	各地新华书店		

印　　刷	上海肖华印务有限公司		
开　　本	710 毫米×960 毫米	1/16	
印　　张	10. 25		
字　　数	184 千字		
版　　次	2017 年 11 月第 2 版		
印　　次	2017 年 11 月第 1 次		
印　　数	1—3100		
书　　号	ISBN 978 - 7 - 5429 - 5577 - 7/O		
定　　价	21. 00 元		

如有印订差错，请与本社联系调换

《经济数学基础学习辅导》编写组

总 主 编 朱弘毅（上海应用技术大学）

编　　委 （按姓氏笔画排列）

王洁明　车荣强　付春红　朱玉芳　朱建忠
朱弘毅　庄海根　许建强　孙海云　李潇潇
吴　珞　张　峰　张满生　罗　琳　罗　纯
周伟良　周家华　居环龙　查婷婷　赵斯泓
桂胜华　徐　洁　陈春宝　龚秀芳

第二册《线性代数学习辅导》（第二版）

主　编 车荣强　罗　琳　周伟良

副主编 吴　珞　桂胜华　徐　洁

第二版前言

《经济数学基础学习辅导》丛书，是与上海高校《经济数学基础》编写组编的《经济数基础》这套教材（立信会计出版社出版）配套的学习辅导书。丛书共分三册：《微积分学习辅导》《线性代数学习辅导》《概率论与数理统计学习辅导》。

《经济数学基础学习辅导》丛书共分三册，每册编写体制一致，每册书的最后一章为模拟试题及其解答，其余各章与相应的教材同步。每章由内容提要、例题分析、习题选解、测试题及其解答四节组成。本丛书旨在帮助、指导读者理解重要的概念、掌握运算方法、解答疑难问题，因此，例题、习题、测试题都是精心选编的，题型基本而又典型。测试题及模拟试题均有解答，供读者自查。编者相信，读者认真阅读本辅导书，必有收获。

《经济数学基础学习辅导》丛书由朱弘毅任总主编，参加编写的有（按姓氏笔画排列）王洁明、车荣强、付春红、朱玉芳、朱建忠、朱弘毅、庄海根、许建强、孙海云、李潇潇、吴珞、张峰、张满生、罗琳、罗纯、周伟良、周家华、居环龙、查婷婷、赵斯泓、桂胜华、徐洁、陈春宝、龚秀芳。本丛书的出版得到上海市教委高等教育办公室徐国良同志、立信会计出版社领导、蔡莉萍编辑的支持和帮助，在此一并表示衷心感谢。

限于编者的水平，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

朱弘毅于香歌丽园

2017 年秋

目 录

第一章 行 列 式

第一节 内 容 提 要

1. 行列式的概念

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

二、三阶行列式的计算可按对角线法则进行，如下图 1－1 所示。三阶行列式等于其中三条实线连接的三个元素乘积之和减去三条虚线所连接的三个元素的乘积之和。

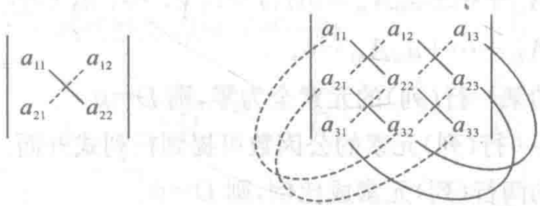

图 1-1 对角线法则

$$n \text{ 阶行列式} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式。

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. 行列式的性质

(1) $D=D^{\mathrm{T}}$。

(2) 交换行列式的两行(列)，行列式的值变号。

(3) 如果行列式 D 中有两行(列)的对应元素相等，则 $D=0$。

(4)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (\text{按第}i\text{行展开})$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \ (\text{按第 } j \text{ 列展开}) \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

(5) $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i,j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ i\neq j)$

$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0$。

(6) 行列式 D 的某一行(列)的元素全为零，则 $D=0$。

(7) 行列式的某一行(列)元素的公因数可提到行列式外面。

(8) 行列式 D 的两行(列)元素成比例，则 $D=0$。

(9) 行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式之和。

例如，

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

(10) 把行列式的第 i 行(列)的所有元素乘以数 k 后加在第 j 行(列)对应元素的位置上,则行列式的值不变。

例如,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+kr_2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ kb_1+c_1 & kb_2+c_2 & kb_3+c_3 \end{vmatrix}$$

3. 关于行列式的计算方法

计算行列式常用方法:

(1) 应用行列式性质(4),将 n 阶行列式按第 i 行(列)展开,化为 n 个 $(n-1)$ 阶行列式计算。

(2) 应用行列式的性质,将行列式化为三角形行列式。

(3) 应用行列式的性质,将行列式的某一行(列)除一元素不等于零外,其余的元素均化为零,然后按这行(列)展开,化为低一阶行列式。

4. 克莱姆法则

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

如果系数行列式 $D\neq 0$,则线性方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

特例,设 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$,如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$,则齐次线性方程组只有零解。也即,如果齐次线性方程组有非零解,则 $D=0$。

第二节 例题分析

【例 1】 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 34\,215 & 35\,215 \\ 28\,092 & 29\,092 \end{vmatrix}。$$

分析 如果应用行列式定义计算则太繁。注意到第二列各元素与第一列元素的特征，则可应用行列式性质来计算。

解 $\begin{vmatrix} 34\,215 & 35\,215 \\ 28\,092 & 29\,092 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 34\,215 & 1\,000 \\ 28\,092 & 1\,000 \end{vmatrix}$

$$= 10^3 \times \begin{vmatrix} 34\,215 & 1 \\ 28\,092 & 1 \end{vmatrix} = 10^3 \times (34\,215 - 28\,092)$$

$$= 6\,123\,000$$

【例 2】 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$，求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$。

分析 我们用行列式的性质来计算。

解 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

$$= -2 \times (-3) \times 5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= 30 \times 1 = 30$$

【例 3】 讨论当 k 为何值时，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & 2 & k \end{vmatrix} \neq 0。$$

分析 注意到第一列(行)的特点,我们应用行列式性质将第一列(行)元素除$a_{11}=1$以外,其余元素均化为零。

解 $$\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&k&1&0\\0&0&k&2\\0&0&2&k\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&k-1&1&0\\0&0&k&2\\0&0&2&k\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c(1)}\begin{vmatrix}k-1&1&0\\0&k&2\\0&2&k\end{vmatrix}=(k-1)\begin{vmatrix}k&2\\2&k\end{vmatrix}$$

$$=(k-1)(k^2-4)$$

所以,当$k\neq1$且$k\neq\pm2$时,该行列式$\neq0$。

【例 4】 计算下列行列式

(1) $D=\begin{vmatrix}3&6&12\\2&-3&0\\5&1&2\end{vmatrix}$。 (2) $D=\begin{vmatrix}0&1&-1&3\\2&3&1&1\\3&2&5&9\\2&-1&5&-2\end{vmatrix}$。

分析 第(1)题先将第一行的公因子3提出来,然后应用性质将第1列除a_{11}外,其余元素化为零。第(2)题应用性质将第1行除a_{12}外,其余元素化为零。

解 (1) $$D=3\begin{vmatrix}1&2&4\\2&-3&0\\5&1&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-5r_1]{r_2-2r_1}3\begin{vmatrix}1&2&4\\0&-7&-8\\0&-9&-18\end{vmatrix}$$

$$=27\begin{vmatrix}1&2&4\\0&7&8\\0&1&2\end{vmatrix}\xlongequal{c(1)}27\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7&8\\1&2\end{vmatrix}=162$$

(2) $$D\xlongequal[c_4-3c_2]{c_3+c_2}\begin{vmatrix}0&1&0&0\\2&3&4&-8\\3&2&7&3\\2&-1&4&1\end{vmatrix}\xlongequal{r(1)}-\begin{vmatrix}2&4&-8\\3&7&3\\2&4&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_1}-\begin{vmatrix}2&4&-8\\3&7&3\\0&0&9\end{vmatrix}\xlongequal{r(3)}-9\begin{vmatrix}2&4\\3&7\end{vmatrix}=-18$$

【例 5】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}。$$

分析 可以按某行(列)展开来计算,也可以将第 1 列元素除 a_{41} 外,其余化为零来计算。

解法一 按第 1 列展开,得

$$D=x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}-a_0\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix}$$

对上式右边第一个行列式再按第 1 列展开,得

$$\begin{aligned} D &= x\left(x\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}+a_1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix}\right)+a_0 \\ &= x[x(a_3x+a_2)+a_1]+a_0 \\ &= a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \end{aligned}$$

解法二

$$D\xlongequal{c_1+xc_2+x^2c_3+x^3c_4}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ \sum_{n=0}^{3}a_nx^n & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c(1)}\sum_{n=0}^{3}a_nx^n(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix}=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

【例 6】 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} b_1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & b_3+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & b_n+a_n \end{vmatrix}\quad(b_1b_2\cdots b_n\neq 0)$$

分析 该行列式每一行除了一个元素不相同外，其余元素均相同。可以考虑采用“加边法”（给行列式添加特殊的一行和一列）求解。

解

$$D_n = G_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & b_2+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & b_3+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & b_n+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\ r_4-r_1\\ \vdots \\ r_{n+1}-r_n}]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\,3,\,\cdots,\,n+1]{c_1+\frac{1}{b_{i-1}}c_i} \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$= b_1 b_2 \cdots b_n \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)$$

【例 7】 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_3 + 4x_4 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}。$$

分析 应用克莱姆法则来解。

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&-2\\2&0&-1&4\\3&2&1&0\\4&0&2&-2\end{vmatrix}=2\neq 0$$

又，$D_1=\begin{vmatrix}2&-1&1&-2\\4&0&-1&4\\-1&2&1&0\\3&0&2&-2\end{vmatrix}=2$，$D_2=\begin{vmatrix}1&2&1&-2\\2&4&-1&4\\3&-1&1&0\\4&3&2&-2\end{vmatrix}=-4$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&2&-2\\2&0&4&4\\3&2&-1&0\\4&0&3&-2\end{vmatrix}=0,\ D_4=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\2&0&-1&4\\3&2&1&-1\\4&0&2&3\end{vmatrix}=1$$

所以,线性方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-2,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=0,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{1}{2}$$

【例 8】 问 k 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=0\\x_1+kx_2-x_3=0\\2x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$$

只有零解。

分析 齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$ 时,齐次方程只有零解。应用此结论来解。

解 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}k&1&1\\1&k&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}=k^2-3k-4=(k-4)(k+1)\neq 0$

所以,当 $k\neq 4$,且 $k\neq -1$ 时,$D\neq 0$,则该齐次线性方程组只有零解。

注：如果将上述问题改为：如果齐次线性方程组有非零解，试问 k 取何值？则计算过程类似，由 $D=(k-4)(k+1)=0$，得 $k=4$ 或 $k=-1$。

第三节 习 题 选 解

习 题 1-1

2. 计算行列式中元素 a_{13}，a_{32} 的代数余子式。

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

解 $M_{13}=\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-10$，$M_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=1$

得 $A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=-10$，$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-1$

3. 计算下列行列式

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ (8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

解 (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}=1\times1\times5+1\times4\times8+3\times9\times1$

$$-1\times1\times8-1\times3\times5-1\times4\times9=5$$

(6) $D=(-1)\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+4}\times\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$=16-8+(-3)(2-8+2)=20$

(8) $D=1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\times1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$