工科数学信息化教学丛书

概率统计
学习指导与习题精解

费锡仙　李逢高　主编

科学出版社

工科数学信息化教学丛书

概率统计学习指导与习题精解

费锡仙　李逢高　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为“概率论与数理统计”课程辅助教材，是与李子强、黄斌主编的《概率论与数理统计教程（第四版）》（科学出版社 2015 年 10 月出版）配套的辅导书. 本书与配套教材前七章同步，共七章. 每章体系分为三部分，即知识结构图、典型问题与求解方法、习题详解. 其一是将各章知识点以图表的形式罗列出来让读者尽可能一目了然；其二是对各章典型问题进行归纳与小结，以便让读者明白问题并知道该类问题的解决途径与方法；其三是方便读者在学习过程中弄清楚教材后的每个问题.

本书可作为广大学生学习“概率论与数理统计”课程的参考书，对报考硕士研究生的人员、广大教师及科研人员也具有一定的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计学习指导与习题精解 / 费锡仙，李逢高主编. —北京：科学出版社，2018.11

(工科数学信息化教学丛书)

ISBN 978-7-03-059743-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①费… ②李… Ⅲ. ①概率统计-高等学校-题解 Ⅳ. ①O211-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 261806 号

责任编辑：谭耀文 张 湾/责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超/封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 11 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2018 年 11 月第一次印刷 印张：8 1/4

字数：193 000

定价：28.00 元

前　言

本书为“概率论与数理统计”课程辅助教材，是与李子强、黄斌主编的《概率论与数理统计教程(第四版)》(科学出版社 2015 年 10 月出版)配套的辅导书. 既可用于配套教材的教学，又可与本课程其他教材配合使用.

全书与配套教材前七章同步，每章包括知识结构图、典型问题与求解方法、习题详解共三个部分，除了对教材中前七章部分习题给出了完整、典型、详实的解答外，还对前七章的典型问题和求解方法进行了归纳和分析. 通过对本书的学习、借鉴和参考，能够提高读者分析和解决问题的能力，加深对基本内容的理解和掌握，增强读者学好这门课程的信心.

我们希望读者先自行思考，自己研究，然后再与详细解答进行对照，以期有所帮助.

本书由费锡仙、李逢高主编，左玲、万祥兰、彭峰集、张水坤、贺方超任副主编，各章内容具体编写如下：第一章(费锡仙、左玲)、第二章(张水坤)、第三章(左玲)、第四章和第五章(万祥兰)、第六章(费锡仙)、第七章(彭峰集、费锡仙)、各章知识结构图(贺方超)，最后由费锡仙统稿并定稿，李逢高教授审阅了全书.

本书不足之处在所难免，敬请谅解，欢迎读者批评指正，谢谢！

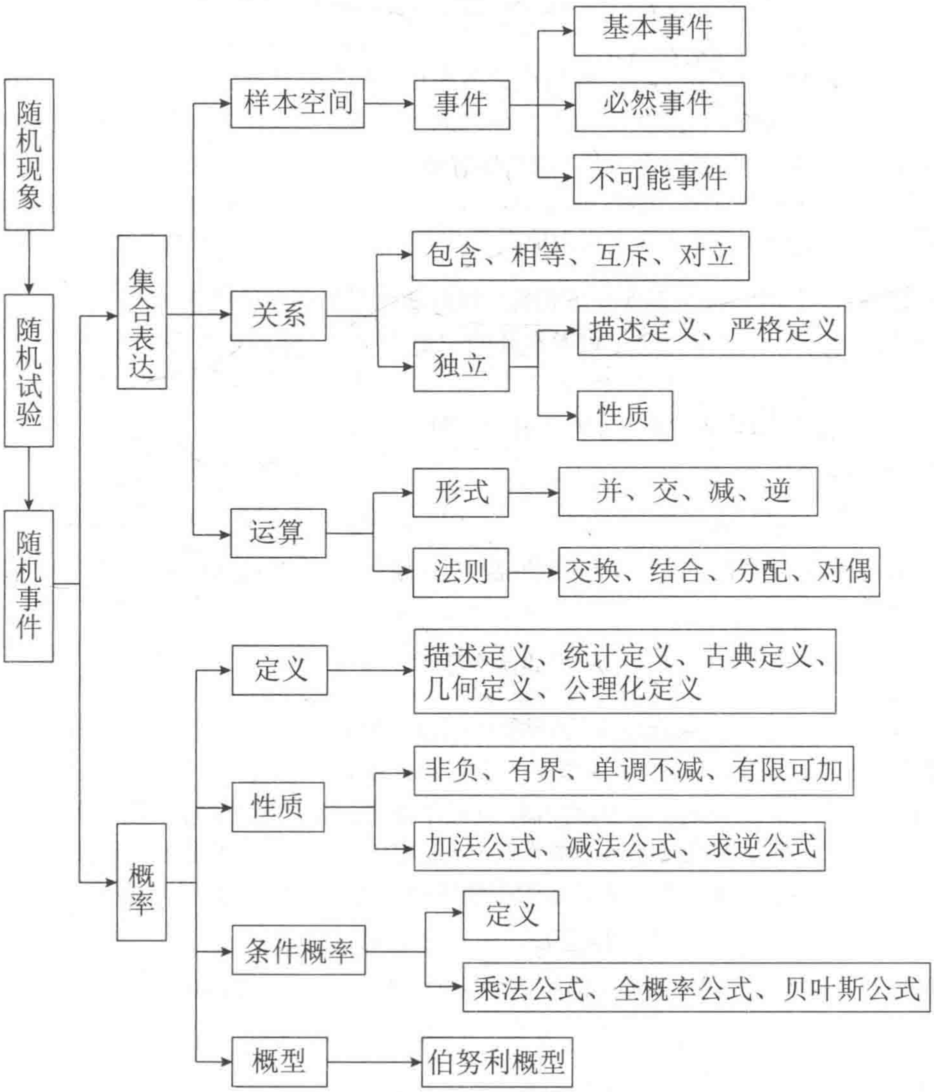
编　者

2018 年 6 月

目　　录

第一章　概率论的基本概念

一、知识结构图



二、典型问题与求解方法

典型问题 1: 利用几何型概率求解的应用问题

方法: 利用几何概型计算概率的公式求解事件出现的可能性.

例 1.1　在面积为 s 的$\triangle ABC$ 的边 AB 上任取一点 P，求使$\triangle PBC$ 面积大于 $\frac{s}{3}$ 的概率.

详解　设点 D、E 分别为点 A、P 到 BC 边的垂足，记事件 H 为$\triangle PBC$ 面积大于 $\frac{s}{3}$，若 $S_{\triangle PBC} > \frac{s}{3}$，则 $\frac{1}{2}|BC|\cdot|PE| > \frac{1}{3}|BC|\cdot\frac{1}{2}|AD|$，即 $\frac{|PE|}{|AD|} > \frac{1}{3}$. 由三角形的相似性知: $\frac{|BP|}{|BA|} > \frac{1}{3}$. 由三角形的相似性知: $\frac{|BP|}{|BA|} > \frac{1}{3}$，即当点 P 落在边 AB 上距离点 A 的距离小于 $\frac{2}{3}|AB|$ 的线段上时都可使$\triangle PBC$ 的面积大于 $\frac{s}{3}$，由几何概型知 $P(H) = \frac{|AP|}{|AB|} = \frac{2}{3}$.

评注　几何型概率的计算方式为所求事件的“大小”与样本空间“大小”的比值.

典型问题 2: 已知两个事件互不相容，判断事件之间存在的关系

方法: 根据互不相容的定义知道事件的交集为空集，然后结合空集的概率为零来分析结论是否成立.

例 1.2　假设事件 A 与事件 B 互不相容，则(　　).

A. $P(\overline{A}\overline{B}) = 0$　　　B. $P(AB) = P(A)P(B)$

C. $P(A) = 1 - P(B)$　　　D. $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right) = 1$

详解　依题意知，事件 A 与事件 B 互不相容，因此 $P(AB) = 0$，$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right) = 1 - P(AB) = 1$. 答案选 D.

评注　事件 A 与事件 B 互不相容即两个事件的交集为空集.

典型问题 3: 学习如何描述应用问题中关注的事件

方法: 根据已知信息建立发生事件的表示形式或等价形式.

例 1.3　在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的，在使用过程中，只要有 2 个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电. 以 E 表示事件电炉断电，而 $T_{(1)} \leqslant T_{(2)} \leqslant T_{(3)} \leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于(　　).

A. $T_{(1)} \geqslant t_0$　　B. $T_{(2)} \geqslant t_0$　　C. $T_{(3)} \geqslant t_0$　　D. $T_{(4)} \geqslant t_0$

详解　依题意知，只要有 2 个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电，而 4 个温控器温度关系为 $T_{(1)} \leqslant T_{(2)} \leqslant T_{(3)} \leqslant T_{(4)}$. 因此，事件 E 为 $T_{(3)} \geqslant t_0$. 答案选 C.

评注　根据已知信息采用描述法或列举法表示事件.

典型问题 4: 通过变量的取值范围，计算二维的几何型概率

方法: 通过事件的“大小”与样本空间的“大小”，计算二维的几何型概率.

例 1.4　甲、乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头，它们在一昼夜内到达的时间是等可能的. 如果甲船停泊的时间是 1 h，乙船停泊的时间是 2 h，求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率.

详解　令事件 A 为任何一艘船都不需要等候码头空出. 设甲、乙两船到达的时刻分别是 x、y，则 $0 \leqslant x \leqslant 24, 0 \leqslant y \leqslant 24$. 定义区域 $D:\{(x,y)|0 \leqslant x \leqslant 24, 0 \leqslant y \leqslant 24\}$. 随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布. 若甲先到达，则 $y \geqslant 1+x$；若乙先到达，则 $x \geqslant 2+y$. 因此，

$$P(A) = P\{X+1 \leqslant Y \leqslant X-2\} = \int_2^{24}\int_0^{x-2}\frac{1}{576}\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^{24}\int_0^{y-1}\frac{1}{576}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1013}{1152}$$

评注　在几何概型中，事件发生的概率等于事件的“大小”与样本空间“大小”的比值.

典型问题 5: 理解与分析多个事件的两两独立和相互独立的区别与联系

方法: 根据多个事件相互独立的定义判断多个事件之间的关系.

例 1.5　设事件 A、B 与 C 两两独立，则 A、B 与 C 相互独立的充分必要条件是(　　).

A. A 与 BC 独立　　　　B. AB 与 $A \cup C$ 独立

C. AB 与 AC 独立　　　　D. $A \cup B$ 与 $A \cup C$ 独立

详解　三个事件 A、B 与 C 相互独立的定义是: 事件 A、B 与 C 两两独立，并且满足 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$. 答案选 A.

评注　三个事件 A、B 与 C 相互独立的定义是事件 A、B 与 C 两两独立，并且三个事件还满足等式: $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

典型问题 6: 利用全概率公式与贝叶斯公式解决应用问题

方法: 根据已知信息，判断求解的是否为条件概率. 然后，选择采用全概率公式或贝叶斯公式求解事件发生的概率.

例 1.6　对有 100 名学生的班级考勤情况进行评估，从课堂上随机地点 10 位同学的名字，如果没有人缺席，则该班级考勤为优，设班上学生的缺席人数从 0 到 2 是等可能的，则: (1) 求该班级考核为优的概率; (2) 已知该班级考核为优，求该班级实际上确实全勤的概率.

详解　(1) 假设事件 A_i 表示班级有 i 个人缺席, $i = 0,1,2$. 事件 B 表示班级考核为优. 由全概率公式得

$$P(B) = \sum_{i=0}^{2} P(A_i)P(B \mid A_i) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{\mathrm{C}_{99}^{10}}{\mathrm{C}_{100}^{10}} + \frac{\mathrm{C}_{98}^{10}}{\mathrm{C}_{100}^{10}}\right) = \frac{149}{165}$$

(2) 由贝叶斯公式得

$$P(A_0|B) = \frac{P(A_0)P(B \mid A_0)}{P(B)} = \frac{110}{298} = \frac{55}{149}$$

评注　全概率公式俗称已知“原因”求“结果”，而贝叶斯公式则是已知“结果”

求“原因”. 这里的“原因”是指对样本空间的划分, “结果”是指关注的事件. 全概率公式是将一个事件的概率转化为若干个简单事件的概率的求和. 贝叶斯公式是指当事件发生后, 分析其出自哪个“原因”的概率.

典型问题 7: 利用乘法公式求解事件发生的概率

方法: 根据已知信息求解出条件概率, 然后结合乘法公式推得事件发生的概率.

例 1.7　假设有 5 把钥匙, 只有 1 把能打开门, 如果某次打不开就扔掉. 求以下事件的概率: (1) 第一次打开; (2) 第二次打开; (3) 第三次打开.

详解　令事件 A_i 表示第 i 次打开门, i=1,2,3,4,5, 则

(1) $P(A_1)=\dfrac{1}{5}$;

(2) 由乘法公式得 $P\left(\overline{A}_1A_2\right)=P\left(\overline{A}_1\right)P\left(A_2\mid\overline{A}_1\right)=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{5}$;

(3) $P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\right)=P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1\right)P\left(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2\right)=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$.

评注　乘法公式是由条件概率公式推理得到的. 通过乘法公式可以将事件交集的概率转化为事件的条件概率的乘积.

典型问题 8: 利用概率的性质与乘法公式求解事件发生的概率

方法: 根据已知条件与乘法公式求解出事件的逆的概率, 接下来通过概率的性质, 利用事件的逆的概率求解出事件发生的可能性.

例 1.8　有三个臭皮匠独立地解决问题, 成功解决的概率分别为 0.45、0.55、0.60. 问解决问题的能力能否赶上诸葛亮(成功的概率为 0.9)?

详解　三个人都不能解决问题的概率为

$$p_1=(1-0.45)(1-0.55)(1-0.60)=0.099$$

因此, 三人解决问题的概率为

$$p_2=1-p_1=1-0.099=0.901>0.9$$

即三人解决问题的能力可以赶上诸葛亮.

评注　若是直接求解事件的概率比较困难, 可以考虑先求解出事件的逆出现的可能性, 然后利用概率的性质, 对两者进行转换.

典型问题 9: 利用贝叶斯公式计算事件出现的概率

方法: 根据已知信息对样本空间进行划分, 进而利用贝叶斯公式计算事件出现的概率.

例 1.9　发报台以概率 0.6 和 0.4 发出信号“+”与“−”. 由于通信系统存在系统干扰, 当发出信号为“+”和“−”时, 收报台分别以概率 0.2 和 0.1 收到信号“−”与“+”. 求收报台收到信号“+”时, 发报台确实发出信号“+”的概率.

详解　假设事件 A 为收到信号“+”, 事件 B 为发出信号“+”. 由贝叶斯公式得

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{0.6\times0.8}{0.6\times0.8+0.4\times0.1}=\frac{12}{13}$$

评注　贝叶斯公式也称为已知“结果”求“原因”．这里的“原因”是指对样本空间的划分，“结果”是指关注的事件．贝叶斯公式关注的是事件已经发生了，而其出自哪个“原因”的可能性.

典型问题 10: 利用全概率公式计算事件出现的概率

方法: 首先根据题目已知信息对样本空间进行划分，然后运用全概率公式计算事件出现的可能性.

例 1.10　在盛有 10 只螺母的盒子中有 0 只, 1 只, 2 只，…, 10 只铜螺母是等可能的. 今向盒子中放入1只铜螺母，然后随机从盒中拿出1只螺母，则这只螺母为铜螺母的概率是多少？

详解　假设事件 A_i 为盒中原有 i 只铜螺母，$i=0,1,2,\cdots,10$，假设事件 B 为取出的是铜螺母，则由全概率公式得：$P(B)=\sum_{i=0}^{10}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{6}{11}$.

评注　全概率公式也被称为已知“原因”求“结果”．这里的“原因”是指对样本空间的划分，“结果”是指关注的事件．全概率公式是将一个事件的概率转化为若干个简单事件的概率的求和.

三、习 题 详 解

1. 抛三枚硬币出现两个正面一个背面的概率为(　　).

答案　$\frac{3}{8}$.

详解　这是一个古典概型，记样本空间 Ω 为抛三枚硬币的所有可能结果，A 为出现两个正面一个背面的事件，则样本空间 Ω 所含基本事件的个数为 $n=2^3=8$，而随机事件 A 所含基本事件的个数为 $k=C_3^2C_1^1=3$ 或 $k=C_3^1C_2^2=3$，故 $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{3}{8}$.

2. 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{8}$，$P(ABC)=\frac{1}{16}$，则 A、B、C 恰好有一个发生的概率为(　　).

答案　$\frac{3}{16}$.

详解　记 D 为事件 A、B、C 恰好有一个发生，即 $D=A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$，又因为事件 $A\overline{B}\overline{C}$、$\overline{A}B\overline{C}$、$\overline{A}\overline{B}C$ 两两互不相容，则

$$P(D)=P\left(A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\right)=P\left(A\overline{B}\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}B\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}\overline{B}C\right)$$

而其中

$$P\left(\overline{A}\overline{B}C\right)=1-P\left(\overline{\overline{A}\overline{B}C}\right)=1-P\left(A\cup B\cup\overline{C}\right)$$

又

$$P\left(A\cup B\cup \overline{C}\right)=P(A)+P(B)+P\left(\overline{C}\right)-P(AB)-P\left(A\overline{C}\right)-P\left(B\overline{C}\right)+P\left(AB\overline{C}\right)$$
$$=P(A)+P(B)+1-P(C)-P(AB)-P(A-AC)-P(B-BC)+P(AB-ABC)$$
$$=P(A)+P(B)+1-P(C)-P(AB)-P(A)+P(AC)-P(B)+P(BC)+P(AB)-P(ABC)$$
$$=1-P(C)+P(AC)+P(BC)-P(ABC)=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

所以 $P\left(\overline{A}\overline{B}C\right)=1-\frac{15}{16}=\frac{1}{16}$，同理 $P\left(A\overline{B}\overline{C}\right)=\frac{1}{16}$，$P\left(\overline{A}B\overline{C}\right)=\frac{1}{16}$，则

$$P(D)=P\left(A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\right)=P\left(A\overline{B}\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}B\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}\overline{B}C\right)=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$$

3. 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，则 $P(A+B)=$（　　）.

答案　$\frac{1}{3}$.

详解　因为 $P(A)=\frac{1}{4}>0$，而 $P(B|A)=\frac{1}{3}$，则由乘法公式知，$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$，所以 $P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1/12}{1/2}=\frac{1}{6}$，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

4. 设某射击手击中目标的概率为 0.5，则该射击手开三枪至少有一枪击中目标的概率为（　　）.

答案　$\frac{7}{8}$.

详解　记 A 为该射击手击中目标，由题意知 $P(A)=0.5=\frac{1}{2}$，且 $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=\frac{1}{2}$，该射击手开了三枪所有可能的结果为没有击中目标、击中一枪、击中两枪和击中三枪，若记 B 为三枪至少有一枪击中目标，则 $\overline{B}$ 为没有击中目标，由伯努利概型知 $P\left(\overline{B}\right)=C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，则 $P(B)=1-P\left(\overline{B}\right)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

5. 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{4x-x^2}$ 内投掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则该点与原点的连线同 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为（　　）.

答案　$\frac{2+\pi}{2\pi}$.

详解　记 A 为该点与原点的连线同 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$，则由几何概型知

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot2^2}{2\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot2^2}=\frac{2+\pi}{2\pi}$$

6. 设 A、B 是任意两个概率不为零的不相容事件，则下列结论中肯定正确的是(　　).

A. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容　　B. $\overline{A}$ 与 B 不相容

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　D. $P(A-B)=P(A)$

答案　D.

详解　由 A、B 不相容的定义知，$AB=\varnothing$，则 $P(AB)=P(\varnothing)=0$，由随机事件概率的性质知 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-0=P(A)$，所以选 D，而 C 是 A、B 相互独立的定义，故 C 不符合题意，A 与 B 显然不正确.

7. 房间里有 10 人，分别佩戴 1~10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码，最小号码为 5 的概率是(　　).

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{12}$　　C. $\frac{1}{10}$　　D. $\frac{1}{20}$

答案　B.

详解　这是一个古典概型，记所有可能结果为样本空间 Ω，3 人中最小号码为 5 的事件为 A，则样本空间所含基本事件的个数为 $n=C_{10}^3$，而随机事件 A 所含基本事件的个数为 $k=C_5^2$，故 $P(A)=\frac{k}{n}=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{5\times4/2}{10\times9\times8/(3\times2)}=\frac{1}{12}$.

8. 设 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.6$，$P(A\cup B)=0.9$，则 $P\left(A\overline{B}\right)=$(　　).

A. 0.1　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.4

答案　C.

详解　这是考察随机事件概率的性质，因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，所以 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.3+0.6-0.9=0$，则

$$P\left(A\overline{B}\right)=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3-0=0.3$$

9. 设 A、B 为两个任意事件，则 $P(A-B)=$(　　).

A. $P(A)-P(B)$　　B. $P(A)-P(B)+P(AB)$

C. $P(A)-P(AB)$　　D. $P(A)+P\left(\overline{B}\right)+P\left(A\overline{B}\right)$

答案　C.

详解　这是考察随机事件概率的性质，差事件的概率等于被减事件的概率减去两者积事件的概率，因而只有选项 C 正确.

10. 设 A、B 的概率均不为 0 和 1，$P(A|B)+P\left(\overline{A}|\overline{B}\right)=1$，则下列结论中正确的是(　　).

A. A 与 B 相互独立　　B. A 与 B 不相互独立

C. A 与 B 互不相容　　D. A 与 B 不相互对立

答案　A.

详解 由条件概率的定义及$P(A|B)+P\left(\overline{A}\middle|\overline{B}\right)=1$知，$P\left(\overline{A}\middle|\overline{B}\right)=1-P(A|B)=P\left(\overline{A}\middle|B\right)$，即无论事件$B$发生与否对于事件$A$的不发生都没有任何影响，有$B$与$\overline{A}$相互独立，则由相互独立的性质知，$B$与$A$相互独立，由事件的相互独立性的定义知A正确，而B、C、D显然不正确，故选A.

11. 写出下列随机事件的样本空间：

(1) 袋中有五只球，其中有三只白球、两只黑球，从袋中任取一只球，观察其颜色；

(2) 从(1)的袋中不放回地任取两次球，每次取一只，观察其颜色；

(3) 从(1)的袋中任取三只球，记录取到黑球的数量；

(4) 同时掷三只骰子，记录三只骰子的点数之和；

(5) 生产产品，直到10件正品为止，记录生产产品的总件数；

(6) 射击用的靶子是直径为R的圆盘，且每次射击均能中靶，现射击一次，记录子弹着点的位置.

详解 (1)样本空间$\Omega_1=\{$白色，黑色$\}$，因为袋中球的颜色只有白色、黑色这两种可能；

(2) 样本空间$\Omega_2=\{$(黑黑),(黑白),(白黑),(白白)$\}$，因为取两次，每次一只不放回，而黑球、白球的个数都不小于2；

(3) 样本空间$\Omega_3=\{0,1,2\}$，因为从袋中任取三只球，有可能是三只白球、两只白球一只黑球、一只白球两只黑球，故黑球的数量可能为$0,1,2$；

(4) 样本空间$\Omega_4=\{3,4,5,\cdots,18\}$，因为同时掷三只骰子，三只骰子的点数和最小为3，最大为18，之间的整数皆有可能；

(5) 样本空间$\Omega_5=\{10,11,12,\cdots\}$，因为生产直到10件正品为止，则最少要生产10件产品，而上限就无限制了；

(6) 样本空间$\Omega_6=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<R^2\}$.

12. 设A、B、C是同一样本空间下的三个随机事件，试用A、B、C表示下列事件：

(1) 恰有A出现； (2) 只有A和C出现；

(3) 所有事件都发生； (4) A、B、C只有一个出现；

(5) A、B、C至少有一个出现； (6) A、B、C都不出现；

(7) A、B、C中不多于两个出现； (8) A、B、C中至少有两个出现.

详解 (1) $A\overline{BC}$； (2) $A\overline{B}C$； (3) ABC；

(4) $A\overline{BC}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{AB}C$； (5) $A\cup B\cup C$； (6) $\overline{ABC}$；

(7) $\overline{ABC}\cup A\overline{BC}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{AB}C$或$\overline{ABC}$；

(8) $ABC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC$或$AB\cup BC\cup AC$.

13. 简化下列各式：

(1) $(A\cup B)\cup\left(A\cup\overline{B}\right)$；(2) $(A\cup B)\cap\left(A\cup\overline{B}\right)$；(3) $(A\cup B)\cap(B\cup C)$；

(4) $(A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cup B\right)\cap\left(A\cup\overline{B}\right)$；(5) $\left(\overline{A\cup B}\right)\cap(A-B)$.

详解 (1) $(A\cup B)\cup\left(A\cup\overline{B}\right)=A\cup\left(B\cup\overline{B}\right)=A\cup\Omega=\Omega$；

(2) $(A\cup B)\cap\left(A\cup\overline{B}\right)=A\cup\left(B\cap\overline{B}\right)=A\cup\varnothing=A$;

(3) $(A\cup B)\cap(B\cup C)=(A\cup B)\cap(C\cup B)=(A\cap C)\cup B=AC\cup B$;

(4) $(A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cup B\right)\cap\left(A\cup\overline{B}\right)=\left[\left(A\cap\overline{A}\right)\cup B\right]\cap\left(A\cup\overline{B}\right)=(\varnothing\cup B)\cap\left(A\cup\overline{B}\right)$

$=B\cap\left(A\cup\overline{B}\right)=(B\cap A)\cup\left(B\cap\overline{B}\right)=BA\cup\varnothing=BA=AB$;

(5) $\left(\overline{A\cup B}\right)\cap(A-B)=\left(\overline{AB}\right)\cap(A-B)=\overline{AB}A-\overline{AB}AB=\varnothing-\varnothing=\varnothing$.

14. 将一个红色立方体分成1000个同样大小的立方体，并从中随机地取出一个，试求恰好取到两个侧面涂有红色的小立方体的概率.

详解　依题意，将此红色立方体分成1000个同样大小的立方体，其中三面有红色的小立方体有8个(大立方体的8个顶点处的小立方体)，两面有红色的小立方体有8×12个(大立方体的12条棱处的小立方体，每条棱去掉2个顶点处的小立方体)，一面有红色的小立方体有$8\times8\times6$个(大立方体的6个面处的小立方体，去掉4条棱处的小立方体)，没有红色的小立方体有$8\times8\times8$个(去掉大立方体表面的那层小立方体剩下的都是没有颜色的)，记Ω为从中随机抽取1个小立方体，A为取到一个两侧面涂有红色的小立方体，这是一个古典概型，则$P(A)=\dfrac{n_A}{n_\Omega}=\dfrac{8\times12}{1000}=0.096$.

15. 在一本标准英语字典中有55个由两个不同字母组成的单词，现从26个英文字母中任取两个排列，问能排列成上述某单词的概率是多少？

详解　依题意，记Ω为从26个英文字母中任取两个排列，A为该标准英语字典中有55个由两个不同字母组成的单词，这是一个古典概型，则$P(A)=\dfrac{n_A}{n_\Omega}=\dfrac{55}{26\times25}=\dfrac{11}{130}$.

16. 一颗骰子投4次至少得到一个六点与两颗骰子投24次至少得到一个双六，分别求这两个事件的概率.

详解　依题意，记A为一颗骰子投1次得到一个六点，则$P(A)=p_1=\dfrac{1}{6}$，记B为投4次至少得到一个六点，由伯努利概型知，$P\left(\overline{B}\right)=\mathrm{C}_4^0p_1^{\,0}(1-p_1)^4=\mathrm{C}_4^0\left(\dfrac{1}{6}\right)^0\left(\dfrac{5}{6}\right)^4=\left(\dfrac{5}{6}\right)^4$，则$P(B)=1-P\left(\overline{B}\right)=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^4\approx0.518$；又记$C$为两颗骰子都得到六点，则$P(C)=p_2=\dfrac{1}{36}$，记$D$为两颗骰子投24次至少得到一个双六，由伯努利概型知，$P\left(\overline{D}\right)=\mathrm{C}_{24}^0p_2^{\,0}(1-p_2)^{24}=\mathrm{C}_{24}^0\left(\dfrac{1}{36}\right)^0\left(\dfrac{35}{36}\right)^{24}=\left(\dfrac{35}{36}\right)^{24}$，则$P(D)=1-P\left(\overline{D}\right)=1-\left(\dfrac{35}{36}\right)^{24}\approx0.491$.

17. 从$1,2,\cdots,10$这10个数中随机抽取4个，求:

(1) 最大的数是5的概率是多少？

(2) 最小的数是5的概率是多少？

(3) 至少有一个数小于6的概率是多少？

详解　依题意，记Ω为从$1,2,\cdots,10$这10个数中随机抽取4个，A为4个数中最大的

数是5，B 为4个数中最小的数是5，C 为4个数中至少有一个数小于6，由古典概型知:

(1) $P(A)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^4}=\dfrac{2}{105}$；

(2) $P(B)=\dfrac{C_5^3}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{21}$；

(3) $P(C)=\dfrac{C_5^1\cdot C_5^3+C_5^2\cdot C_5^2+C_5^3\cdot C_5^1+C_5^4}{C_{10}^4}=\dfrac{41}{42}$.

18. 设口袋里有2枚伍分、3枚贰分、5枚壹分的硬币，任取其中5枚，求总值超过一角的概率.

详解　方法一：依题意，任取其中5枚，所有可能结果为55222,55221,55211,55111,52221,52211,52111,51111,22211,22111,21111,11111，共12种结果，而总值超过一角的是前6种，总值不超过一角的是后6种，记 A 为总值超过一角，故 $P(A)=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$.

方法二：依题意，记 A 为总值超过一角，由古典概型知:

$$P(A)=\frac{C_2^2\cdot C_3^3+C_2^2\cdot C_3^2\cdot C_5^1+C_2^2\cdot C_3^1\cdot C_5^2+C_2^2\cdot C_5^3+C_2^1\cdot C_3^3\cdot C_5^1+C_2^1\cdot C_3^2\cdot C_5^2}{C_{10}^5}=\frac{1}{2}$$

19. 某油漆公司发出17桶油漆，其中白漆10桶，黑漆4桶，红漆3桶. 在搬运中所有标签脱落，交货人随意将这些发给顾客，问一个订货白漆4桶，黑漆3桶，红漆2桶的顾客，能按订的颜色如数得到订货的概率是多少？

详解　记 A 为能按订的颜色如数得到订货，由古典概型知：$P(A)=\dfrac{C_{10}^4\cdot C_4^3\cdot C_3^2}{C_{17}^9}=\dfrac{252}{2431}$.

20. 在1500个产品中有400个次品和1100个正品，任取200个，求:

(1) 恰有90个次品的概率；(2) 至少有两个次品的概率.

详解　由古典概型知，在1500个产品中任取200个的所有可能结果有 C_{1500}^{200} 种:

(1) 若恰有90个次品，则200个产品中有110个正品，故恰有90个次品的概率为 $p_1=\dfrac{C_{400}^{90}\cdot C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}$；

(2) 至少有两个次品的概率为 $p_2=1-\dfrac{C_{400}^{1}\cdot C_{1100}^{199}+C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}}$，问题转化为对其对立事件至多有一个次品的概率进行研究，因为至多有一个次品就是次品数恰为0或1，而次品数为0，说明抽取出的200个产品均为正品，而次品数为1，说明200个产品中有199个正品.

21. 送检的两批灯管在运输中各摔碎1支，若每批10支，而第一批中有1支次品，第二批中有2支次品. 现从剩下的灯管中任取1支，问抽得次品的概率是多少？

详解　记 $A_i(i=0,1)$ 为第一批中摔碎的次品个数为 i，$B_j(j=0,1)$ 为第二批中摔碎的次品个数为 j，D 为抽得次品，则 $P(A_0)=\dfrac{9}{10}$，$P(A_1)=\dfrac{1}{10}$，$P(B_0)=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$，$P(B_1)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$，

又 $A_i(i=0,1)$ 与 $B_j(j=0,1)$ 相互独立，则 $P(A_0B_0)=P(A_0)P(B_0)=\dfrac{9}{10}\times\dfrac{8}{10}=0.72$，同理，$P(A_0B_1)=P(A_0)P(B_1)=\dfrac{9}{10}\times\dfrac{2}{10}=0.18$，$P(A_1B_0)=P(A_1)P(B_0)=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{8}{10}=0.08$，$P(A_1B_1)=P(A_1)P(B_1)=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{2}{10}=0.02$，而 $P(D|A_0B_0)=\dfrac{C_3^1}{C_{18}^1}$，$P(D|A_0B_1)=\dfrac{C_2^1}{C_{18}^1}$，$P(D|A_1B_0)=\dfrac{C_2^1}{C_{18}^1}$，$P(D|A_1B_1)=\dfrac{C_1^1}{C_{18}^1}$，由全概率公式知:

$$\begin{aligned}P(D)&=P(A_0B_0)P(D|A_0B_0)+P(A_0B_1)P(D|A_0B_1)+P(A_1B_0)P(D|A_1B_0)+P(A_1B_1)P(D|A_1B_1)\\&=0.72\times\frac{C_3^1}{C_{18}^1}+0.18\times\frac{C_2^1}{C_{18}^1}+0.08\times\frac{C_2^1}{C_{18}^1}+0.02\times\frac{C_1^1}{C_{18}^1}=\frac{3}{20}\end{aligned}$$

即抽得次品的概率为 $\dfrac{3}{20}$.

22. 盒中放有12只乒乓球，其中9只是新的. 第一次比赛时，从中任取3只，用完后放回盒中. 第二次比赛时，又从盒中任取3只. 求第二次取出的球都是新球的概率.

详解 记 D 为第二次取出3只新球，A_1 为第一次取出3只新球，A_2 为第一次取出2只新球1只旧球，A_3 为第一次取出1只新球2只旧球，A_4 为第一次取出3只旧球，则 $P(D|A_1)=\dfrac{C_6^3}{C_{12}^3}$，$P(D|A_2)=\dfrac{C_7^3}{C_{12}^3}$，$P(D|A_3)=\dfrac{C_8^3}{C_{12}^3}$，$P(D|A_4)=\dfrac{C_9^3}{C_{12}^3}$，而 $P(A_1)=\dfrac{C_9^3}{C_{12}^3}$，$P(A_2)=\dfrac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}$，$P(A_3)=\dfrac{C_9^1C_3^2}{C_{12}^3}$，$P(A_4)=\dfrac{C_3^3}{C_{12}^3}$，由全概率公式知:

$$\begin{aligned}P(D)&=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(D|A_i)=\frac{C_9^3}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_6^3}{C_{12}^3}+\frac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_7^3}{C_{12}^3}+\frac{C_9^1C_3^2}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_8^3}{C_{12}^3}+\frac{C_3^3}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_9^3}{C_{12}^3}\\&=\frac{84\times21}{12100}=\frac{1764}{12100}\approx0.1458\end{aligned}$$

即第二次取出的3只球都是新球的概率为0.1458.

23. 袋中有 a 只白球和 b 只黑球，现每次从袋中任取1球，取出后不放回，求第 $k\,(k\leqslant a+b)$ 次取得白球的概率.

详解 袋中有 a 只白球和 b 只黑球，现每次从袋中任取1球，取出后不放回，每次抽取完后的结果都可以看成是这 $a+b$ 个球放在 $a+b$ 个位置上的一个排列，而第 $k\,(k\leqslant a+b)$ 次取球的所有可能结果可以看成是第 k 个位置所有能放的球的可能结果，有 $a+b$ 个可能，而第 k 个位置放白球的可能结果为 a 个，由古典概型知，其概率为 $\dfrac{a}{a+b}$.

24. 某产品100个为一批，次品率为5%，对每批产品进行抽样检查. 依规定从中抽取5件，只要有一件是次品就认为该批产品不合格，问某批产品经抽样检查被认为不合格的概率.

详解　依题意，抽取5件产品，其中次品数有可能为0,1,2,3,4,5，而只要有一件是次品就认为这批产品不合格，则认为不合格的概率为

$$1-C_5^0p^0(1-p)^5=1-(1-0.05)^5=1-(0.95)^5\approx 0.23$$

25. 一名工人负责维修10台同类型的机床，在一段时间内每台机床发生故障需要维修的概率为0.3，求在这段时间内至少有两台机床需要维修的概率.

详解　记D为这段时间内至少有两台机床需要维修，因为每台机床需要维修的概率为$p=0.3$，这段时间内至多有一台机床需要维修的概率为

$$P\left(\overline{D}\right)=C_{10}^0p^0(1-p)^{10}+C_{10}^1p^1(1-p)^9=(0.7)^{10}+10\times0.3\times(0.7)^9$$

则

$$P(D)=1-P\left(\overline{D}\right)=1-(0.7)^{10}-10\times0.3\times(0.7)^9\approx 0.85$$

故在这段时间内至少有两台机床需要维修的概率为0.85.

26. 向布满平行线的平面上投掷一硬币，设任意相邻两平行线的距离都等于$2a$，而硬币的直径为$d(d<2a)$，试求此硬币落下后不与任何直线相交的概率.

详解　作任意相邻两条平行线l_n、l_{n+1}，以l_n为参照对象，硬币中心到l_n的所有可能点对应的长度为$2a$，而与l_n相交的所有可能点对应的长度为$d(d<2a)$，记D为此硬币落下后不与任何直线相交，由几何概型知，$P\left(\overline{D}\right)=\dfrac{d}{2a}$，则$P(D)=1-P\left(\overline{D}\right)=1-\dfrac{d}{2a}=\dfrac{2a-d}{2a}$，即此硬币落下后不与任何直线相交的概率为$\dfrac{2a-d}{2a}$.

27. 在一张画有方格的纸上投掷一枚直径为l的硬币，问方格要多大才能使硬币与方格的边不相交的概率小于1%？

详解　设方格的边长为a，则硬币与方格不相交的概率为$p=\dfrac{(a-l)^2}{a^2}$，若$p=\dfrac{(a-l)^2}{a^2}<1\%$，即$\dfrac{a-l}{a}<\dfrac{1}{10}$，解得$a<\dfrac{10}{9}l$，即当方格的边长$a<\dfrac{10}{9}l$时，直径为$l$的硬币与方格的边不相交的概率小于1%.

28. 设某码头只能容纳一只船，现得知某日将到来两只船，且在该天24 h内各时刻到来的可能性都相等. 如果它们需要停靠的时间是2 h和3 h，求有一只船要在江中等待的概率.

详解