盛新庆 著

群论思想及其力量小议

高次方程不可根式求解的理解

清华大学出版社

盛新庆 著

群论思想及其力量小议

高次方程不可根式求解的理解

清华大学出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

群论思想及其力量小议：高次方程不可根式求解的理解/盛新庆著．—北京：清华大学出版社，2018

ISBN 978-7-302-51162-5

Ⅰ．①群… Ⅱ．①盛… Ⅲ．①群论—研究 Ⅳ．①O152

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 210683 号

责任编辑：鲁永芳
封面设计：常雪影
责任校对：刘玉霞
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市春园印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：125mm×200mm　　**印　　张**：3.75　　**字　　数**：65 千字
版　　次：2018 年 10 月第 1 版　　**印　　次**：2018 年 10 月第 1 次印刷
印　　数：1～1500
定　　价：39.00 元

产品编号：079550-01

序

数学是有力的，因为它能给出最精确、最严格的解答；数学是优美的，因为它能化繁为简，给人以精神的愉悦。追求力量和简洁是数学的创新之源，也是深藏于人性中的一种欲望。倘若能对数学重要概念的思想及其力量进行剖析，或许是点燃人们对力量、对简洁、对美追求的最好方式，或许也是中学素质教育或大学通识教育的一种很好的方式。本书试图进行这样的尝试。

目前专业数学书由于重系统、重严格、重知识本身，往往需要很多准备才能进入问题的核心，才能对现代数学思想有所感悟，非专业数学人士，没有这么多时间去熬、去耗、去磨；另一方面，大多数学科普读物，往往较少、较浅地进入问题的内在理路，很少进入关键问题的证明，多在外围观察，也就很难让人享受其中之妙。因为没有证明，就不可能有真正的理解，当然就更谈不上享受。

为了能聚焦于剖析数学思想及其力量，本书尝试采用一种新的叙述方式来通俗地讲数学。这种叙述方式就是：从核心问题出发，尝试从探究理论何以发

明的视角，阐述核心概念产生的缘由及其力量，以及问题的解决过程。舍弃知识的系统、严格、完备，追求问题解决的连贯、彻底、通透，以便在较少的时间内能真正领悟数学背后的思想及其力量。

20 世纪伟大的数学家外尔曾说："伽罗瓦的群论在好几十年中一直被视为天书；但是，它后来对数学的整个发展产生越来越深远的影响。如果从它所包含思想之新奇和意义之深远来判断，也许是整个人类知识宝库中价值最为重大的一件珍品"*。本书以伽罗瓦群论为例，尝试从群论的发明过程和应用的角度，用通俗的语言，舍弃系统性和严格性，直述群论核心；另一方面，尝试阐发群论与微积分、复数，乃至诗歌、绘画等艺术创造背后精神的一脉相承，以便让人站在更高的山峰，领略人性的光辉。

群论是高度抽象的。抽象过程实际上就是：去掉我们熟悉事物的次要部分，留下主要部分。这样做导致两个效果：正面效果是聚集了我们的精神，便于看清事物的机理；反面效果是把我们熟悉的事物变得不熟悉了，这就是抽象概念和运算难懂的原因。群论中抽象的概念和运算构成了群论内在的理路，它们虽然不多，但是要真正理解群论思想，还是需要有点耐心，反复阅读，熟悉它们。这是绕不开的。本书阐述、分析了这些概念和运算的抽象过程，建立了群论中一系列我们不熟悉的抽象概念与我们熟悉的方程

---

* 外尔. 对称[M]. 冯承天，陆继宗，译. 上海：上海教育出版社，2002.

求解过程的联系，以便更易于理解。为了让读者能阅读下去，真正领会群论的美，我们在书中穿插了若干诗、几幅画，供赏阅。

笔者非数学专业，对群论的理解深度自知是不够的，甚至有错，望谅解。只盼本书的观察角度和叙述方式能让非数学专业人士在较少时间里较多地理解群论的精髓。

由于本书的叙述方法，一些重要概念散布在叙述中，因此，为了查询方便，特将重要概念整理出来附在书的最后。

曰：

遂古之初，谁传道之？
上下未形，何由考之？
冥昭瞢暗，谁能极之？
冯翼惟像，何以识之？
明明暗暗，惟时何为？
阴阳三合，何本何化？
圜则九重，孰营度之？
惟兹何功，孰初作之？
斡维焉系？天极焉加？
八柱何当？东南何亏？
九天之际，安放安属？
隅隈多有，谁知其数？

——屈原《天问》

一连串天地之问，展现了诗人非凡的胸襟和品格。一个人终极关怀的问题往往决定着其最终的层次和品格。


三百石印富翁白石画此幅年八十又七矣

目
录

齐白石大师的绘画有两个最主要的特征：简练与生动。如何用最洗练的水墨画出生活中的真趣是齐白石一生的中心问题，也正是对这个问题的不断探索造就了齐白石大师非凡的画艺。用他自己的话来说就是“妙在似与非似之间”。这句话用理工科的语言来说，就是掌握人或物之所以生动的生成机理，说得更直白一点就是分清主要和次要的层次关系。强化主要的、丢掉次要的，便能达到似与非似的效果。

第
1
章

多项式方程的拉格朗日求解

问题是一门学问的核心。好的问题往往能孕育出新理论、新方法、新工具。解方程就是一个很好的数学问题，它孕育了复数，由此建立了强大的复变理论及分析工具；更孕育出现代数学的开端——群论。下面就来看看解方程是如何孕育出群论的。

不妨以一元二次方程的求解为例：

$$ax^2+bx+c=0,\quad a\neq 0 \tag{1}$$

这里 a、b、c 为有理数。我们知道，为了解此方程，需要做如下配方：

$$\begin{aligned} &a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\frac{b^2}{4a}+c \\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \end{aligned} \tag{2}$$

令 $y=x+\dfrac{b}{2a}$，$s=\dfrac{b^2-4ac}{4\ a^2}$，上面方程(2)变为如下二次常数方程：

$$y^2=s \tag{3}$$

这样 y 便可用根式表达出来：$y=\pm\sqrt{s}$，进而原方程的两个根便可求出：

$$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{4}$$

分析上述求解过程可以知道：关键在于找到了变换 $y=x+\dfrac{b}{2a}$，这样原方程 $ax^2+bx+c=0$ 就变成了一个同等幂次的常数方程 $y^2=s$。很自然，我们会想到：能否用此方法去求三次、四次，乃至任意次方程的根呢？不妨先看下面的三次方程：

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,\quad a\neq 0 \tag{5}$$

仿照二次方程的求解方法，我们需要找到一个变换 $y=f(x)$，将上述方程(5)变成如下形式的三次常数方程：

$$y^3 = s, \quad s\text{是一个常数} \tag{6}$$

这个变换 $y=f(x)$ 具体是什么呢？是否像解二次方程那样，是一个关于 x 的一次函数？如果 $f(x)$ 是一次函数，那么自然最好，因为那样 x 便可通过解一次方程求得；如果 $f(x)$ 是二次函数，也行，因为那样 x 便可通过解二次方程求得；如果 $f(x)$ 是三次函数或更高次函数，那就不行了，因为那样 x 便需求解跟原方程幂次相等，或者更高的方程，这与求解原方程相比没有任何简化，甚至更复杂。经此分析，我们可以知道，这个变换要成功，$f(x)$ 应该是一个不超过二次的函数。下面的问题是：是否存在这样的变换呢？如果存在，这个变换的具体形式是什么呢？回答这两个问题，似乎并不容易。既然如此，我们不妨回来对二次方程的求解公式再做一点分析，看看能否找到思路。很显然，二次方程根的表达式中的根号项很重要，因为从某种意义上来说，它是将一般二次方程转化成二次常数方程（形如 $x^2=s$）所要进行的变换。为了看清楚此变换，将方程(4)写成

$$x_1, x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a}}\right) \tag{7}$$

根据韦达定理，

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \tag{8}$$

可以知道根号部分实际上就是$\pm(x_1-x_2)$。也就是说，经过变换式$y_1=x_1-x_2$和$y_2=x_2-x_1$而得的y_1和y_2满足二次常数方程(3)。由此可见，变换式是方程两个根的线性组合，组合系数是1和-1。这组组合系数1和-1恰巧是二次单位根。两个具体变换式正是这组组合系数——两个二次单位根交换位置而成：变换式y_1是单位根1作为x_1的系数，和单位根-1作为x_2的系数组合而成；变换式y_2是单位根1和-1交换位置，单位根-1作为x_1的系数，和单位根1作为x_2的系数组合而成。为了便于推广到高次方程，我们把单位根1和-1作为系数，在x_1和x_2前位置的交换称为置换。据此可以推测，三次方程的变换式也应该是方程三个根的线性组合，组合系数是三次单位根1、ω和ω^2，这里$\omega^3=1$，具体变换式就应该是三次单位根1、ω和ω^2作为x_1、x_2和x_3的前系数置换而成，置换个数为$3!=6$，具体为

$$\begin{cases} y_1=x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3 \\ y_2=x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3 \\ y_3=\omega x_1+x_2+\omega^2 x_3 \\ y_4=\omega x_1+\omega^2 x_2+x_3 \\ y_5=\omega^2 x_1+\omega x_2+x_3 \\ y_6=\omega^2 x_1+x_2+\omega x_3 \end{cases} \tag{9}$$

关于以变换式$y_i(i=1,2,\cdots,6)$为根的方程应该为

$$\prod_{i=1}^{6}(y-y_i)=0 \tag{10}$$

根据三次单位根ω的性质，不难得到$y_4=\omega y_1$，$y_3=$

ωy_2，$y_5=\omega^2 y_2$和$y_6=\omega^2 y_1$。y_1、y_2、y_3、y_4、y_5、y_6 这 6 个变换式中，y_3、y_4、y_5、y_6 都可以用 y_1 和 y_2 来表示，故称 y_1 和 y_2 为独立变换式，于是式(10)便可简化为

$$(y^3-y_1^3)(y^3-y_2^3)=0 \tag{11}$$

因此，如果$y_1^3+y_2^3$和$y_1^3 y_2^3$可由原方程系数表达，则式(11)的 6 个根便可得到。原三次方程(5)的根便可由变换式(9)反解得到。表述二次方程根与系数之间关系的韦达定理(8)，实际上对于三次方程同样有下面表述方程根与系数之间的韦达定理：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}=q_1 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a}=q_2 \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}=q_3 \end{cases} \tag{12}$$

这个关系不难得到。因为既然x_1、x_2和x_3是原方程的根，那么原方程一定可以分解 $a(x-x_1)(x-x_2)\cdot(x-x_3)$，将此式展开，并与原方程对比，便可得到上述式(12)。利用式(12)，通过较为冗长的计算，$y_1^3+y_2^3$和$y_1^3 y_2^3$便可由原方程系数表示为

$$\begin{aligned} y_1^3+y_2^3 &= 2q_1^3-9q_1q_2+27q_3 \\ y_1^3y_2^3 &= (q_1^2-3q_1q_2)^3 \end{aligned} \tag{13}$$

这样原一般三次方程(5)的根便可先通过求解式(11)，然后利用式(9)得到。

上述求解三次方程的过程再次表明：解 n 次方程的关键在于找到一个变换 $y=f(x)$，将原方程变换成高次常数方程，即$y^n=s$。而且，这个变换一般是所有