大学数学

——线性代数与概率统计

主 编 朱奋秀 钱 珑 刘云芳

武汉理工大学出版社
WUTP Wuhan University of Technology Press

大学数学

——线性代数与概率统计

主　编　朱奋秀　钱　珑　刘云芳

副主编　张福生　周海兵

武汉理工大学出版社

·武　汉·

内容提要

本书的主要内容包括行列式，矩阵，初等变换与解线性方程组，随机事件及其概率，随机变量及其分布，随机变量的数字特征，数理统计的基础知识，参数估计与假设检验。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学——线性代数与概率统计/朱奋秀，钱珑，刘云芳主编. —武汉：武汉理工大学出版社，2018.9

ISBN 978-7-5629-5798-0

Ⅰ.①大… Ⅱ.①朱… ②钱… ③刘… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 ②概率论-高等学校-教材 ③数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2 ②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 221327 号

项目负责人：彭佳佳　　**责任编辑**：彭佳佳

责任校对：张莉娟　　**封面设计**：付　群

出版发行：武汉理工大学出版社

社　　址：武汉市洪山区珞狮路 122 号

邮　　编：430070

网　　址：http://www.wutp.com.cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：武汉兴和彩色印务有限公司

开　　本：787×1092　1/16

印　　张：9

字　　数：230 千字

版　　次：2018 年 9 月第 1 版

印　　次：2018 年 9 月第 1 次印刷

定　　价：29.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请向出版社发行部调换。

本社购书热线电话：027-87785758　87384729　87165708(传真)

前　　言

线性代数与概率统计是经管类专业学生的一门重要的公共基础课，它既是学生学习其他后续课程的基础和工具，又是经济管理类专业的技术人员必须掌握的重要知识。

本书是根据教育部高等学校大专经济类各专业线性代数与概率统计课程的基本要求，结合编者长期从事独立学院该课程的教学与研究的经验编写而成。针对经济管理类大专生数学基础知识和训练相对薄弱的特点，本着“数学为实际服务”的理念，本书在内容的取舍上，按照“必须、够用”的实际要求，适度放弃对理论体系的完整性和系统性的追求；在教学观念上，不过分强求学生去深刻理解数学概念、原理与研究过程，而更多地让学生结合实际问题去理解数学思想，掌握数学方法与运算技巧。

本书在编写过程中，始终把握独立学院专科学生的特点及专业需求，着重培养学生利用所学知识解决实际问题的能力，在各章节都列举了大量经济应用的例子，这有助于激发学生的学习兴趣，同时对提高学生解决实际问题的能力也大有裨益。

本书由朱奋秀、钱珑担任主编，钱珑编写了线性代数部分，朱奋秀编写了概率统计部分，刘云芳参与了本书的统稿和编审工作。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免存在疏漏之处，恳请有关专家、同行及广大读者批评指正。

编　者

2018 年 5 月

目　录

第 1 章　行　列　式

行列式的概念最初是在解线性方程组中形成的，它也是矩阵的一个重要的数值特征，在研究矩阵的秩及讨论向量组的线性相关性等问题中起着重要作用.

本章首先在介绍二、三阶行列式的基础上给出 n 阶行列式的定义，并讨论其基本性质以及计算方法，最后还介绍了用行列式方法求解一类特殊线性方程组的 Cramer 定理.

§1.1　行列式的概念

1.1.1　二阶行列式的引入

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & ① \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & ② \end{cases}$$

$$①\times a_{22}: a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22};$$

$$②\times a_{12}: a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_2a_{12}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，从上面两式解得：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 由方程组的四个系数确定，因此有如下定义：

定义 1　对于由四个数排成的两行两列（横排称行、竖排称列）的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为表所确定的二阶行列式，并记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，即：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式的定义可以用对角线法则来记忆，把 a_{11} 到 a_{12} 的实连线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线，于是二阶行列式是主对角线上的两个元素之积减去副对角线上两个元素之积的差.

因此，利用二阶行列式的概念，可以把 x_1, x_2 的系数写成二阶行列式的形式，记为：

$$D_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

那么，方程组的解可以写为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

例 1 求解二元线性方程组.

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12 \\ 2x_1+x_2=1 \end{cases}$$

解
$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=14,\quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-21,$$

因此，$x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{14}{7}=2$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-21}{7}=-3$.

1.1.2 三阶行列式

定义 2 设有 9 个数排成三行三列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

记
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

上式称为数表所确定的三阶行列式.

行列式的直接计算主要有以下两种方法：沙路法、对角线法则.

(1) 沙路法(图 1.1)

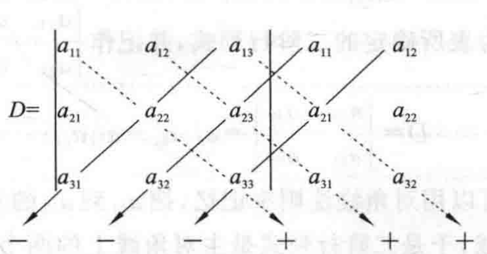

图 1.1 沙路法

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

(2) 对角线法则(图 1.2)

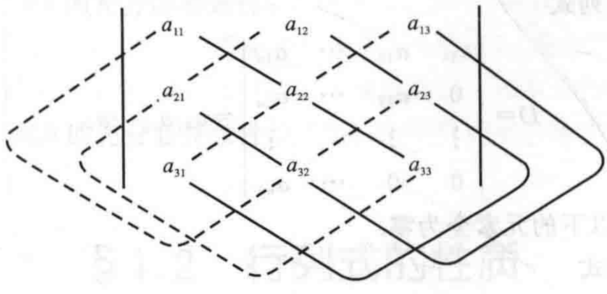

图 1.2 对角线法则

注:实线上三元素的乘积冠以正号,虚线上三元素的乘积冠以负号.

例 2 计算下列三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

解 按对角线法则展开,有:

$$\begin{aligned} D &= 1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4- \\ &\quad 1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3) \\ &= -4-6+32-4-8-24=-14. \end{aligned}$$

例 3 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0.$

解 方程左端的三阶行列式 $D=3x^2+4x+18-9x-2x^2-12=x^2-5x+6=0$,解得 $x=2$或 $x=3$.

小结 二阶和三阶行列式是由解二元和三元线性方程组引入地.

1.1.3 n 阶行列式的定义

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,简记 $D=\det(a_{ij})$或$|a_{ij}|$,其中横排称为行,竖排称为列,称 a_{ij} 为 n 阶行列式的元素,a_{ij} 的第一个下标称为行标,第二个下标称为列标,n 阶行列式表示所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

下面介绍几种特殊的 n 阶行列式：

（1）上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特点：主对角线以下的元素全为零.

（2）下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特点：主对角线以上的元素全为零. 可以证明，无论是上三角行列式还是下三角行列式，其值都等于主对角线元素的乘积.

（3）对角线行列式

$$\Lambda=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

习 题 1.1

1. 计算下列三阶行列式的值：

（1）$\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x^2 & x^2-x+1 \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$；　（4）$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$；

（5）$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$；　（6）$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

2. 解下列线性方程组：

（1）$\begin{cases} x_1-2x_2=0 \\ 2x_1+x_2=5 \end{cases}$；　（2）$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2 \\ 2x_1+x_2-3x_3=1 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$.

3. 在以下各题中，a 是参数，求解：

(1) $\begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件；

(2) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} \leqslant 0$ 的充分必要条件.

§1.2　行列式的性质

由 n 阶行列式的定义可以看出，利用行列式的定义计算 n 阶行列式很麻烦，计算量较大，本节研究行列式的重要性质，并利用行列式的性质简化行列式的计算.

记
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把 D 的行换成同序数的列所得的行列式称为 D 的转置行列式（$a_{ij}\leftrightarrow a_{ji}$），记为：
$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置，显然 $(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$.

性质1　行列式与它的转置的行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

上述性质说明行列式的行、列是对称的，凡是对行成立的性质，对列也依然成立. 下面的性质仅对行给出，要注意它们对列也都是成立的.

性质2　互换行列式的两行（列），行列式变号.

交换行列式 i,j 两行（列）用 $r_i\leftrightarrow r_j$（$c_i\leftrightarrow c_j$）表示.

推论　若行列式中有两行（列）相同，则该行列式为零.

证明　设 D 的 i,j 两行相同，由性质2，有：
$$D\underset{r_i\leftrightarrow r_j}{=}-D\Rightarrow 2D=0\Rightarrow D=0.$$

性质3　用一个数乘以行列式的某一行（列），等于用这个数乘以此行列式，即：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

第 i 行（或列）乘以 k，记为 $r_i\times k$（或 $c_i\times k$）.

推论1　行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 2　若行列式中一行(或列)的元素都为零,则该行列式为零.

推论 3　若行列式中有两行(列)成比例,则该行列式为零.

性质 4　若行列式中第 i 行(列)的元素是两组数的和,则此行列式等于两个行列式的和. 其中,这两组数分别是这两个行列式第 i 行(列)的元素,而除去第 i 行(列)外,这两个行列式其他各行(列)的元素与原行列式的元素是相同的,即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

若 n 阶行列式每个元素都表示成两数之和,则它可分解成 2^n 个行列式,如:

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+y \\ c & d+w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b+y \\ z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}.$$

性质 5　将行列式的某一行(列)的倍数加到另一行(列)上,行列式不变.

例如,以数 k 乘以第 j 行加到第 i 行上(记作 r_i+kr_j),有:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以数 k 乘以第 j 列加到第 i 列上,记作 c_i+kc_j.

性质 2、3、5 为行列式的三种初等变换,通常分别称为对换变换、数乘变换和消元(倍加)变换. 这三种变换在行列式的计算中用得最多. 在行列式的计算中通常是利用上述三种初等变换将其转化成三角形行列式,从而求得其值.

考虑三阶行列式:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

这样便把三阶行列式展开成第一行各元素与对应的二阶子行列式乘积的代数和. 对于一般行列式能否这样展开? 如能展开,其展开规律如何? 下面来研究这一问题. 先介绍余子式及代数余子式的概念.

定义　在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,余下的 $(n-1)$ 阶行列

式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}；再记：

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如行列式 $\begin{vmatrix}2&5&2\\0&1&3\\4&7&-1\end{vmatrix}$，元素 a_{12} 的余子式和代数余子式分别为：

$$M_{12}=\begin{vmatrix}0&3\\4&-1\end{vmatrix},A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix}0&3\\4&-1\end{vmatrix}.$$

有了定义1，三阶行列式可以写成：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

下面利用代数余子式给出展开定理：

定理（Laplace 展开定理）　n 阶行列式等于它的任一行（或列）的所有元素分别与其所对应的代数余子式乘积之和，即：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

注：一个 n 阶行列式 D 若其中第 i 行（或第 j 列）所有元素除 a_{ij} 外都为零，则该行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

推论　行列式的任一行（或列）的元素与另一行（或列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,i\neq j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,i\neq j.$$

上述定理和推论合起来，称为行列式按行（列）展开定理.

习题 1.2

1. 已知 204，527，255 都能被 17 整除，利用行列式的性质证明 $\begin{vmatrix}2&5&2\\0&2&5\\4&7&5\end{vmatrix}$ 亦能被 17 整除.

2. 计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix}1&2&1\\2&4&2\\10&14&13\end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 6 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$.

3. 求行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ 中元素 0 的代数余子式与元素 4 的余子式的值.

§1.3　行列式的计算

1.3.1　化三角形法

利用行列式的性质，可以将行列式化为三角形行列式，进而得到行列式的计算结果，这是计算行列式的一种有效的方法，称之为化三角形法.

为了表述方便，用 $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$ 表示行列式第 i 行(列)与第 j 行(列)互换，$r_i \times k (c_i \times k)$ 表示第 i 行(列)乘以常数 k，$r_i + kr_j (c_i + kc_j)$ 表示第 j 行(列)乘以常数 k 加到第 i 行(列)$(i \neq j)$.

例 1　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解　$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 2r_1]{r_3 + r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 + 3r_2]{r_3 + r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 - r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times (-1) \times (-2) \times (-2) = 4.$$

例 2　计算行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

解　稍加观察不难发现，该行列式每列元素之和均为 6，由此可将各行加到第一行，再提出公因子，有：

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1\div 6}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=6\times2\times2\times2=48.$$

1.3.2 降阶法

例 3 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&5\end{vmatrix}.$$

解 因为 D 中第二行的数字比较简单，所以选择 D 的第二行，应用性质 5 得：

$$D\xlongequal[c_4-2c_1]{c_3-c_1}\begin{vmatrix}1&2&2&2\\1&0&0&0\\3&-1&-4&-6\\1&2&-1&3\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第二行}}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&2&2\\-1&-4&-6\\2&-1&3\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}1&1&1\\1&4&6\\2&-1&3\end{vmatrix}\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}2\begin{vmatrix}1&0&0\\1&3&5\\2&-3&1\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}3&5\\-3&1\end{vmatrix}=2\times(3+15)=36.$$

在计算行列式时，由行列式的展开式法则，可以先用行列式的性质将行列式中的某一行(列)化为仅含有一个非零元素，再按此行(列)展开变为低一阶的行列式，如此继续下去，直到化为三阶或二阶行列式.

例 4 计算：

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}.$$

解 $$D\xlongequal[r_4+2r_3]{r_1+2r_3}\begin{vmatrix}7&0&1&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\7&0&-2&-5\end{vmatrix}$$