"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

数量经济学系列丛书

数理金融

资产定价的原理与模型（第3版）

QUANTITATIVE ECONOMICS

佟孟华　郭多祚　主编

清华大学出版社

数量经济学系列丛书

数理金融

资产定价的原理与模型（第3版）

佟孟华 郭多祚 主编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书以资产定价为主线，讲述了无套利定价和均衡定价两种资产定价方法；讲述了各种资产定价的模型，包括债券定价模型、以股票为代表的风险资产的定价模型、金融衍生产品定价模型、期权定价模型，并按难易程度，首先讲述单期定价模型，然后讲述跨期定价模型。本书还介绍了 MM 理论以及行为金融学。

本书适用于经济管理类专业的本科生、硕士生教学，也适用于理工科专业学生的选修课，还可供从事金融工作的人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数理金融：资产定价的原理与模型/佟孟华，郭多祚主编. —3 版. —北京：清华大学出版社，2018
(数量经济学系列丛书)
ISBN 978-7-302-50338-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①佟… ②郭… Ⅲ. ①金融学－数理经济学 Ⅳ. ①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 114920 号

责任编辑：张 伟
封面设计：常雪影
责任校对：王凤芝
责任印制：丛怀宇

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn，010-62770177-4506
印 装 者：三河市少明印务有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：19 **字 数**：438 千字
版 次：2006 年 8 月第 1 版 2018 年 8 月第 3 版 **印 次**：2018 年 8 月第 1 次印刷
定 价：55.00 元

产品编号：077995-01

第 3 版前言

在第 2 版的基础上，除修改了第 2 版的印刷错误外，新增内容如下。

(1) 在 1.6.2 节中，增加了“基本证券可以为任何证券定价”的证明过程。

(2) 第 2 章(固定收益证券)增加了“可变利率与债务投资”(2.6 节)的内容，同时在第 2 章的习题部分也增加了相应内容的习题，使得固定收益证券的内容更加完善。

(3) 第 5 章增加了“利用 Greek 参数套期保值”(5.4.3 节)的内容，使读者能够更深入地理解如何构建不受股票价格波动影响的资产组合。

(4) 我们更新了课件，可供教师进行交流、使用。第 2 版于 2015 年入选“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。

编　者

2017 年 12 月

东北财经大学师道斋

第 2 版前言

本书自 2006 年出版以来，被许多院校选用作为教材，并提出了许多宝贵的意见和建议。因此，在原书的基础上进行了修改，出版本书的第 2 版。

在第 2 版中，修改了第 1 版的印刷错误，为了便于对本书内容的理解，对原书中部分内容的讲解进行了细化，增加了一些例题。为使内容更加完整，增写了部分章节。

为了便于本科生教学，第 2 版编写了习题。一般来说，本书的前 5 章可适应于本科生教学，其中的部分内容在教学中可不讲解或让学生阅读，例如 3.6、5.6.3 和 5.6.4，第 2 版在这几节前面加上了星号。

以本书为教材的数理金融课程在 2009 年被评为辽宁省精品课，并且制作了课件，可供使用本教材的教师进行交流、使用。

本书是国家级教学团队——“经济计量分析类课程”教学团队系列教材之一。

第 2 版的出版得到了清华大学出版社的大力支持，在此表示衷心感谢！

编　者

2011 年 12 月

东北财经大学 师道斋

第 1 版前言

数理金融学(mathematical finance)是 20 世纪后期发展起来的新学科。数理金融学的特点是以数学为工具对金融学的核心问题进行分析和研究。资产定价问题是金融学的三个基本研究内容之一,它与数学密切相关。数学工具的运用使金融学成为一门真正的科学。现代金融学产生于“两次华尔街革命”。第一次华尔街革命是指 1952 年马科维茨(H. M. Marcowitz)投资组合选择理论的问世。此后,马科维茨的学生夏普(W. F. Sharpe)在马科维茨理论的基础上,提出了资本资产定价模型(capital asset pricing model,CAPM)。他们两人的成果获得了 1990 年诺贝尔经济学奖。他们的工作是利用数学工具,在严格假设的基础上,利用数学推理论证解决了风险资产的定价问题,是将数学方法应用于金融学的成功范例,也是划时代的开创性工作。第二次华尔街革命是指 1973 年布莱克(F. Black)和斯科尔斯(M. S. Scholes)期权定价公式的提出。这一成果荣获 1997 年诺贝尔经济学奖。他们也是利用数学工具解决了重要的金融衍生产品期权的定价问题。两次华尔街革命标志着现代金融学的诞生,同时也产生了一门新的学科:数理金融学。

随着金融市场的发展及各种金融创新不断出现,各种金融衍生产品层出不穷,这又给数理金融学的发展提出了更高的要求,同时也为数理金融学的发展提供了广阔的空间。数理金融学成为金融工程学的理论基础。现代金融学离不开数学,因此无论是从事金融理论研究还是金融市场决策有关的实务工作都需要学习数理金融理论,掌握利用数学工具分析金融问题的方法。数理金融学能使经济和管理专业的学生掌握定量分析的方法和技术。同时,对于数学和理工科专业的学生来说,通过学习数理金融学也使他们所掌握的数理工具大有用武之地。

本书以资产定价的原理和模型为主线,主要介绍资产定价的无套利定价和均衡定价原理,以及以此为依据的债券定价、风险资产定价和衍生产品定价模型。本书从易到难先介绍单期模型,然后介绍多期模型。

本书共分 9 章。第 1 章介绍期望效用函数理论、投资者的风险类型及其风险度量以及单期无套利模型和均衡定价模型,是学习金融经济学和数理金融学的基础知识。第 2 章主要研究金融学研究的主要内容之一:货币的时间价值。这也是各种投资决策的基础,同时也是债券定价的理论依据。这章的末尾研究了债券价格波动分析与测度。第 3 章介绍了马科维茨的投资组合选择理论和资本资产定价模型,主要以股票为例讨论了风险资产的定价问题。第 4 章主要研究以多因子线性模型为依据,以无套利分析为出发点,考虑多因素共同影响资产价格的条件下的风险资产的定价问题。第 5 章主要介绍金融衍生产品期权及其定价问题。这章的核心是复制技术与无套利原则在资产定价中的应用,以及市场的有效性及股票价格变动模式,并以此为依据解决期权的定价问题。它也是各种未定权益定价的基础。第 6 章的多期无套利定价模型是单期无套利定价原理的推广,

讲授的是多期无套利定价原理,它是各种随机现金流定价的基础。第7章介绍MM理论,它是无套利原理的一个重要应用,另外还讨论了公司资本结构问题。第8章是把资本资产定价模型推广到连续时间动态模型,讨论了考虑投资和消费情况下的动态的投资组合选择和基于消费的资本资产定价模型。这8章以资产定价的原理和模型为主线,介绍了现代金融理论的成功之处,以及可供借鉴的各种分析金融问题和解决金融问题的方法。但是任何理论都不是完美无缺的;第9章从现代金融理论存在的缺陷为突破口,介绍了行为金融理论。行为金融理论虽然现在还不成熟,但是2002年诺贝尔经济学奖授予了美国普林斯顿大学Peniel Kahneman和乔治梅森大学Vernon L. Smith教授,也使得行为金融学和用实验方法研究金融问题得到了人们的重视。这章主要概括地介绍行为金融学,以扩大读者的视野。

本书的特点是以数理金融学中的资产定价理论作为核心内容,从单期模型由浅入深推广到多期模型。与通常的金融经济学相比,更侧重于数学方法的运用。与金融数学类的书相比,本书介绍了金融学问题的提出和问题的解决过程。本书可作为经济管理类本科生教材,可重点学习第1～5章和第7章,其他各章可供参考。对于研究生,可讲授第6章和第8、9章。对于理工科相关专业,可作为选修课教材。也可供金融理论研究和实务工作者参考。

本书的第2、6、7章由佟孟华编写,第3、4章由徐占东编写。郭多祚编写其余各章并负责全书的整体构思。

由于作者水平有限,书中难免出现缺陷和错误,欢迎专家学者以及各院校的师生批评指正。

编　者

2006年5月

目　录

第1章 期望效用函数理论与单期定价模型

众所周知,在经济学中效用函数是偏好的定量描述,也是投资人决策的依据。金融学是在不确定性的环境中进行决策,金融资产的价格和投资收益都是随机变量,我们如何确定它的效用,是必须解决的重要问题。

期望效用函数理论是 Von Neumann 和 Morgenstern 创立的。期望效用函数是对不确定性的环境中各种可能出现的结果,定义效用函数值,即 Von Neumann-Morgenstern 效用函数,然后将此效用函数按描述不确定性的概率分布取期望值。本章首先介绍期望效用函数理论,然后在此基础上研究投资者的风险偏好以及风险度量,最后介绍单期定价模型。

1.1 序数效用函数

期望效用函数是基数效用函数。为研究基数效用函数,我们首先介绍序数效用函数。序数效用函数只要求效用函数值与偏好关系一致,即如果消费者认为商品 x 比商品 y 更受偏好,我们定义的序数效用函数就要求 x 的效用函数值比 y 的效用函数值大。

假设商品选择集 B 是 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 中的凸集。我们首先引入偏好关系概念。

1.1.1 偏好关系

设 B 是 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 中的凸集,在 B 中引入一个二元关系,记为"$\succeq$",如果它具有:

(1)(反身性)若 $\boldsymbol{x}\in B$,则 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{x}$。

(2)(可比较性)若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B$,则 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$ 或者 $\boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{x}$。

(3)(传递性)若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in B$,如果 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$,$\boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{z}$,则 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{z}$。

我们称"$\succeq$"是一个偏好关系。

上述的二元关系可以理解如下:若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B$,$\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$,则认为 $\boldsymbol{x}$ 比 $\boldsymbol{y}$ 好,或者 $\boldsymbol{x}$ 不比 $\boldsymbol{y}$ 差。若 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{x}$ 同时成立,则称 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 偏好无差异,记作 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$。若 $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$ 但 $\boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{x}$ 不成立,则称 $\boldsymbol{x}$ 严格地比 $\boldsymbol{y}$ 好,记作 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$。

1.1.2 字典序

我们给出一个偏好关系的例子,设选择集

$$B_2=\{(x,y)\mid x\in[0,\infty),y\in[0,\infty)\}$$

容易验证 B_2 是$\mathbb{R}^2$ 中的凸集,在 B_2 上,定义二元关系$\succeq$如下所述:

若$(x_1,y_1)\in B_2$,$(x_2,y_2)\in B_2$,如果 $x_1>x_2$,或者 $x_1=x_2$,$y_1\geqslant y_2$,定义$(x_1,y_1)\succeq(x_2,y_2)$为字典序。

下面验证上述的二元关系是一偏好的关系：

(1) 若$(x,y)\in B_2$,因为$x=x,y=y$,按字典序定义$(x,y)\succeq(x,y)$,即反身性成立。

(2) 若$(x_1,y_1)\in B_2$,$(x_2,y_2)\in B_2$,如果$x_1>x_2$,按字典序定义得$(x_1,y_1)\succeq(x_2,y_2)$,反之,如果$x_1<x_2$,则$(x_2,y_2)\succeq(x_1,y_1)$,如果$x_1=x_2$,$y_1\geqslant y_2$,按字典序定义则$(x_1,y_1)\succeq(x_2,y_2)$,如果$x_1=x_2$,$y_1\leqslant y_2$,则$(x_2,y_2)\succeq(x_1,y_1)$,即可比较性成立。

(3) 设$(x_1,y_1)\in B_2$,$(x_2,y_2)\in B_2$,$(x_3,y_3)\in B_2$,若$(x_1,y_1)\succeq(x_2,y_2)\succeq(x_3,y_3)$,显然$x_1\geqslant x_3$,如果$x_1>x_3$,按字典序定义得$(x_1,y_1)\succeq(x_3,y_3)$,如果$x_1=x_3$,此时$x_1=x_2=x_3$,因为$(x_1,y_1)\succeq(x_2,y_2)$,所以$y_1\geqslant y_2$,又$(x_2,y_2)\succeq(x_3,y_3)$,故$y_2\geqslant y_3$,于是$y_1\geqslant y_3$,从而$(x_1,y_1)\succeq(x_3,y_3)$,即传递性成立。

1.1.3 效用函数

设B是具有偏好关系“$\succeq$”的选择集,U是$B\to R_+$的单值函数,如果$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B$,$U(\boldsymbol{x})\geqslant U(\boldsymbol{y})$,当且仅当$\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$,则称$U$为效用函数。这里$R_+$是全体非负实数构成的集合。显然,效用函数是偏好关系的一个定量描述,效用函数数值的大小与偏好关系相一致,这样我们就可以将效用函数值的大小作为选择的依据。为了在具有偏好关系的商品选择集B上定义与偏好关系一致的效用函数,需要B上的偏好关系具有三条性质。

1.1.4 偏好关系的三条重要性质

性质 1(序保持性)　对任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B$,$\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$及$\alpha,\beta\in[0,1]$

$$\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}\succ\beta\boldsymbol{x}+(1-\beta)\boldsymbol{y}$$

当且仅当$\alpha>\beta$。

性质 2(中值性)　对任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in B$,如果$\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{z}$,那么存在唯一的$\alpha\in(0,1)$使$\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{z}\sim\boldsymbol{y}$。

性质 3(有界性)　存在$\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*\in B$,使对任意$\boldsymbol{z}\in B$,有$\boldsymbol{x}^*\preceq\boldsymbol{z}\preceq\boldsymbol{y}^*$。

性质 3 是为了效用函数存在定理的证明更方便,性质 1 和性质 2 是重要的,并不是所有偏好关系都具备这三条性质。

字典序具有性质 1 但不具有性质 2。

证明　首先证明字典序具有性质 1。

必要性　若$(x_1,y_1)\in B_2$,$(x_2,y_2)\in B_2$,$(x_1,y_1)\succ(x_2,y_2)$,$\alpha,\beta\in(0,1)$,则根据向量运算法则

$$\begin{aligned}\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_2)&=[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\alpha y_1+(1-\alpha)y_2]\\&=[\alpha(x_1-x_2)+x_2,\alpha(y_1-y_2)+y_2]\\\beta(x_1,y_1)+(1-\beta)(x_2,y_2)&=[\beta x_1+(1-\beta)x_2,\beta y_1+(1-\beta)y_2]\\&=[\beta(x_1-x_2)+x_2,\beta(y_1-y_2)+y_2]\end{aligned}$$

若$\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_2)\succ\beta(x_1,y_1)+(1-\beta)(x_2,y_2)$,则必有$\alpha>\beta$。因为若$\alpha=\beta$,必有

$$\alpha(x_1,y_1)+(1-\alpha)(x_2,y_2)\sim\beta(x_1,y_1)+(1-\beta)(x_2,y_2)$$

若$\alpha<\beta$,由于$x_1\geqslant x_2$,则有

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = \alpha(x_1 - x_2) + x_2 \leqslant \beta(x_1 - x_2) + x_2$$

$$\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 = \alpha(y_1 - y_2) + y_2 \leqslant \beta(y_1 - y_2) + y_2$$

因此

$$\alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_2, y_2) \preceq \beta(x_1, y_1) + (1-\beta)(x_2, y_2)$$

与假设矛盾,故必有 $\alpha > \beta$。

充分性　设 $\alpha > \beta$。

根据字典序的定义,可能有以下两种情况: $x_1 > x_2$,或 $x_1 = x_2, y_1 > y_2$。分别证明如下:

(1) 若 $x_1 > x_2$,则 $\alpha(x_1 - x_2) + x_2 > \beta(x_1 - x_2) + x_2$ 结论成立。

(2) 若 $x_1 = x_2, y_1 > y_2$,则有

$$\alpha(x_1 - x_2) + x_2 = \beta(x_1 - x_2) + x_2$$

$$\alpha(y_1 - y_2) + y_2 > \beta(y_1 - y_2) + y_2$$

故

$$\alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_2, y_2) \succ \beta(x_1, y_1) + (1-\beta)(x_2, y_2)$$

下面证明字典序不具有性质 2。

取 $(x_1, y_1) \in B_2, (x_2, y_2) \in B_2, (x_3, y_3) \in B_2$,且 $x_1 > x_2 = x_3, y_2 > y_3$,根据字典序定义,此时 $(x_1, y_1) \succ (x_2, y_2) \succ (x_3, y_3)$,对任意 $\alpha \in (0,1)$,我们有

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_3, y_3) &= \alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_2, y_3) \\ &= [\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_3] \end{aligned}$$

因为 $0 < \alpha < 1, x_1 > x_2$,有

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = \alpha(x_1 - x_2) + x_2 > x_2$$

所以 $\alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_3, y_3) \succ (x_2, y_2)$,因此不存在 $\alpha \in (0,1)$ 使得

$$\alpha(x_1, y_1) + (1-\alpha)(x_3, y_3) \sim (x_2, y_2)$$

这说明字典序不具有性质 2。

1.1.5　序数效用函数存在定理

定理 1.1(序数效用函数存在定理)　设选择集 B 上的偏好关系"$\succeq$"具有 1.1.4 节中的性质 1～性质 3,则存在效用函数 $U: B \to R_+$ 使得

(1) $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ 当且仅当 $U(\boldsymbol{x}) > U(\boldsymbol{y})$。

(2) $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ 当且仅当 $U(\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{y})$。

证明　由性质 3,存在 $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^* \in B$ 使对任意 $\boldsymbol{x} \in B$,有 $\boldsymbol{x}^* \succeq \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}^*$。

如果 $\boldsymbol{x}^* \sim \boldsymbol{y}^*$,此时对任意 $\boldsymbol{x} \in B$,有 $\boldsymbol{x}^* \sim \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}^*$,我们定义 $U(\boldsymbol{x}) = c$(常数)。此时,定理显然成立。

若 $\boldsymbol{x}^* \succ \boldsymbol{y}^*$,对任意的 $\boldsymbol{x} \in B$,因为 B 存在偏好关系,只有 3 种情况,分别定义效用函数如下:

情况 1: 当 $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}^*$ 时,定义 $U(\boldsymbol{x}) = 1$。

情况 2: 当 $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}^*$ 时,定义 $U(\boldsymbol{x}) = 0$。

情况 3: 当 $\boldsymbol{x}^* \succ \boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}^*$ 时,由性质 2 可知,存在唯一的 $\alpha \in (0,1)$ 使 $\boldsymbol{x} \sim \alpha \boldsymbol{x}^* + (1-\alpha)$

$\boldsymbol{y}^*$，此时我们定义 $U(\boldsymbol{x})=\alpha$。

这样，我们完成了效用函数的构造性定义。

(1) 证明 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$ 当且仅当 $U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$。

必要性　设 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$。

① 如果 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{x}^*\succ\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{y}^*$，此时 $U(\boldsymbol{x})=1$，由于 $\boldsymbol{x}^*\succ\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{y}^*$，则存在唯一 $\alpha\in(0,1)$ 使 $\boldsymbol{y}\sim\alpha\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha)\boldsymbol{y}^*$，按定义，$U(\boldsymbol{y})=\alpha<1$，所以 $U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$。

当 $\boldsymbol{x}^*\succ\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}\sim\boldsymbol{y}^*$，此时，按定义 $U(\boldsymbol{y})=0$，由于 $\boldsymbol{x}^*\succ\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}^*$，则存在唯一 $\alpha\in(0,1)$ 使 $\alpha\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha)\boldsymbol{y}^*\sim\boldsymbol{x}$，此时 $U(\boldsymbol{x})=\alpha>0$，即 $U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$ 成立。

② 如果 $\boldsymbol{x}^*\succ\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{y}^*$，则存在 α_1,α_2，使

$\alpha_1\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha_1)\boldsymbol{y}^*\sim\boldsymbol{x}$，按定义 $U(\boldsymbol{x})=\alpha_1$；

$\alpha_2\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha_2)\boldsymbol{y}^*\sim\boldsymbol{y}$，按定义 $U(\boldsymbol{y})=\alpha_2$。

由性质1，由于 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$，必有 $\alpha_1>\alpha_2$，故 $U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$。

充分性　假设已知 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B$，且 $U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$，证 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$。

若 $U(\boldsymbol{x})=1,U(\boldsymbol{y})=\alpha_2\in(0,1)$，此时 $\boldsymbol{x}\sim1\boldsymbol{x}^*+(1-1)\boldsymbol{y}^*$，$\boldsymbol{y}\sim\alpha_2\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha_2)\boldsymbol{y}^*$，由于 $\alpha_2<1$，由性质1(序保持性)可得，$\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$。

当 $U(\boldsymbol{x})=1,U(\boldsymbol{y})=0$ 时，按定义 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{x}^*\succ\boldsymbol{y}^*\sim\boldsymbol{y}$，故 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$。

若 $U(\boldsymbol{x})=\alpha_1\in(0,1),U(\boldsymbol{y})=0$，此时

$\boldsymbol{y}\sim\boldsymbol{y}^*=0\boldsymbol{x}^*+(1-0)\boldsymbol{y}^*$，$\boldsymbol{x}\sim\alpha_1\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha_1)\boldsymbol{y}^*$，由于 $\alpha_1>0$，故 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$。

若 $1>U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})>0$，此时令 $\alpha_1=U(\boldsymbol{x}),\alpha_2=U(\boldsymbol{y})$，由 U 的定义，$\boldsymbol{x}\sim\alpha_1\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha_1)\boldsymbol{y}^*$，$\boldsymbol{y}\sim\alpha_2\boldsymbol{x}^*+(1-\alpha_2)\boldsymbol{y}^*$。因为 $\alpha_1=U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})=\alpha_2$，由性质1，必有 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$。

(2) 证明 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ 当且仅当 $U(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{y})$。

必要性　任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in B$，设 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$，证 $U(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{y})$，若不然，$U(\boldsymbol{x})\neq U(\boldsymbol{y})$。不妨设 $U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$，由该定理的结论(1)，此时 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$，这与 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ 矛盾。

充分性　若 $U(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{y})$，而 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ 不成立，此时有两种可能：$\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$，或者 $\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{x}$。由结论(1)，必有 $U(\boldsymbol{x})\neq U(\boldsymbol{y})$，这与 $U(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{y})$ 矛盾，所以 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$。　　证毕。

设 U 是效用函数，函数 $G:R\to R$ 是正值严格单调增加函数，容易证明复合函数 $G\circ U:B\to R$ 也是效用函数。

注1　由效用函数的构造性定义，可见序数效用函数不是唯一的，但是都具有如下性质，$U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$ 的充要条件是 $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$；$U(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{y})$ 的充要条件是 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$，即效用函数与偏好关系是一致的，效用的大小是两个选择比较而言的，效用函数的取值大小并不重要。

注2　对于序数效用函数的存在性，1.1.4 节中的性质1和性质2起着十分关键的作用，前面我们已经证明了字典序具有性质1，但不具有性质2，我们也可以证明在字典序 B_2 上，不存在序数效用函数。

若不然，如果存在 B_2 上的效用函数 U，使得 $(x_1,y_1)\succ(x_2,y_2)$，如果 $U(x_1,y_1)>U(x_2,y_2)$，任取 $x\in[0,1]$，显然 $(x,1)\succ(x,0)$，于是 $U(x,1)>U(x,0)$。

设 $U(x,0)=\alpha_x,U(x,1)=\beta_x$，则 (α_x,β_x) 是一开区间。如果 $x>y$，根据字典序定义

$$(x,1)\succ(x,0)\succ(y,1)\succ(y,0)$$

于是 $\beta_x>\alpha_x>\beta_y>\alpha_y$。故 (α_y,β_y) 与 (α_x,β_x) 是互不相交的开区间，令 $T:x\to(\alpha_x,\beta_x)$，则 T

是一对一映射。但[0,1]区间的实数是不可数集合，而互不相交的开区间是可数集合，矛盾，于是在字典序上不存在与字典序相一致的效用函数。

注3　设 B 是具有偏好关系的有限集，则存在效用函数 $U: B\to R$ 使得

(1) $\boldsymbol{x}\succ\boldsymbol{y}$ 当且仅当 $U(\boldsymbol{x})>U(\boldsymbol{y})$；

(2) $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ 当且仅当 $U(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{y})$。

当 B 只有两个元素时，结论显然成立。设 B 有 n 个元素 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 时，定理成立。

下面证明 B 有 $n+1$ 个元素时定理也成立。不妨假设 $\boldsymbol{x}_1\preceq\boldsymbol{x}_2\preceq\cdots\preceq\boldsymbol{x}_n$。如果不存在 $1\leqslant k\leqslant n-1$，使 $\boldsymbol{x}_{k+1}\succ\boldsymbol{x}_k$，$\boldsymbol{x}_{k+1}\succeq\boldsymbol{x}_{n+1}\succeq\boldsymbol{x}_k$，则必有 $\boldsymbol{x}_{n+1}\preceq\boldsymbol{x}_1$ 或 $\boldsymbol{x}_{n+1}\succeq\boldsymbol{x}_n$。现在定义$U(\boldsymbol{x}_{n+1})$：

如果 $\boldsymbol{x}_{n+1}\sim\boldsymbol{x}_k$，定义 $U(\boldsymbol{x}_{n+1})=U(\boldsymbol{x}_k)$；

如果 $\boldsymbol{x}_{k+1}\succ\boldsymbol{x}_{n+1}\succ\boldsymbol{x}_k$，定义 $U(\boldsymbol{x}_{n+1})=\dfrac{1}{2}[U(\boldsymbol{x}_{k+1})+U(\boldsymbol{x}_k)]$；

如果 $\boldsymbol{x}_{n+1}\prec\boldsymbol{x}_1$，定义 $U(\boldsymbol{x}_{n+1})=\dfrac{1}{2}U(\boldsymbol{x}_1)$；

如果 $\boldsymbol{x}_{n+1}\succ\boldsymbol{x}_n$，定义 $U(\boldsymbol{x}_{n+1})=2U(\boldsymbol{x}_n)$；

容易验证，如上定义的效用函数 U，满足如下条件：

① $U(\boldsymbol{x}_i)>U(\boldsymbol{x}_j)$，当且仅当 $\boldsymbol{x}_i\succ\boldsymbol{x}_j$；

② $U(\boldsymbol{x}_i)=U(\boldsymbol{x}_j)$，当且仅当 $\boldsymbol{x}_i\sim\boldsymbol{x}_j$。

其中，$i,j=1,2,\cdots,n+1$。由数学归纳法，可见结论成立。

1.2　期望效用函数

本节借助于1.1节讲述的序数效用函数，对于随机变量定义效用函数。

1.2.1　彩票及其运算

由于金融资产的价格存在不确定性，所以它是一个随机变量。首先研究只有有限状态的离散随机变量如何定义效用函数，假设随机变量 X 的取值有 n 个结果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，它们出现的概率分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，其中 $p_i\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$。$p_i$ 表示结果 x_i 发生的概率。为了对随机变量 X 定义效用函数，引入彩票概念，为了简单起见，记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{P}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，称$\widetilde{\boldsymbol{P}}=(x_1,x_2,\cdots,x_n;p_1,p_2,\cdots,p_n)=(\boldsymbol{x};\boldsymbol{P})$为彩票。

$\widetilde{B}$为形如$\widetilde{\boldsymbol{P}}$的彩票构成的集合，设$\widetilde{\boldsymbol{P}}=(\boldsymbol{x};\boldsymbol{P})\in\widetilde{B}$，$\widetilde{\boldsymbol{Q}}=(\boldsymbol{x};\boldsymbol{Q})\in\widetilde{B}$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，定义

$$\alpha\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\alpha)\widetilde{\boldsymbol{Q}}=[x_1,x_2,\cdots,x_n;\alpha p_1+(1-\alpha)q_1,\alpha p_2+(1-\alpha)q_2,\cdots,\alpha p_n+(1-\alpha)q_n]$$

因为 $\alpha p_i+(1-\alpha)q_i\geqslant 0$，而且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha p_i+(1-\alpha)q_i=1$，可见

$$\alpha\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\alpha)\widetilde{\boldsymbol{Q}}\in\widetilde{B}$$

因此$\widetilde{B}$是凸集。

由上述定义,设$\widetilde{\boldsymbol{P}},\widetilde{\boldsymbol{Q}}\in\widetilde{B}$,$\alpha\in[0,1)$,经过简单的计算可以证明

(1) $\alpha\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\alpha)\widetilde{\boldsymbol{P}}=\widetilde{\boldsymbol{P}}$。

(2) $1\,\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus 0\,\widetilde{\boldsymbol{Q}}=\widetilde{\boldsymbol{P}}$。

(3) $\alpha\boldsymbol{P}\oplus(1-\alpha)\boldsymbol{Q}=(1-\alpha)\boldsymbol{Q}\oplus\alpha\boldsymbol{P}$。

(4) 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in[0,1]$,则

$$\begin{aligned}&\alpha_1[\alpha_3\boldsymbol{P}\oplus(1-\alpha_3)\boldsymbol{Q}]\oplus(1-\alpha_1)[\alpha_2\boldsymbol{P}\oplus(1-\alpha_2)\boldsymbol{Q}]\\=&[\alpha_1\alpha_3+(1-\alpha_1)\alpha_2]\boldsymbol{P}\oplus[1-\alpha_1\alpha_3-(1-\alpha_1)\alpha_2]\boldsymbol{Q}。\end{aligned}$$

1.2.2 彩票集合上的偏好关系

又假定$\widetilde{B}$中元素定义满足如下条件的偏好关系$\geq$具有:

(1)(返身性)对任意$\widetilde{\boldsymbol{P}}\in\widetilde{B}$,有$\widetilde{\boldsymbol{P}}\geq\widetilde{\boldsymbol{P}}$。

(2)(可比较性)对任意$\widetilde{\boldsymbol{P}},\widetilde{\boldsymbol{Q}}\in\widetilde{B}$,则或者$\widetilde{\boldsymbol{P}}\geq\widetilde{\boldsymbol{Q}}$,或者$\widetilde{\boldsymbol{Q}}\geq\widetilde{\boldsymbol{P}}$。

(3)(传递性)对任意$\widetilde{P}_1,\widetilde{P}_2,\widetilde{P}_3\in\widetilde{B}$,如果$\widetilde{P}_1\geq\widetilde{P}_2$,$\widetilde{P}_2\geq\widetilde{P}_3$,则$\widetilde{P}_1\geq\widetilde{P}_3$。

类似地,可定义严格偏好序“$>$”及无差异关系“$\sim$”。假设$\widetilde{B}$中的偏好序有如下性质:

性质1 对任意$\widetilde{\boldsymbol{P}},\widetilde{\boldsymbol{Q}}\in\widetilde{B}$,设$\widetilde{\boldsymbol{P}}>\widetilde{\boldsymbol{Q}}$,$\alpha,\beta\in[0,1]$,则

$$\alpha\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\alpha)\widetilde{\boldsymbol{Q}}>\beta\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\beta)\widetilde{\boldsymbol{Q}}$$

的充要条件是$\alpha>\beta$。

性质2 设$\widetilde{\boldsymbol{P}}_1,\widetilde{\boldsymbol{P}}_2,\widetilde{\boldsymbol{P}}_3\in\widetilde{B}$,$\widetilde{\boldsymbol{P}}_1>\widetilde{\boldsymbol{P}}_2>\widetilde{\boldsymbol{P}}_3$,则存在唯一$\alpha\in[0,1]$使

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_2\sim\alpha\widetilde{\boldsymbol{P}}_1\oplus(1-\alpha)\widetilde{\boldsymbol{P}}_3$$

性质3 设存在$\widetilde{\boldsymbol{P}}^*,\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*\in\widetilde{B}$,对任意$\widetilde{\boldsymbol{P}}\in\widetilde{B}$,有$\widetilde{\boldsymbol{P}}^*\geq\widetilde{\boldsymbol{P}}\geq\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*$。

1.2.3 基数效用函数存在定理

定理1.2(基数效用函数存在定理) 设$\widetilde{B}$具有1.2.2节中的性质1~性质3的偏好关系“$\geq$”,则存在效用函数$U:\widetilde{B}\to R$满足:

(1) $\widetilde{\boldsymbol{P}}>\widetilde{\boldsymbol{Q}}$,当且仅当$U(\widetilde{\boldsymbol{Q}})>U(\widetilde{\boldsymbol{Q}})$;

(2) $\widetilde{\boldsymbol{P}}\sim\widetilde{\boldsymbol{Q}}$,当且仅当$U(\widetilde{\boldsymbol{Q}})=U(\widetilde{\boldsymbol{Q}})$;

(3) 设$\widetilde{\boldsymbol{P}},\widetilde{\boldsymbol{Q}}\in\widetilde{B}$,$\beta\in[0,1]$,则$U[\beta\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\beta)\widetilde{\boldsymbol{Q}}]=\beta U(\widetilde{\boldsymbol{P}})+(1-\beta)U(\widetilde{\boldsymbol{Q}})$。

证明 由定理1.1容易证明(1)和(2)。现证(3),这里只考虑$\widetilde{\boldsymbol{P}}^*>\widetilde{\boldsymbol{P}}>\widetilde{\boldsymbol{Q}}>\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*$的情形。由性质2存在唯一的$\alpha_1\in[0,1]$,$\alpha_2\in[0,1]$使

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}\sim\alpha_1\widetilde{\boldsymbol{P}}^*+(1-\alpha_1)\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*$$

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}\sim\alpha_2\widetilde{\boldsymbol{P}}^*+(1-\alpha_2)\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*$$

对于 $\beta\in(0,1)$，则

$$\beta\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\beta)\widetilde{\boldsymbol{Q}}\sim[\beta\alpha_1+(1-\beta)\alpha_2]\widetilde{\boldsymbol{P}}^*\oplus\{1-[\beta\alpha_1+(1-\beta)\alpha_2]\}\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*$$

由效用函数的构造性定义

$$U(\widetilde{\boldsymbol{P}})=\alpha_1,U(\widetilde{\boldsymbol{Q}})=\alpha_2,U[\beta\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\beta)\widetilde{\boldsymbol{Q}}]=\beta\alpha_1+(1-\beta)\alpha_2$$

即

$$U[\beta\widetilde{\boldsymbol{P}}\oplus(1-\beta)\widetilde{\boldsymbol{Q}}]=\beta U(\widetilde{\boldsymbol{P}})+(1-\beta)U(\widetilde{\boldsymbol{Q}})$$

证毕。

注意：我们可以将(3)推广到 n 个彩票相加的情形。

设 $\pi_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{n}\pi_i=1,\widetilde{\boldsymbol{P}}_1,\widetilde{\boldsymbol{P}}_2,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{P}}_n\in\widetilde{B}$，我们用记号 $\sum_{i=1}^{n}\oplus\pi_i\widetilde{\boldsymbol{P}}_i$ 表示 n 个彩票相加，容易证明，$\sum_{i=1}^{n}\oplus\pi_i\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\in\widetilde{B}$，而且

$$U\left(\sum_{i=1}^{n}\oplus\pi_i\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\pi_iU(\widetilde{\boldsymbol{P}}_i)$$

这里定义的效用函数与序数效用函数不同，对于选择集 $\widetilde{B}$ 中的每个元素，定义一个与之相应的效用函数值，称这种效用函数为基数效用函数。

由效用函数的定义可见，上面定义的效用函数不唯一，但是在正仿射的意义下是唯一的。下面命题说明两个效用函数之间的正仿射关系。

命题 1.1　设 $\widetilde{B}$ 具有性质 1～性质 3，$W:\widetilde{B}\to R$，$U:B\to R$ 是关于偏好序"$\succeq$"的两个效用函数，它们都是具有定理 1.2 的性质(1)、(2)、(3)的效用函数，则存在实数 $a>0$ 和实数 b 使对任意 $\widetilde{\boldsymbol{P}}\in\widetilde{B}$，有

$$W(\widetilde{\boldsymbol{P}})=aU(\widetilde{\boldsymbol{P}})+b$$

证明　这里 U 是定理 1.2 中定义的效用函数，令

$$a=W(\widetilde{\boldsymbol{P}}^*)-W(\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*),b=W(\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*)$$

则 $a>0$，对任意 $\widetilde{\boldsymbol{P}}\in\widetilde{B}$，且 $\widetilde{\boldsymbol{P}}^*\succ\widetilde{\boldsymbol{P}}\succ\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*$ 时，有唯一的 $\alpha\in[0,1]$，使

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}\sim\alpha\widetilde{\boldsymbol{P}}^*\oplus(1-\alpha)\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*,\text{且 }U(\widetilde{\boldsymbol{P}})=\alpha$$

由定理 1.2，效用函数 U 满足定理 1.2 中的性质(3)，于是

$$\begin{aligned}W(\widetilde{\boldsymbol{P}})&=W[\alpha\widetilde{\boldsymbol{P}}^*\oplus(1-\alpha)\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*]\\&=\alpha W(\widetilde{\boldsymbol{P}}^*)+(1-\alpha)W(\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*)\\&=\alpha[W(\widetilde{\boldsymbol{P}}^*)-W(\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*)]+W(\widetilde{\boldsymbol{Q}}^*)\\&=a\alpha+b=aU(\widetilde{\boldsymbol{P}})+b\end{aligned}$$

由命题 1.1 可见，$\widetilde{B}$ 上的效用函数尽管不唯一，但在正仿射变换之下是唯一的。

1.2.4　Von Neumann-Morgenstern 效用函数

借助于 $\widetilde{B}$ 上的效用函数及 Von Neumann-Morgenstern 效用函数，定义随机变量 X 的