普通高等教育农业部“十三五”规划教材

全国高等农林院校“十三五”规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

曹殿立　姬利娜 / 主编

中国农业出版社

普通高等教育农业部“十三五”规划教材
全国高等农林院校“十三五”规划教材

线性代数

曹殿立　姬利娜　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 曹殿立，姬利娜主编．—北京：中国农业出版社，2017.8（2018.6 重印）
全国高等农林院校“十三五”规划教材
ISBN 978 - 7 - 109 - 23072 - 9

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①曹…　②姬…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 193458 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区麦子店街 18 号楼）
（邮政编码 100125）
策划编辑　魏明龙
文字编辑　张柳茵

北京万友印刷有限公司印刷　　新华书店北京发行所发行
2017 年 8 月第 1 版　　2018 年 6 月北京第 2 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：14
字数：300 千字
定价：28.00 元

编 审 人 员 名 单

主　编　曹殿立　姬利娜

副主编　李战国　苏克勤

编　者　（按姓氏笔画排序）

乔松珊　苏克勤　李战国

姬利娜　曹殿立

审　稿　张愿章

前言

本教材是全国高等农林院校“十三五”规划教材.

线性代数是高等院校理工、农林、经管等各专业的一门重要的基础课，也是自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学基础.在科学技术特别是在计算机技术日新月异的今天，线性代数在理论和应用上的重要性更显突出.因此各专业不但对线性代数的内容在深度和广度上提出了要求，更在如何提高学生把握知识和运用知识解决实际问题的能力方面给予了更多的关注.

本教材按照教育部高等学校非数学类专业线性代数课程基本要求和最新的全国硕士研究生入学统一考试大纲，结合编者长期的线性代数教学研究、实践以及线性代数教材建设的经验，并在充分借鉴当前国内外同类教材的基础上编写而成.在编写过程中，编写组集思广益、精益求精，着力突出以下几个特点：

1. 体系结构完整.教材依照教育部对高等学校非数学类专业线性代数课程教学内容的基本要求和全国硕士研究生入学统一考试大纲组织内容，涵盖了全国硕士研究生入学统一考试数学大纲中有关线性代数的全部内容，力求使学生全面地掌握线性代数的知识体系，为进一步深造打好基础.

2. 适用性、通用性强.在内容的编排上，选择符合学生认知规律且已获得众多教师普遍认同的从行列式、矩阵、消元法解线性方程组、向量组的线性相关性、线性方程组解的结构、矩阵的相似变换到二次型的体系结构.该体系起点低、坡度缓、难点分散、脉络清晰，便于教师教学和学生学习.

3. 强调应用背景的引入．对于重要的概念和理论，加强实际背景的介绍．利用对实际问题的讨论，帮助学生理解抽象的代数概念，提高学生运用知识解决实际问题的能力．

4. 突出基本概念的教学．针对线性代数概念多，概念之间关系复杂的特点，首先在正文讲清概念的基础上，设置较多的实例来进一步强化；其次在每章各节的习题中设置了较多的判断题，在每一章的综合练习题中安排了大量的填空题和选择题，以帮助学生进一步明晰概念．

5. 加强解题训练．对于一些重要的特别是研究生入学试题中经常出现的计算和证明问题，一方面在例题中适当设置，另一方面给出多种解法，并在每节习题和每章综合练习题中给出适当数量的习题以强化练习．

本书可作为高等学校非数学类各专业线性代数课程教材，也可以作为线性代数课程教学参考书以及考研学习或自学用书．

参加本教材编写的有河南农业大学的曹殿立、姬利娜、李战国、苏克勤，中原工学院信息商务学院的乔松珊，最后由曹殿立、姬利娜统一定稿．

本教材的编写获得了中华农业科教基金教材建设研究项目《线性代数课程的研究和教材建设》（NKJ201502033）的资助．华北水利水电大学的张愿章教授仔细审阅了全稿，并提出了许多意见和建议，在此表示由衷的感谢！

虽然我们十分努力，但由于水平所限，难免有错误与不妥之处，恳请广大师生和读者批评指正．

编　者

2017 年 5 月 1 日

目　　录

第1章 行列式

行列式是线性代数的重要工具之一．本章给出 n 阶行列式的定义和性质，在此基础上介绍用行列式求解线性方程组的克拉默(Cramer)法则．

1.1 二、三阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，用消元法求得的解为

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为便于记忆，将方程组(1.1)中的未知量的系数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 依它们在方程组中的位置排成两行两列，引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，称之为**二阶行列式**，用来表示数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.3}$$

构成二阶行列式的 4 个数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 称为行列式的**元素**．它们排成两行两列，横的各排叫作**行**，纵的各排叫作**列**．数 a_{ij} $(i, j=1, 2)$ 称为行列式的第 i 行第 j 列元素．

如果把元素 a_{11} 到 a_{22} 的连线称为行列式的**主对角线**，而 a_{12} 到 a_{21} 的连线称为行列式的**次对角线**，则二阶行列式的值就等于主对角线上元素之积减去次对角线上元素之积．这种算法称为**对角线法则**．

线性方程组(1.1)的系数构成的行列式 D 称为方程组(1.1)的**系数行列式**．

按照二阶行列式的定义，式(1.2)中 x_1，x_2 的表达式中的分子可分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{22}b_1-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

显然，D_i $(i=1, 2)$ 即为 D 中的第 i 列换成方程组(1.1)的常数项所得到的行列式．

于是，当 $D\neq 0$ 时，线性方程组(1.1)的解可唯一地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.4}$$

例 1.1 求解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=9,\\ x_1-x_2=2.\end{cases}$$

解 由于 $D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5\neq 0$，且

$$D_1=\begin{vmatrix}9 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-15,\quad D_2=\begin{vmatrix}2 & 9\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-5,$$

由式(1.4)得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=1.$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{cases} \tag{1.5}$$

将未知量的系数按它们在方程组中的位置排成 3 行 3 列，引入**三阶行列式**

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}, \tag{1.6}$$

称 D 为线性方程组(1.5)的**系数行列式**. 再将 D 中的第 1 列、第 2 列、第 3 列分别换成方程组(1.5)的常数项，分别引入三阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix},$$

其中，D，D_1，D_2，D_3 分别定义为

$$\begin{aligned}D&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},\\ D_1&=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{13}a_{22}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32},\\ D_2&=b_2a_{11}a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+b_3a_{13}a_{21}-b_2a_{13}a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-b_3a_{11}a_{23},\\ D_3&=b_3a_{11}a_{22}+b_2a_{12}a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-b_3a_{12}a_{21}-b_2a_{11}a_{32},\end{aligned} \tag{1.7}$$

则当 $D\neq 0$ 时，

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

正是线性方程组(1.5)的唯一解.

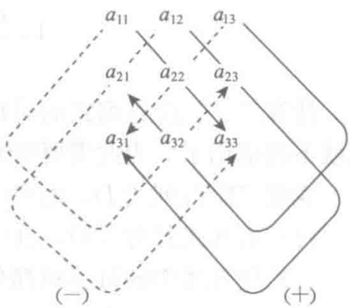

图 1.1

三阶行列式的值仍可由**对角线法则**来记忆. 以 D 为例. 由式(1.7), D 由 6 项构成, 每一项均为行列式 D 的不同行不同列的 3 个元素的乘积再冠以正负号, 其规律如图 1.1 所示.

图中的 3 条实线平行于主对角线, 实线上 3 个元素之积冠以正号; 3 条虚线平行于次对角线, 虚线上 3 个元素之积冠以负号.

例 1.2 计算

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

解 $D=2\times2\times(-1)+(-1)\times1\times(-1)+1\times3\times3-1\times2\times(-1)-(-1)\times3\times(-1)-2\times3\times1$

$=(-4)+1+9-(-2)-3-6=-1.$

习 题 1.1

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;　　(6) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$.

2. 求解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2=8, \\ x_1-2x_2=-3. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

3. 解方程: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=0.$

1.2 n阶行列式

计算二、三阶行列式的对角线法，虽然简单直观，但对于高于三阶的行列式就不再适用了．为此需要研究任意阶行列式的一般算法．

观察三阶行列式 D，由式(1.7)可见：

(1) 展开式共有 6 项，其中 3 个正项、3 个负项．

(2) 展开式中的每一项都是行列式的位于不同行不同列的 3 个元素之积；这 3 个元素的行下标按自然顺序排列时，其列下标都是 1，2，3 的某个排列．1，2，3 的全排列共有 6 种，分别对应着展开式中的每一项．

(3) 展开式中带正号的 3 项，其列下标的排列分别为 123，312，231，它们都是排列 123 中的任意两个数经零次或两次(偶数次)交换得到的；而带负号的 3 项的列下标是排列 123 中的任意两个数经 1 次(奇数次)交换得到的．也就是说，行列式展开式的每一项的符号与排列 123 中数字的交换次数(奇数次或偶数次)有关．

为阐明 n 阶行列式展开项的符号规律，引入逆序数的概念．

1.2.1 排列的逆序与奇偶性

n 个自然数 1，2，…，n 按一定的次序排成的一个无重复数字的有序数组称为一个 n **级排列**，记为 $i_1 i_2 \cdots i_n$.

显然，n 级排列共有 $n!$ 个．其中，称排列 $12\cdots n$ 为**自然排列**．

定义 1.1　在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，若一个较大的数排在一个较小数的前面，则这两个数构成一个逆序．一个排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**．

例 1.3　求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性．

(1) 352461；　　　　　　(2) $n(n-1)\cdots 21$.

解　由逆序数的定义，任一排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 为

i_1 后面比 i_1 小的数的个数$+i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数$+\cdots+i_{n-1}$后面比 i_{n-1}小的数的个数．

(1) $\tau(352461)=2+3+1+1+1=8$，352461 为偶排列；

(2) $\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

而$\dfrac{n(n-1)}{2}$的奇偶性由 n 而定：

当 $n=4k$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$是偶数；

当 $n=4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$是偶数；

当 $n=4k+2$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$是奇数；

当 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$是奇数．

所以，当 $n=4k$，$n=4k+1$ 时，此排列为偶排列；当 $n=4k+2$，$n=4k+3$ 时，此排列为奇排列．

定义 1.2　一个排列中的某两个数 i，j 位置对调，而其余数不动，这样得到一个新排列的实施过程称为一次对换，用(i, j)表示．相邻两个数的对换称为邻换．

定理 1.1　一次对换改变排列的奇偶性．

证　首先证明一次邻换改变排列的奇偶性．

设 n 级排列为$\cdots ij\cdots$，将相邻的两个数 i，j 对换，得到一个新的排列$\cdots ji\cdots$．由于除 i，j 之外其余的数不动，所以，其余数之间的顺序没有变化．

若 $i>j$，则新排列的逆序数比原排列减少 1；若 $i<j$，则新排列的逆序数比原排列增加 1. 所以一次邻换改变了排列的奇偶性．

再证明对换的一般情形．

设 n 级排列为$\cdots ia_1a_2\cdots a_kj\cdots$，$i$，$j$ 之间相隔 k 个数．要实现 i，j 的对换，得到新排列$\cdots ja_1a_2\cdots a_ki\cdots$，可先将 i 与 a_1 对换，再把 i 与 a_2 对换，…，这样，经过 $k+1$ 次邻换，就可以将 i 调换到 j 之后，得到排列$\cdots a_1a_2\cdots a_kji\cdots$；然后再把 j 对换到 a_1 之前，这需要经过 k 次邻换．这样，共经过 $2k+1$ 次邻换，完成了 i 与 j 的对换．所以原排列与新排列的奇偶性相反．

推论　n 个自然数($n\geqslant 2$)共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇排列和偶排列各占一半．

证　n 级排列的总数为$n(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$ 个．

设其中奇排列为 p 个，偶排列为 q 个．若对这 p 个奇排列施行对换$(1, 2)$，由定理1.1，p 个奇排列均变为偶排列，故 $p\leqslant q$；同理若对 q 个偶排列施行对换$(1, 2)$，则 q 个偶排列变为奇排列，故 $q\leqslant p$. 所以 $p=q$，从而 $p=q=\frac{n!}{2}$.

1.2.2　n 阶行列式的定义

利用排列的逆序和奇偶性的概念，三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有三级排列求和．推广到 n 阶行列式，有

定义 1.3 n^2 **个数** $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$ **排成** n **行** n **列，称记号**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

为 n **阶行列式．它的展开式是** $n!$ **个项的代数和．这些项是一切可能取自于** D **的不同行与不同列的** n **个元素的乘积** $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$**．项** $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ **的符号为** $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$**，当** $j_1j_2\cdots j_n$ **为奇排列时，该项符号为负，当** $j_1j_2\cdots j_n$ **为偶排列时，该项符号为正．即**

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.9}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ **表示对所有** n **级排列求和．**

行列式(1.8)简记为 $D=\det(a_{ij})$ 或 $D=|a_{ij}|$.

特别地，当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$.

例 1.4 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 n 阶行列式 D 的展开式有 $n!$ 个项，只需考虑其中的非零项．由于行列式的每一项皆为不同行不同列的 n 个元素之积，因此行列式中的非零项必为 n 个非零元素的乘积．

在行列式的第 1 行中，仅有 a_{11} 不为零，所以在式(1.9)中，a_{1j_1} 只能取 a_{11}，而 a_{2j_2} 只能取 a_{22}，不能取 a_{21}，因为 a_{21} 与 a_{11} 同列．同理 a_{3j_3} 也只能取 a_{33}，…，最后一行只能选 a_{nn}，从而，

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

该行列式主对角线上方的元素全为零，称之为**下三角行列式**；相应地，主对角线下方的元素全为零的行列式，称为**上三角行列式**．

同理，上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，主对角线以外元素全为零的行列式称为**对角行列式**，记为Λ.

$$\Lambda=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理，可以定义关于次对角线的对角行列式以及三角行列式．利用行列式的定义，关于**次对角线的对角行列式以及上、下三角行列式**，分别有如下结论：

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \begin{matrix}\cdot^{\cdot^{\cdot}}\end{matrix} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \begin{matrix}\cdot^{\cdot^{\cdot}}\end{matrix} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1};$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \begin{matrix}\cdot^{\cdot^{\cdot}}\end{matrix} & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

需要指出的是，n阶行列式(1.8)的定义有多种形式．

例如，把n阶行列式展开式的每一项元素的列下标按自然顺序排列，则行下标是某个n级排列$i_1i_2\cdots i_n$，便有行列式(1.8)的另一定义：

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1.10}$$

若n阶行列式展开式的每一项元素的行下标按$i_1i_2\cdots i_n$排列，列下标按$j_1j_2\cdots j_n$排列，此时行列式(1.8)还可以定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n}. \qquad (1.11)$$

例 1.5 已知 $a_{23}a_{31}a_{ij}a_{64}a_{56}a_{15}$ 是某六阶行列式的展开式中的一项，试确定 i，j 的值以及该项的符号.

解 根据行列式的定义，行列式是其不同行不同列元素乘积的代数和，因此行下标 2，3，i，6，5，1 应取自 1～6 这六个数字，故 $i=4$. 同理 $j=2$.

或者对换项 $a_{23}a_{31}a_{ij}a_{64}a_{56}a_{15}$ 中元素的位置，使行下标为自然排列，得 $a_{23}a_{31}a_{ij}a_{64}a_{56}a_{15}=a_{15}a_{23}a_{31}a_{ij}a_{56}a_{64}$，显然 $i=4$. 同理，若使列下标为自然排列，则知 $j=2$.

关于此项所带的符号，可有两种思路：

(1) 使行下标为自然排列，$a_{23}a_{31}a_{42}a_{64}a_{56}a_{15}=a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{64}$，此时右端列下标排列为 531264. 因 $\tau(531264)=4+2+0+0+1=7$，即列的逆序数为奇数，所以该项应带负号.

(2) 直接计算行的逆序数和列的逆序数，因 $\tau(234651)+\tau(312465)=6+3=9$，即行、列逆序数之和为奇数，所以该项符号为负.

习 题 1.2

1. 确定下列排列的逆序数，并确定排列的奇偶性：

(1) 25143； (2) 6573421； (3) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

2. 确定下列五阶行列式的项所带的符号：

(1) $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}a_{55}$； (2) $a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}a_{55}$； (3) $a_{31}a_{42}a_{24}a_{13}a_{55}$.

3. 下列乘积中，哪些可以构成相应阶数的行列式的项？

(1) $a_{34}a_{21}a_{43}a_{12}$； (2) $a_{12}a_{23}a_{34}a_{14}$； (3) $a_{41}a_{32}a_{23}a_{14}a_{55}$.

4. 写出四阶行列式中含有 a_{32} 且带有负号的项.

5. 用行列式的定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} a & b & -a & c \\ -a & b & c & 0 \\ b & -a & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

6. 根据行列式的定义，确定函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数．

1.3　行列式的性质

本节给出行列式的性质，利用这些性质可以简化行列式的计算．

考虑 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 D 的行与列依次互换，得到的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}．显然，$(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1.1　行列式与它的转置行列式的值相等．

证　将 D^{T} 记为

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，从而

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}b_{i_1 1}b_{i_2 2}\cdots b_{i_n n}=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=D.$$

这表明，行列式的行和列具有同等地位．因而对于行成立的性质，对列同样也成立．反之亦然．

性质 1.2　交换行列式的两行(或两列)，行列式的值只改变一个正负号．

证　给定行列式