

21世纪财经类规划教材

(第二版)

经济数学

主 编 吴艳玲
副主编 刘小宁 国福丽 魏 枫

非
外
借

清华大学出版社



21世纪财经类规划教材

经济数学

(第二版)

主 编 吴艳玲

刘小宁

副主编 国福丽

魏 枫

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

《经济数学》是适用于经济管理类专业的初等教材,简单易懂,满足一般本科院校和高职高专的教学需要,特别是对那些打算直接就业的学生就更为合适,仅为帮助学生克服经济学学习过程中的数学障碍而编写。

本教材的主要编写原则是围绕经济管理类课程的数学需要进行教学内容的选择。具体来说,《经济数学》包括与今后学习相关的函数在经济学中的应用、经济学中的分析方法、微积分与最优化方法、线性代数、概率统计初步和数理统计等内容。

在内容设计上,每一章大概有 2/3 的内容,用于讲解高等数学的基本内容,包括基本概念、定理、推论及其含义。另有 1/3 的内容,用于讲解本章的数学原理如何进行经济应用,是经济原理数学化,突出讲解经济学原理同数学原理之间的联系,为学生在以后的学习中能够熟练应用数学工具打下基础。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/吴艳玲主编.—2版.—北京:清华大学出版社,2018

(21世纪财经类规划教材)

ISBN 978-7-302-48505-6

I. ①经… II. ①吴… III. ①经济数学—高等学校—教材 IV. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 231280 号

责任编辑:梁云慈

封面设计:傅瑞学

责任校对:王凤芝

责任印制:董 瑾

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市吉祥印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:18.75

插 页:1

字 数:447千字

版 次:2010年11月第1版

2018年8月第2版

印 次:2018年8月第1次印刷

定 价:45.00元

产品编号:063321-01

第二版前言

本书自 2010 年出版以来,许多高校师生给予了认可,特别得到了学生的支持,对书中的内容和习题提出了宝贵的意见和建议。

考虑到具体应用的需要,本次主要进行了以下修订:

一是内容上的调整与合并,考虑到知识点上的连续性,把第一版中的第 16 章并入第 15 章,把第 19 章并入第 18 章,整本书从原来的 20 章缩减为 18 章;

二是增补了一部分思考题和习题,以实现边学边练,强化知识点与练习之间的对应性。

本书的修订由吴艳玲主持,具体分工如下:国福丽,第 1~5 章;魏枫,第 6~9 章;吴艳玲,第 10~15 章;刘小宁,第 16~18 章。最后由吴艳玲负责总撰、定稿。

我们坚持一贯的观点,经济数学应该是高等数学与经济问题的有机结合,简化后的数学仍然能够有效地应用于经济分析之中。由于水平的限制和时间的关系,书中尚有不足之处,祈望读者和同学一如既往地关注本书,并不吝赐教。

编 者

2018 年 4 月于哈尔滨

序 言

面向经济与管理类专业开设的“高等数学”课程,是为以后的课程,如西方经济学、金融学等做铺垫,但一般的高等数学教材对经济与管理类专业的学生来说有两方面的不利:

一是内容过于数理化,不易理解。一般的高等数学教材经常会出现公式与定理的讲解和证明,运用的例子多是物理学和几何学的内容,既占用课堂时间,又增加了课程难度。此外,经济管理专业只应用高等数学中的一部分,学生花大量时间和精力去掌握和学习的许多数学内容,如三角函数、定积分数学应用等,之后并不会用到。

二是内容缺乏与其他课程的联系,不易引起重视。经济管理是与日常生活联系紧密的学科,教育者一再强调大学一年级应在课程讲解中突出与实践的联系。若在高等数学课程中缺乏与经济管理内容的联系,其结果是许多学生忽略其重要性而放弃整门课程的学习,陷入了反复补考的困境之中。

当然,也有一些经济专业用的高等数学教材,如《经济数学》(霍伊等)、《经济数学》(罗伊·温特劳布)等,这些教材大多是再版多次的老教材,经过了教学的考验,但难度过大,并不适于一般经济与管理类院校的教学需要。“数学是一种语言”(J. Willard Gibbs),经济数学不应该是纯数学,而应当是针对经济管理中需要使用的数学而设计的课程。因此,为回归高等数学课程设置的初衷,编写一部以经济应用为核心的高等数学教材是非常必要的,正是出于这种考虑,我们根据在本科和成人教学中进行的7年教学探讨和实践,初步编写了《经济数学》一书。

本书编写组成员均是“经济数学”课程的一线教学工作者,在教学实践过程中,针对学生本身特点和经济管理类专业总体课程设置的需要,对课程内容予以不断的修改和完善,形成了《经济数学》教材。教材编写的具体分工为:国福丽,第1~7章;魏枫,第8~13章;吴艳玲、刘小宁,第14~20章;吴艳玲承担了全书的排版和校对工作;孟庆琳教授认真通读了全书,并对框架结构和内容安排提出了多处修改意见,保证了本书的质量。

受我们的水平和能力所限,书中的内容难免有不成熟的地方,欢迎读者批评指正并提出宝贵意见。

编 者

2010年7月于哈尔滨

目 录

第 1 章 函数和方程式	1
1.1 变量与函数	1
1.2 一元线性函数和直线	6
1.3 一元二次函数和抛物线	9
1.4 幂函数、指数函数和对数函数	14
1.5 反函数	17
1.6 复合函数与多元函数	18
习题	20
第 2 章 线性方程组	21
2.1 二元线性方程组	21
2.2 有两个以上变量的线性方程组	25
2.3 非线性方程组	27
2.4 经济模型的完整性和相容性	29
习题	32
第 3 章 经济学中的存量、流量与均衡	34
3.1 存量和流量	34
3.2 与市场有关的一些定义	36
3.3 静态分析与单一商品流量市场	37
3.4 比较静态分析和动态分析	40
3.5 稳定均衡和不稳定均衡	41
习题	42
第 4 章 结构式和简化式	44
4.1 单一商品流量市场的扩展	44
4.2 线性方程组的简化式	46
4.3 一个宏观经济的例子	50
习题	51
第 5 章 存量—流量市场	53
5.1 存货投资净额	53
5.2 存量—流量市场均衡	55

5.3 存量市场模型的简化式	59
习题	60
第 6 章 几何级数和现金流量贴现	62
6.1 复利	62
6.2 几何级数	63
6.3 现值	67
6.4 现金流量贴现	70
习题	73
第 7 章 一元函数的微分	75
7.1 非线性函数的斜率	75
7.2 一元函数的极限	75
7.3 一元函数的导数	83
7.4 导数的一般法则 I	86
7.5 导数的经济应用	90
7.6 导数的一般法则 II	95
7.7 微分及其数学应用	101
习题	103
第 8 章 高阶导数	106
8.1 二阶导数	106
8.2 平稳点	108
8.3 利润最大化	114
8.4 税收和利润最大化	117
8.5 利润最大化模型的简化式和结构式	120
习题	122
第 9 章 一元函数的积分	124
9.1 记号和术语	124
9.2 积分法则 I	125
9.3 总函数和边际函数	127
9.4 积分法则 II	128
9.5 定积分	131
9.6 定积分的经济应用	137
习题	139
第 10 章 多元函数及其微分法	141
10.1 多元函数	141

10.2	偏导数及其基本法则	143
10.3	偏导数与其他条件保持不变假设	146
10.4	生产函数和效用函数	149
10.5	高阶偏导数	151
	习题	154
第 11 章	全微分和全导数	156
11.1	全微分	156
11.2	非线性方程组的简化式	157
11.3	全导数和隐微分	161
11.4	齐次函数和欧拉定理	164
	习题	167
	附录: 欧拉定理证明	168
第 12 章	无约束和约束最优化	169
12.1	无约束最优化	169
12.2	利润最大化回顾	172
12.3	约束最优化	175
12.4	约束极大值和约束极小值的辨别	180
	习题	182
	附录: 二元函数无约束最优化的二阶条件	184
第 13 章	动态分析	186
13.1	差分方程	186
13.2	求解差分方程	191
13.3	再论动态流量市场模型	199
13.4	再论简单的凯恩斯模型	201
	习题	202
第 14 章	矩阵代数	204
14.1	向量和矩阵	204
14.2	矩阵的基本运算	207
14.3	逆矩阵	212
14.4	行列式	214
14.5	利用逆矩阵求解方程组	218
14.6	再论结构式和简化式	221
	习题	223

第 15 章 概率论基本理论	225
15.1 随机事件	225
15.2 概率及其计算	229
15.3 条件概率与乘法公式	232
15.4 总和概率	235
习题	239
第 16 章 随机变量及其分布	242
16.1 随机变量	242
16.2 离散型随机变量的分布函数	244
16.3 连续型随机变量的分布函数	247
16.4 一些常用的分布函数	250
习题	254
第 17 章 数学期望与方差	256
17.1 数学期望	256
17.2 方差	259
17.3 常用分布函数的数字特征	263
17.4 数学期望和方差的经济应用	264
17.5 正态分布	266
习题	271
第 18 章 数理统计基础知识	274
18.1 随机抽样与随机样本	274
18.2 参数估计	277
18.3 假设检验	281
习题	286
附 录	287
附表 A1 泊松概率分布表	287
附表 A2 标准正态分布表	289
参考文献	291

第 1 章 函数和方程式

1.1 变量与函数

在给定的问题中,不变的、保持一定值的量叫作常量(constant)。例如,在光速测量中,假定实验是精确的,就会发现,无论测量是在何时何地进行的,光速都是 $3 \times 10^8 \text{ m/s}$,因此,我们称之为常量。

相反地,由于某种原因而变化的、取不同值的量叫作变量(variable),一般用字母 x, y, z 等表示。我们经常把经济现象抽象为经济变量。比如说失业水平,不同国家的失业水平有不同的数据,一个国家连续几年的失业水平也是变化的。在经济分析中的常量与变量具有不同特性,往往要强调条件。

经济分析中的变量一般有两类,一类是数量型变量,如工资、价格、储蓄、消费、失业率等,另一类是性质型变量,如季节、性别、区域、好坏等,经常通过赋值的方法将这些变量纳入经济分析中,性质型变量有时也称为虚拟变量。

经济分析中应尽量选取数量型变量。在经济分析中,由于变量数量较多,为了区分变量,往往选择特定的字母来表示变量,如需求用字母 d 表示,价格用字母 p 来表示,工资率用字母 w 来表示,等等,以防止混淆。

变量之间彼此联系。我们考虑问题的过程中,不仅是一个变量,可能有几个变量,要研究的是这些变量之间有什么关系。例如,去银行存钱,假设 1 年定期整存整取的年利率为 3.05%,则存款本金 x 与一年到期时的利息 y 之间的对应关系如表 1.1 所示。

表 1.1 利息 y 与本金 x 的关系

x	500	1 000	2 000	5 000	10 000	20 000
y	15.25	30.5	61	152.5	305	610

表 1.1 中的例子反映了在同一过程中两个相互依赖的变量,当其中一个变量取一个值时,按一定的规则,另一个变量有唯一确定的值与之对应,变量之间的这种“同步的”联系,就是函数关系,即给定其中一个变量的值,就肯定能够得出另一个变量的唯一确定的值时,我们称一个变量是另一个变量的函数,记为

$$y = f(x) \tag{1.1}$$

式(1.1)是“ y 是 x 的函数”这种关系的一种简记。简记形式所代表的具体函数形式是不明确的,任何一个英文字母或希腊字母的变形,都可以用来表示“ y 是 x 的函数”。例如:

$$y = a(x), \quad y = \varphi(x)$$

其中, x 习惯地称为自变量, y 称为因变量(即 y 因 x 而决定)。 x 的变化范围称为函数的定义域,记为 D ; y 的变化范围称为函数的值域,记为 Z ; f 为自变量与因变量的对应规则。例如:

$$y = 2x^2 + 3x \quad (1.2)$$

式中, y 和 x 的关系是: 当 x 任取一个值时, y 就会得出一个确定的值。例如, 当 $x=2$ 时, 就有 $y=2 \times 2^2 + 3 \times 2 = 14$; 同样, 当 $x=-5$ 时, $y=35$; $x=2\,000$ 时, 有 $y=8\,006\,000$ 。因此, y 是 x 的函数, 式(1.2)描述了这种函数关系。

在式(1.2)中, 给出一个 x 的值, 就有一个相对应的 y 值。当然, 函数可以采取多种不同的具体形式。例如:

$$y = x^3 \quad (1.3)$$

$$y = 10x - 5 \quad (1.4)$$

式(1.3)和式(1.4)都给出了从 x 值求出 y 值的规则。按照这一规则, 表 1.1 中利息与存款本金相对应的函数关系为

$$y = 0.030\,5x$$



思考题

1.1 考虑如下函数关系:

$$(a) y = 8x^2 - 5x + 3; \quad (b) y = \frac{5}{x} + 10; \quad (c) y = (2x + 3)^3.$$

求 x 取以下不同值时的 y 值: (i) $x=2$; (ii) $x=-3$ 。

1.2 若 $z = 6t^4 + 3t^2 + 10$, 求当 $t=4$ 和 $t=-6$ 时的 z 值。

函数是经济数学的主要研究对象。我们经常把经济现象之间的联系抽象为函数关系。用数学方法描述经济问题时经常要建立函数关系。例如, 失业率上升时, 工资率下降; 可支配收入增加时, 家庭的消费支出上升; 商品价格上涨时, 需求量降低。当这些联系“同步地”变动时, 变量之间存在函数关系。因此, 掌握函数对于学好经济理论起着至关重要的作用。

但在数学中可能存在 y 和 x 的非单值对应关系, 如:

$$y = \pm \sqrt{x} \quad (1.5)$$

若 $x=9$ 时, 则有 $y=3$ 或 $y=-3$, 这样 y 的值就不是唯一的。式(1.5)不是我们刚刚定义过的函数, 在本书中, 我们不讨论如式(1.5)中的关系。

表示函数关系, 常用的方法有两种:

一种是解析法, 即用一个数学公式来表示, 如 $y=f(x)$ 。在经济分析中, 经常用解析法来表示经济变量之间的联系, 如其他条件不变时, 商品的需求量是自身价格的函数, 可以把两个变量之间的关系写成

$$d = f(p) \quad \text{或} \quad d = d(p) \quad (1.6)$$

式中: d 为某种商品的需求量; p 为这种商品的价格。同理, 在其他条件不变时, 经济中固定资本的投资水平由利率决定, 可以写作

$$I = f(R) \quad \text{或} \quad I = I(R) \quad (1.7)$$

式中: I 为投资; R 为利率。例如, 我们有如下的 I (单位: 万元)和 R (百分比)的函数关系:

$$I = 200 + \frac{10}{R^2} \quad (1.8)$$

即给定 R 值, 可用式(1.8)求出唯一的 I 值。例如, 当利率 $R=5\%$ 时, 可得 $I = 200 + \frac{10}{0.05^2} = 4\,200$ (万元)。

同样,若 $R=10\%$,则 $I=200+\frac{10}{0.1^2}=1\,200$ (万元)。



思考题

1.3 用解析法表示下列经济关系:

- (a) 家庭消费支出取决于可支配收入;
- (b) 货币需求取决于利率;
- (c) 平均成本取决于产量。

另一种表示函数的方法是图示法,即用坐标系中的曲线反映变量之间的函数关系。坐标系由横轴与纵轴构成。横轴与纵轴如图 1.1 所示,两个轴的交点称为原点。变量 y 值用纵轴表示(称之为 y 轴),变量 x 值用横轴表示(称之为 x 轴)。在原点之上的 y 值是正值,在原点之下则是负值;在原点右侧的 x 值是正值,原点左侧则是负值。

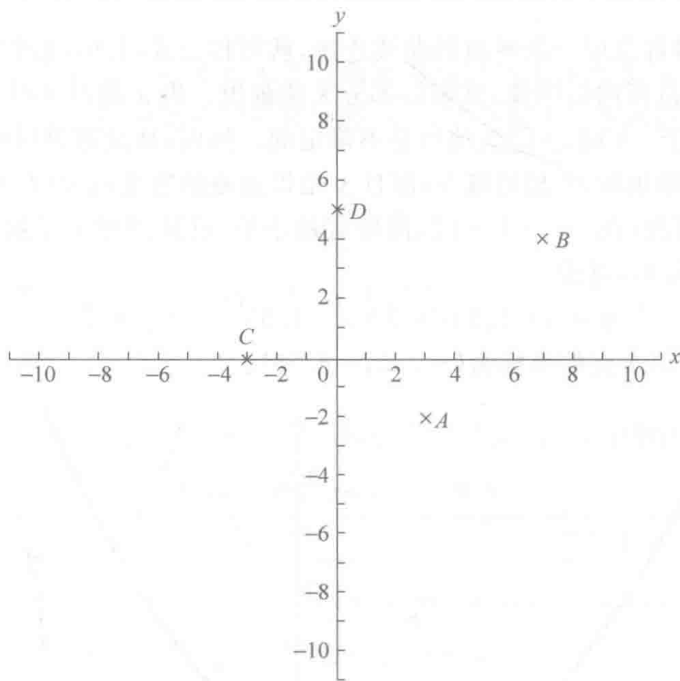


图 1.1 坐标系

变量 x 和 y 的任意一对组合都可通过坐标系上的一点来表示。例如, $x=3, y=-2$ 由图 1.1 中的点 A 表示, A 点是从原点出发,沿 x 轴向右移动 3 单位,沿 y 轴向下移动 2 单位得到的。

习惯上通常把坐标为 $(3, -2)$ 的点用一个字母 A 表示。A 点所代表的括号中的数字依次是 x 值和 y 值。 x 值被称为 x 坐标(横坐标), y 值被称为 y 坐标(纵坐标)。在图 1.1 中可以标出更多的点,如 B 点坐标是 $(7, 4)$,即该点的 x 坐标为 7, y 坐标为 4,它代表 $x=7, y=4$ 。同样,在 x 轴上的点 C 坐标为 $(-3, 0)$, y 轴上的点 D 坐标为 $(0, 5)$ 。



思考题

1.4 在坐标系中标出点 $(-5, -8), (6, -4), (0, -6), (-3, 2), (0, 0), (2, 0)$ 。

给定如上的一个坐标系,就可以画出我们以前所描述的任何一个函数的图像。例如,考虑如下函数关系:

$$y = x^2 + 3x - 4 \tag{1.9}$$

可用函数(1.9)求出与 x 值所对应的 y 值。例如,当 $x=3$ 时,对应的 y 值为: $y=3^2+3\times 3-4=14$,这对 x 值和 y 值可在坐标系上用点(3,14)表示出来。因此,我们可用函数来找出所有的一一对应的 x 值和 y 值,并将它们在坐标系中表示出来。表 1.2 中是 x 取 $-4\sim+4$ 时对应的 y 值,如图 1.2 所示。

表 1.2 函数 $y=x^2+3x-4$ 的对应值

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$3x$	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12
y	0	-4	-6	-6	-4	0	6	14	24

在图 1.2 中,将各点用一条平滑的曲线连接,就可得出式(1.9)的图像。当然,我们只能画出函数在 x 取值范围内的图像,其余的部分无法画出。当 x 超过 4 时, y 的变动是不确定的;当 x 减少到小于 -4 时, y 的变动也是不确定的。然而,从这部分图像中,可以看出函数的主要特征。当 x 增加时, y 起初减少,而且 y 是以递减的速度减少的,直到达到最小值,即 A 点,然后上升。因此,在 $x=-1.5$ 时,图像有最小值,且该图像关于最小值是对称的。把 $x=-1.5$ 代入式(1.9),可得

$$y = (-1.5)^2 + 3 \times (-1.5) - 4 = -6.25$$

y 的最小值为 -6.25 ,A 点的坐标为 $(-1.5,-6.25)$ 。

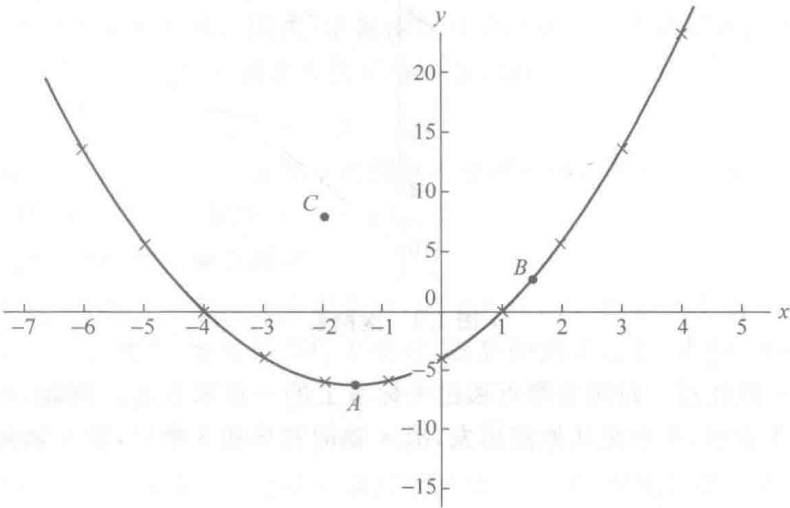


图 1.2 函数 $y=x^2+3x-4$ 的图像

需要强调的是函数式(1.9)和它在图 1.2 中的图像之间存在紧密联系。显然给定函数中任何一对 x 和 y 值,都能通过图像上的点表示出来;反过来,图 1.2 中的任一点一定代表一对满足函数式(1.9)的 x 和 y 值。例如,当 $x=1.5$ 时,通过式(1.9)可得 $y=2.75$, (1.5, 2.75)就是图 1.2 中的点 B。

任何一对满足函数式(1.9)的 x 和 y 值,都在图 1.2 中的曲线上,而任何不在图 1.2 中

曲线上的点所代表的 x 和 y 值也都不满足函数式(1.9)。例如,图 1.2 中的点 C 坐标为 $(-2,8)$,显然不满足函数式(1.9),因为从式(1.9)中可知,当 $x=-2$ 时, $y=-6$ 。



思考题

1.5 画出函数式 $y=2x^2+7x-4$ 的图像, x 的取值范围为 $x=-5$ 到 $x=2$,并找出 y 的最小值。试证明:点 $(0.5,0)$ 既满足该函数式又位于曲线之上,而点 $(2,10)$ 既不满足函数式也不在曲线上。

注意函数式(1.9)的图像有两个点与 x 轴相交,在 $x=-4$ 和 $x=1$ 时, y 都等于 0。在式(1.9)中, $y=0$ 意味着

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad (1.10)$$

从此式中可得出 x 值,求 x 值的过程叫作解方程式。任一个使方程(1.10)成立的 x 值都是方程式的解或根。 $x=-4$ 和 $x=1$ 是方程(1.10)的解,因为它们是能够满足方程式,或者说使方程左右两边相等的 x 值。

由于表达形式所限,图示法经常用来表示两个变量之间的函数关系。在用函数来表示经济关系的时候,限定函数的取值范围是必要的,在经济分析中函数图像主要表示在第一象限中。



思考题

1.6 利用思考题 1.5 中所画出的图像,解方程式 $2x^2+7x-4=0$ 。

函数的几何性质

函数 $y=x^2$ 的对应值如表 1.3 所示。在坐标系中作出 $y=x^2$ 的函数图像,如图 1.3 所示。

表 1.3 函数 $y=x^2$ 的对应值

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

可以看到,在 $x \in (-\infty, 0)$ 时,函数图像呈下降趋势;在 $x \in (0, +\infty)$ 时,函数图像呈上升趋势。这反映了函数的单调性。即,当 x 在区间 $(-\infty, 0)$ 上取值时,随着 x 的增大,相应的 y 值减少,函数 $y=x^2$ 是单调递减的;当 x 在区间 $(0, +\infty)$ 上取值时,随着 x 的增大,相应的 y 值也增大,函数 $y=x^2$ 是单调递增的。

一般地,如果 $x_1, x_2 \in D$,若 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 为 D 上的单调递增函数;有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 为 D 上的单调递减函数。如果函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上是单调递增函数或单调递减函数,那么就说 $y=f(x)$ 在区间 D 上具有单调性。

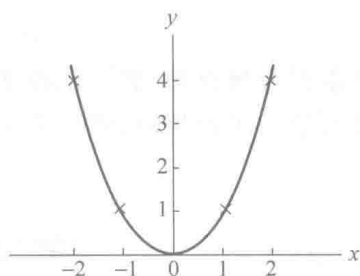


图 1.3 函数 $y=x^2$ 的图像

函数具有单调性是极值的基础,因此,单调性是经济分析中最常使用的性质之一。例如,在 U 形的平均成本曲线上,一定存在着令平均成本最小的产量水平 q^* 。当实际产量低

于 q^* 时,平均成本函数是单调递减的;当实际产量高于 q^* 时,平均成本函数是单调递增的。

函数 $y=x^2$ 在闭区间内又是一个有界函数。有界性是指,如果对于自变量 x 所在的某一定义域 D 范围内,存在一个正数 M ,使得在 D 上的函数值 $f(x)$ 都满足 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上有界,或 $y=f(x)$ 在 D 上是有界函数。反之,如果不存在这样的正数 M ,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上无界,或 $y=f(x)$ 在 D 上是无界函数。

一般来说,连续函数在闭区间内具有有界性。例如: $y=x^2$ 在 $[-3,0]$ 上有最小值0,最大值9,函数值在0~9变化,是有界的,所以具有有界性。在经济分析中,有界性常常与单调性联系起来用于分析函数的极值问题。

除了单调性、有界性之外,函数的几何性质还包括奇偶性和周期性等。但这两种性质在经济分析中不常出现,在此就不详加论述了。

1.2 一元线性函数和直线

最经常使用的函数为一元函数,即只有一个自变量和一个因变量的函数,一般表示为 $y=f(x)$ 。一元函数可以采取多种形式,最简单的一元函数形式是线性函数,若某函数具有函数关系

$$y = mx + c \tag{1.11}$$

则称该函数为线性的,其中, m 和 c 是任意常数。若 $m=3,c=4$,则有线性函数

$$y = 3x + 4 \tag{1.12}$$

表1.4列出了线性函数 $y=3x+4$ 的对应值。函数图像如图1.4所示,显而易见,其图像是一条直线。

表 1.4 线性函数 $y=3x+4$ 的对应值

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$3x$	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12
y	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16

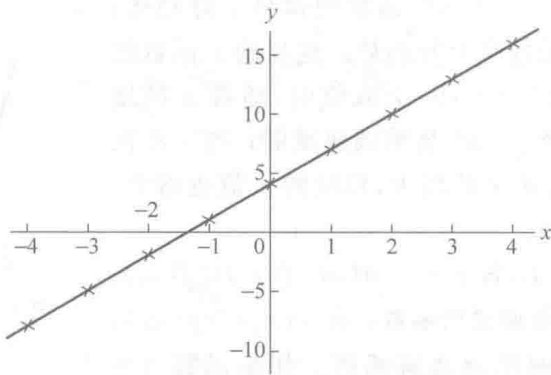


图 1.4 线性函数 $y=3x+4$ 的图像

无论 m 和 c 取何值,式(1.11)的图像都是一条直线,因此,式(1.11)也称作直线方程。在画线性函数图像时,只要找到两点,并用一条直线将这两点连接起来即可。在式(1.11)

中,系数 c 是当 $x=0$ 时 y 的值。因此,它给出了直线与 y 轴相交的点。 c 被称为截距。 c 取负值,则意味着直线与 y 轴的交点位于原点的下方,如图 1.5 所示。

式(1.11)中,系数 m 是直线的斜率,在图 1.5 和图 1.6 中, m 度量了当 x 变化 1 单位时 y 的变化,此时 m 等于 b/a 。

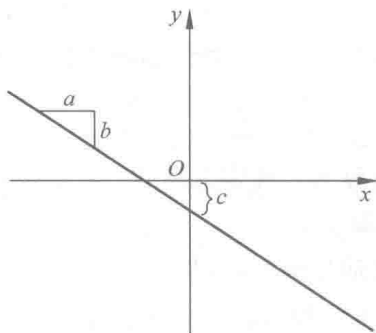


图 1.5 负的斜率和截距

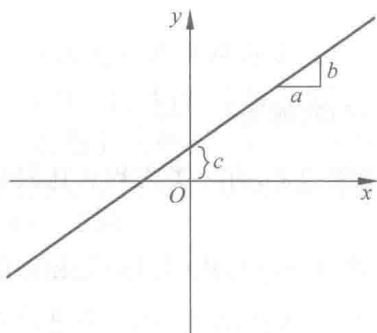


图 1.6 正的斜率和截距

两种特殊情况需要注意:①若式(1.11)中 $m=0$,则图像是一条水平的直线(也就是斜率为 0),且与 y 轴交于 $y=c$ 处;②如果图 1.5 中 $a=0$, m 是无穷的,则图像为一条与 x 轴垂直的直线。

显然,除了水平线之外,直线与横轴交于一点且只交于一点。例如,在图 1.4 中直线 $y=3x+4$ 与横轴交于 $x=-\frac{4}{3}$ 是方程式 $3x+4=0$ 的解。因此,线性方程

$$mx + c = 0 \quad \text{且} \quad m \neq 0 \quad (1.13)$$

有且仅有一个解。



思考题

1.7 写出下列直线方程的截距和斜率:

- (a) $y=6x+8$; (b) $2x-3y=8$; (c) $7x=2y-5$ 。

线性方程的代数解

在图 1.4 中,我们得到一种解方程的方法,即根据函数关系画出图像,然后确定图像与 x 轴相交的点。然而这种方法要得到精确的答案需要非常仔细地绘图,有时运用一点代数知识来求解会更加方便。

求解式(1.13)那样的线性方程,由于 $mx+c=0$,可得

$$mx = -c \quad (1.14)$$

因此

$$x = -\frac{c}{m} \quad (1.15)$$

式(1.15)给出了线性方程(1.13)的一个解。例如,在式(1.12)中, $m=3$, $c=4$,解就是 $x=-\frac{4}{3}$,这和图 1.4 中所画的是一致的。

在求解方程时可以简化成式(1.14)的形式,求解起来会更加简单。例如,考虑一个方

$$3(x+5)+2x=7+5(2x-1) \quad (1.16)$$

将括号乘开并把所有含 x 的项移到等号左边,所有常数项移到等号右边,可得

$$3x+2x-10x=7-5-15$$

或

$$-5x=-13$$

方程式(1.16)的解为 $x=\frac{13}{5}$ 。

提醒注意的是,有一类方程式比较特殊,那就是恒等式。考虑方程式

$$5(2-x)+x=2(3-2x)+4 \quad (1.17)$$

乍看起来,式(1.17)与式(1.16)是相似的。事实上,将括号乘开,可得

$$-5x+x+4x=6+4-10$$

上式可简化为

$$0=0$$

我们的求解程序显然不再适用。这是因为式(1.17)实质上不是一个方程式而是一个恒等式。也就是说,无论 x 取何值时,该式都是成立的。把如式(1.17)这样的式子定义为

$$5(2-x)+x \equiv 2(3-2x)+4$$

记号“ $\equiv$ ”称为“恒等于”。恒等式在经济学中是很普遍的。在经济分析中,恒等式一般用于以下两种情况。

第一种情况,用恒等式来表示某个变量的定义。例如,国内生产总值(GDP)通常是指一定时期内,一个国家或地区所生产的全部最终产品和劳务的市场价值的总和。对国内生产总值进行核算时,可以通过将一定时期内社会购买各项最终产品的支出加总得出该时期国内生产的最终产品的市场价值。具体地,社会对最终产品和劳务的支出主要是居民消费、企业投资、政府购买和净出口。因此,国内生产总值 GDP 可表示为

$$GDP \equiv C + I + G + (X - M)$$

其中, C 表示居民消费; I 表示企业投资; G 表示政府购买,是各级政府购买商品和劳务的支出; $(X-M)$ 表示净出口(X 表示出口, M 表示进口)。

第二种情况,用恒等式来表示某种平衡关系。例如,商品市场达到平衡的条件是全社会对商品的总需求与总供应相等,即 $AD \equiv AS$,在只有居民和厂商的两部门经济中,总需求表现为居民的消费需求和厂商的投资需求;总供给即各种生产要素收入之和,可转化为消费与储蓄两部分。于是

$$AD = C + I$$

$$AS = C + S$$

这样, $AD \equiv AS$,就可表示为 $I \equiv S$ 。也就是说,如果通过金融机构把居民储蓄全部转化为投资,就可实现商品市场的平衡。



思考题

1.8 下列式子中哪些是方程式,哪些是恒等式?并求出方程式的解。

- (a) $3(x+4)+2(x-5)=3x$; (b) $2x+5(2-x)=2(x+5)-5x$;