

全国普通高校自动化类专业规划教材



Modern Control Theory 2nd Edition

现代控制理论基础 (第2版)

石海彬 ◎编著

Shi Haibin

清华大学出版社



全国普通高校自动化类专业规划教材

Modern Control Theory 2nd Edition

现代控制理论基础 (第2版)

石海彬 ©编著

Shi Haibin

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书立足于时间域的状态空间概念,系统地介绍了线性控制系统的分析和设计理论。绪论部分介绍了控制理论的发展历程和现代控制理论的内容与定位;第1章介绍控制系统的状态空间模型;第2章介绍了线性控制系统的状态响应;第3章详细剖析控制系统的能控性和能观测性;第4章给出了自治系统的 Lyapunov 稳定性概念和判别方法;第5章从概念和方法上给出了线性系统的设计理论,包括极点配置,线性二次型最优控制、解耦控制、状态观测器等内容;第6章对离散控制系统进行了扼要介绍。

本书结构清晰、层次分明,注重基本概念、基本思想和基本方法,可作为高等院校自动控制及相关专业本科高年级学生和研究生教材或参考书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论基础/石海彬编著. —2版. —北京:清华大学出版社,2018

(全国普通高校自动化类专业规划教材)

ISBN 978-7-302-48685-5

I. ①现… II. ①石… III. ①现代控制理论—高等学校—教材 IV. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 271397 号

责任编辑:梁颖 李晔

封面设计:傅瑞学

责任校对:时翠兰

责任印制:杨艳

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社总机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课件下载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印装者:三河市国英印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:11.75

字 数:283千字

版 次:2015年12月第1版 2018年3月第2版

印 次:2018年3月第1次印刷

印 数:1~2000

定 价:35.00元

产品编号:077564-01

“现代控制理论”课程是高校自动化及相关专业的必修课程之一；其中基于状态空间理论的动力学系统分析与综合，也是国际众多名校自动化、电气等学科知识体系的重要组成部分。

本教材的第1版，融入了多年来教学过程中师生的共同思考，在一些概念、思想、表述、方法上避免简单重复、人云亦云，深刻剖析精神实质，运用简练通俗的语言分层表述，指出了以往教材不曾强调的很多常见误区。由于内容的新颖性，经两届教学使用，受到了学生们的好评，实现了预期的目标。

同时，在第1版教材的使用过程中，经过师生进一步的问答交流和学生们理论联系实际的科技实践活动，又有一些新观点、新理念被陆续提出、充分讨论和细致论证，同时发现一些新误区。再版教材能够让这些新知识面向更为广泛的受众，使之接受大家的检验，进而启发更多的学生思考、评判并提出改进意见。

这次再版，把第1版两年使用过程中的新观点、新理念、新结论以及新误区写入其中。与第1版相比，在指导思想上，一脉相承；在内容安排上，是继承和创新的有机融合；在文字表述上也进行了局部的修改和完善。

衷心感谢东北大学自动化专业两届学生以及其他院校广大师生读者对第1版教材的积极反馈。这些反馈，正是本教材得以改进和再版的深层动力。欢迎大家各种形式的探讨，继续对第1版和再版教材提出批评指正！

编著者

电子邮件：shihaibin@ise.neu.edu.cn

QQ：1318352261

2017年10月

“现代控制理论”课程作为高校自动化及相关专业的必修课程和某些专业研究生阶段的选修课程,教材众多。本书特点如下:

指导思想方面,强调融入多年来教学过程中师生的共同思考,在一些概念、思想、表述、方法上避免简单重复、人云亦云,而是深刻剖析精神实质,并用简练通俗的语言分层表述。基于此,本书指出了以往教材不曾强调的一些常见误区,并加以更正。

具体内容方面,部分特色之处简述如下。

第1章讲述控制系统的状态空间模型:

① 结合基础的传递函数和高阶微分方程描述,首次明确了状态变量的数学和物理本质。

② 在串联分解和并联分解中补充了共轭复根以及共轭复根叠加重根的情况。相对于以往教材,这部分内容更为完整。

第2章讲述控制系统的状态响应:

① 考虑工科学生的特点,简化推导,避免以往教材过于数学化的处理方式。

② 指出了矩阵指数有限项多项式展开中系数未必线性无关。

③ 指出了初态响应和输入响应的内在联系。

④ 结合实例指出虚轴极点导致等幅振荡这一误区。

⑤ 强调了系统初始时刻的相对性,为能控能观、稳定性等后续概念打好基础。

第3章讲述控制系统的能控性和能观测性:

① 以全新的视角剖析了能控能观测的时间、空间特性。

② 强调了以往教材绝少提及的能观测概念的时间顺序问题,并作为单独一节,从而使能观测性概念真正和应用联系起来。

③ 强调了能控能观测主要是针对系统外部信号,针对的是扩张系统和扩张状态。这样就打消了学生由于实际被控对象能控能观测而产生的能控能观无用论。

第4章讲述自治系统的稳定性理论:

① 以全新的视角剖析了稳定性的时间、空间特性。

② 强调了 Lyapunov(李雅普诺夫)稳定、渐近稳定和不发散的关系,指出 Lyapunov 稳定等价于不发散这一误区。

③ 给出了 Lyapunov 第二方法的简单数学本质,在此过程中指出了关于吸引域的一个常见误区。

第5章讲述线性控制系统的设计理论:

① 以全新的视角剖析了静态输出反馈和动态输出反馈的概念、功能、设计特点,拉近理论和应用的距离。

② 给出了状态观测器的一般概念,使学生做到透彻理解,并从概念上指出了状态观测器系统输出方程的一个常见误区。

第6章讲述离散控制系统:

指出离散情形由于系统矩阵未必可逆导致的状态转移矩阵未必可逆,使得与连续系统相平行的能控性判据失去了必要性,仅为充分条件。

各章建议学时:包括绪论在内,全书共计7部分。可参考2、8、6、6、6、10、2共计40学时来进行。对于总课时多于或少于40学时的情况,教师可自行酌情增减。

本书主要参考文献已在书后列出,特别是受益于清华大学吴麒教授和郑大钟教授以及Hassan K. Khalil的著作,在此表示衷心的感谢。

《礼记》中说:“学然后知不足,教然后知困。知不足,然后能自反也。知困,然后能自强也。故曰:教学相长也。”本书既是教学相长、师生相互问答、思考的结晶,也必将在后续的教学过程中继续动态完善。

由于编者能力所限,书中错漏、谬误、不妥之处恳请广大读者批评指正。不论咫尺天涯,智慧的读者永远是本书编著者的良师益友,是科技和社会进步的动力源泉。

编著者

电子邮件: shihaibin@ise.neu.edu.cn

QQ: 1318352261

2015年9月

第 0 章 绪论	1
0.1 系统与自动控制	1
0.2 控制理论的发展历程	1
0.3 本书的内容安排	4
第 1 章 控制系统的状态空间描述	5
1.1 系统描述中的基本概念	5
1.2 状态空间描述的基本概念	6
1.3 线性定常系统的传递函数矩阵	11
1.4 状态空间表达式的建立	13
1.4.1 由高阶微分方程建立状态空间表达式	14
1.4.2 由传递函数建立状态空间表达式	18
1.4.3 机理建模	26
1.5 组合系统的状态空间描述	28
1.6 状态向量的可逆变换	33
本章小结	38
习题 1	39
第 2 章 线性控制系统的状态响应	41
2.1 状态响应概述	41
2.2 定常自治系统的状态响应	42
2.3 矩阵指数的计算	44
2.4 时变自治系统的状态响应	50
2.5 线性自治系统的状态转移矩阵	51
2.6 线性控制系统的状态响应	52
本章小结	55
习题 2	55
第 3 章 线性控制系统的能控性和能观测性	58
3.1 能控性和能观测性概述	58
3.2 能控性的一般概念	59
3.3 时变控制系统的能控性	60
3.4 定常控制系统的能控性	63
3.5 能观测性的一般概念	71
3.6 时变控制系统的能观测性和对偶原理	72

3.7	定常控制系统的能观测性	74
3.8	能观测性的时间顺序	77
3.9	能控标准型和能观测标准型	78
3.10	传递函数矩阵与能控能观测	82
3.11	线性定常控制系统的结构分解	86
	本章小结	90
	习题3	90
第4章	系统运动的稳定性	93
4.1	外部稳定性和内部稳定性	93
4.1.1	外部稳定性	93
4.1.2	内部稳定性	93
4.1.3	外部稳定性和内部稳定性的关系	94
4.2	Lyapunov 稳定性理论的基本概念	94
4.3	Lyapunov 第二方法:直接方法	99
4.3.1	定常非线性系统的稳定性	99
4.3.2	时变非线性系统的稳定性	101
4.3.3	解读第二方法	103
4.3.4	Krasovskii 定理	105
4.4	线性系统的稳定性	106
4.5	Lyapunov 第一方法:间接方法	109
4.6	Lyapunov 方程的扩展应用:衰减上界和吸引区的估计	110
4.6.1	渐近稳定系统衰减率的估计	110
4.6.2	吸引区的估计	113
4.7	稳定性概念的扩展:指数稳定和有界性	116
	本章小结	118
	习题4	118
第5章	线性系统的反馈控制	120
5.1	状态反馈和输出反馈	120
5.2	极点配置	124
5.3	状态反馈解耦	131
5.3.1	解耦的基本概念和要求	131
5.3.2	可解耦条件和控制律设计	132
5.3.3	结合极点配置的解耦控制	133
5.4	线性二次型最优控制	135
5.5	状态观测器	137
5.5.1	状态观测器的一般概念	137
5.5.2	开环状态观测器	137

5.5.3 闭环状态观测器	138
5.5.4 降维闭环状态观测器	139
5.6 基于观测器的状态反馈系统	142
5.6.1 闭环系统和分离原理	142
5.6.2 闭环系统的传递函数矩阵	143
5.6.3 基于观测器的反馈与动态输出反馈	143
5.7 系统镇定	144
5.8 针对系统外部扰动的控制律设计	146
5.8.1 调节器问题	147
5.8.2 外部信号状态可测量的控制律设计	150
5.8.3 外扰状态观测器	153
5.9 鲁棒调节器	153
5.9.1 常值扰动的鲁棒调节器	154
5.9.2 鲁棒调节器的频域性质	157
5.9.3 一般鲁棒调节器的构造	158
本章小结	161
习题 5	161
第 6 章 离散系统的分析与设计	165
6.1 离散系统的状态空间描述	165
6.2 离散线性系统的状态响应	166
6.3 离散系统的能控性和能观测性	168
6.4 离散系统的 Lyapunov 稳定性	170
6.5 离散线性系统的设计	172
本章小结	174
习题 6	174
参考文献	176

0.1 系统与自动控制

自动控制的研究对象是系统。

系统的概念和含义非常广泛。系统是由相互关联相互作用的若干部分按照一定规律组合而成的、具有特定功能的整体。

系统最基本的特征是其整体性。系统的行为和功能是由其整体所决定的。系统可以具有其组成部分所没有的功能。组成部分相同但相互关联不同的两个系统,可呈现出完全不同的行为和功能。

系统可以具有完全不同的背景,如工程系统、生物系统、经济系统、社会系统等。但在系统理论中,常常可以忽略系统具体的含义、将其抽象为一般意义下的系统加以研究。这样做有助于揭示系统的一般特性。

系统的概念具有层级性。系统的每个组成部分也可以是系统,而系统自身又可以是一个更大系统的组成部分。

系统有动态和静态之分。动态系统又称为动力学系统,含有动力学特性,其模型描述中有系统变量的导数项或差分项,亦即系统由微分方程或差分方程来表示;而静态系统可由单纯的变量间的代数方程来表示。在系统与控制理论中,主要研究动态系统。

通常,在特定输入下研究系统的运动规律,称为系统分析;为了实现一定的动、静态性能要求(如调节时间、超调量、稳态误差等)而研究改变系统运动的可能性和方法,称为系统综合。前者属于认知系统,后者则是改造系统。

术语“综合”与“设计”一般说来有所不同。前者在应用上可实现的前提下确定控制律的形式和参数,而后者还要考虑控制系统构成的一些实际问题,如线路、元件的选取。本书中对这两个术语不加严格区分。

0.2 控制理论的发展历程

人类利用控制技术的历史,可以追溯到几千年前。但是,把控制技术在工程实践中的规律加以总结提高、进而以此为指导去推进工程实践,形成自动控制理论,成为一门独立的学科,则是 20 世纪初期和中期的事情。

按照时间顺序,控制理论的各个阶段分述如下。

1. 经典控制理论

经典控制理论起源于 20 世纪 20 年代。在 20 世纪 20~40 年之间,曾涌现出很多经典控制理论的先驱,如 Minorsky、Nyquist、Hagen、Bode 和 Wiener 等。他们的工作为经典控制理论奠定了基础,同时促进了第二次世界大战中很多武器和通信自动化系统的研制。

第二次世界大战后,学者们总结了武器研制和设计方面的实践经验,陆续出版了基于经典控制理论的专著,建立了较为系统的伺服理论。这对战后的许多实际自动控制过程起到

了重要的指导作用,也为人类进入宇宙空间做出了贡献。

第二次世界大战后到20世纪50年代中期,控制理论又得到了新的发展,出现了根轨迹法、非线性系统的谐波近似法(即描述函数法)、采样控制系统、自寻优控制和部分最优控制、多变量系统、系统灵敏度分析以及动态系统测试等新内容。

概括地说,经典控制理论具有以下特征。

- ① 以单变量线性定常系统为主要研究对象;
- ② 以频率域方法作为研究控制系统动、静态特性的主要技术;
- ③ 以各种图表,如Nichles(尼切莱斯)图、Bode(伯德)图、Nyquist(奈奎斯特)曲线、根轨迹、Routh(劳斯)表作为系统分析和综合的主要技术手段。

2. 现代控制理论

现代控制理论起源于20世纪60年代,形成的标志是:

- 贯穿系统描述、分析与综合全过程的状态空间方法;
- 最优控制中的Pontryagin(庞特里雅金)极大值原理和Bellman(贝尔曼)动态规划;
- 随机系统理论中的Kalman(卡尔曼)滤波。

由此,实现了经典控制理论与现代控制理论的接轨。

较之于经典控制理论,现代控制理论具有以下特征:

(1) 以多变量的线性系统 and 非线性系统为研究对象。近代工业过程和航空、航天等许多领域中的实际系统都是非常复杂的,表现为环节非线性、多变量耦合以及参数时变等现象。这些系统都在现代控制理论的研究之列。例如,作为现代控制理论形成标志之一的Pontryagin极大值原理,就是针对一般的非线性、多变量和参数时变系统提出的。

(2) 以时间域,尤其是状态空间方法为主要方法。现代控制理论通常在时间域上建立系统的状态空间模型,进而进行各种定性、定量的分析以及控制律设计。

(3) 以现代数学理论为主要分析手段。不同于经典控制理论中的复变函数和Laplace变换,现代控制理论以线性代数、矩阵理论、微分方程、Lie代数、现代微分几何等作为主要工具;以往看似与自动控制无缘的一些数学工具,也已经或正在进入控制理论的研究领域。

(4) 以计算机为主要的分析设计工具。在经典控制理论中,由于研究对象相对简单,人们利用图表,通过手工即可完成分析和设计;但在现代控制理论中,这样的做法很难行得通。由于对象相对复杂,分析和设计中的各种计算基本要利用计算机来实现。

控制系统计算机辅助设计(Control System of Computer Aided Design, CSCAD)以计算机为工具,以现代控制理论为依据,已经日趋完善,并在实际中得到了重要应用。计算机用于系统分析设计,在计算方面具备明显的优越性。此外,在计算机上可以修改系统参数,因而能对不同参数组合以及多种控制方案进行充分的分析比较;而借助于计算机的图形显示功能,则可以全面直观地获取系统的动、静态特征。

现代控制理论包括线性系统理论、最优滤波理论、系统辨识、最优控制、自适应控制和非线性系统理论等主要分支。

1) 线性系统理论

线性系统分析与设计的理论和方法是现代控制理论的基础,主要研究线性系统的模型描述、变量运动规律以及改变运动规律的可行性与方法,揭示系统结构、参数、行为和性能之间的定性和定量关系。线性系统理论包括系统的模型描述、状态响应、能控性、能观测性、稳

定性、状态反馈、状态观测器、内模原理和鲁棒调节器等内容。

2) 滤波理论

滤波的研究对象是受到外部信号干扰的动力学系统,如由随机微分方程或随机差分方程所描述的随机系统,或受到幅值有界或能量有界(如脉冲)信号干扰的系统。滤波就是利用被干扰信号污染的量测数据,按照某种准则,获得有用信号的最优估计或满足指定要求的估计。Kalman 滤波理论用状态空间法设计的最佳滤波器,实用性强且可适用于非平稳过程,是滤波理论的一大突破。 H_{∞} 滤波方法在干扰信号能量有界的前提下可以获得有用信号的最优或次优(即满足给定要求)估计,无需干扰信号的振型、测量值、变化率或均值方差等具体信息,适用面广。

3) 系统辨识

建立系统的数学模型既是系统研究的一个独立模块,又是广义的系统分析的一部分,是系统研究的基础性工作。很多情况下,由于各种条件的限制,根据系统机理建立系统模型并非总能奏效。例如,化工过程中的物理学规律不像力学和电磁学系统那么明确,因而机理建模难以执行。即便是力学和电磁学系统,由于间隙、滞环、饱和、死区等非线性特性和磁场分布不均匀等客观因素,机理建模客观上也可能存在较大误差。

系统辨识就是在系统的输入-输出的实验数据的基础上,按照某种原则确定出一个最符合实验数据的系统模型。若模型的结构形式已知但某些参数未知,则只需用输入-输出的量测值来确定其参数,称为参数估计;而同时确定模型结构形式和参数的则称为系统辨识。

4) 最优控制

实用的控制方法,往往一方面要求某些性能指标满足给定要求或达到最优,同时对控制量本身也有幅值和能量等约束。最优控制就是在给定限制条件和性能指标下,寻找使系统性能在一定意义下为最优的控制规律。这里所说的“限制条件”是指物理上对系统所施加的一些限制;而“性能指标”是为评价系统的优劣而规定的标准。在解决最优控制问题中,Pontryagin 极大值原理和 Bellman 动态规划法是两种具有代表性的方法,它们以不同的形式给出了最优控制所必须满足的条件。

5) 自适应控制

自适应控制是指随时修正系统的数学模型并在线调整系统的控制律。当被控对象内部的结构和参数以及外部的环境存在不确定干扰时,系统能对有关信息实现在线测量和处理,从而不断地修正系统结构的有关参数和控制增益,使之处于所要求的最优状态或满足设计要求。

常用的自适应控制方案有编程控制、模型参考自适应和自校正控制,其中以自校正自适应最具代表性。自适应控制理论的进一步发展是自学习、自组织系统理论。

自适应控制要求与之匹配的在线计算能力,是计算水平决定控制水平的鲜活例证。

6) 非线性系统理论

主要研究非线性系统的运动规律和改变运动规律的方法,主要包括相对阶、稳定性、线性化、解耦以及反馈控制、状态估计等理论。

非线性系统理论的核心思想,本质上是各种各样的线性化。

3. 多样化发展时期

在 20 世纪 60 年代末和 70 年代,控制理论进入了多样化发展时期,出现了多变量系统

频域控制理论,以及 Zadeh 等人提出的模糊控制理论、大系统理论和智能控制理论。

大系统有多种含义,通常是指规模庞大、结构复杂、变量众多的信息与控制系统,涉及生产过程、交通运输、计划管理、空间技术等方面的控制与信息化处理问题。

智能控制是模仿某些智能行为进行控制参数整定或决策的方法,如遗传算法、蚁群算法、粒子群算法、神经网络等。

近年来,自动控制理论及其应用的范围在继续深化和扩大,为适应实践需求而产生的新思想、新方法发展迅速,各学科之间渗透融合的趋势不断加强。

0.3 本书的内容安排

本书第1章讨论状态空间描述的基本概念、建立方法和基本性质。这些是状态空间法的基础。

第2章讨论线性控制系统的定量分析,就连续和离散两种情形,建立了系统状态响应的一般表达式。

第3章讨论能控性和能观测性,属于在线性系统理论中最为基本的概念。这一章将给出能控和能观测的定义以及判别方法,进一步揭示系统的状态空间描述和传递函数矩阵描述的关系。

第4章讨论 Lyapunov 稳定性理论。包括 Lyapunov 第一方法、Lyapunov 第二方法、Lyapunov 方程等概念和内容。

第5章讨论线性系统的综合问题。包括极点配置、镇定(稳定化)、解耦控制、跟踪控制、线性二次型最优控制、状态观测器等内容。

第6章就状态空间模型、状态响应、能控能观测、稳定性、控制律设计等内容,对离散控制系统特别是离散线性控制系统进行了有重点的讨论。

控制系统的状态空间描述

控制系统的时间域理论,是指以时间域数学模型为系统描述的、直接在时间域内进行系统分析与综合的理论方法。

在系统和控制理论发展的早期阶段,时间域理论只能用来分析单输入-单输出系统的运动,系统的描述是反映输入-输出关系的单变量高阶微分方程,分析的方面主要限于运动的稳定性。

20世纪60年代以后,卡尔曼将状态和状态空间的概念方法引入系统和控制理论,极大地推动了时间域理论的发展,使之既适用于单输入-单输出系统,又适用于多输入-单输出系统,既能处理定常系统,又能处理时变系统;既能用于系统分析,又能用于系统综合。这一理论采用状态空间描述作为系统的数学模型,并以状态空间方法为核心。

本章讨论建立控制系统状态空间描述的问题。包括状态和状态空间的概念、性质,状态空间描述的组成和形式,状态空间描述的建立方法,状态空间描述和传统的输入-输出描述的关系,状态空间描述在可逆变换下的特性等内容。

1.1 系统描述中的基本概念

当我们认知一个系统的时候,可以考虑把有关的全部物理量分为**信号**(电压、速度、温度、压力、人口、产值等)和**参数**(电容、质量、弹性系数、比热、出生率、利率等)两大类。这里的信号和参数都是广义的。信号通常是随时间变化的,是系统的动态信息,是研究者关注的重点;参数则相对不变或变化不大,基本属于系统的静态信息,是系统结构的细节描述,而结构决定了系统功能。虽然二者之间没有绝对的界线,但这样的划分对我们理解系统是有帮助的。

输入 外部施加在系统上的激励信号称为输入,包括干扰输入(负载、风速、电压波动、噪声等)和为了改变系统运动而施加的控制输入。

注意,这里的输入不是系统的设定值(给定量、参据量)。

输出 来自系统的信号称为输出。能从外部测量到的输出,称为量测输出(可测输出);被期望按照一定性能跟随某个信号(设定值)的输出,称为被控输出(评价输出)。

通常情况下,被控输出本身往往也是量测输出;但在无传感器控制的场合,二者是不同的。

输入是环境对系统的作用,而输出是系统对环境的作用;二者都是系统的外部变量。

松弛 在时间区间 $[t_0, +\infty)$ 上,若系统的输出只由输入唯一确定,则称系统在 t_0 时刻是松弛的。

从能量的观点看,系统在 t_0 时刻是松弛的意味着系统在 t_0 时刻不存储能量;若松弛性不成立,则输出不仅和输入有关,还和系统初始条件有关。

同输入影响系统输出一样,不满足松弛条件的系统,即便没有输入,也会存在由初始条

件产生的输出。输入和初始条件引起的输出变化,都是自动控制的研究内容。

因果 对于任意时刻 t ,若系统在 t 时刻的输出仅取决于 t 时刻和 t 之前的输入,而与 t 时刻之后的输入无关,则称系统是因果的,或说满足因果关系。

不具有因果性的系统,能够预测 t 时刻之后的输入,并施加于系统而影响其输出。例子之一是离散的奇异控制系统。

图 1.1.1 所示的动态系统是由一些相互制约的部分构成的整体。矩形框以外的部分为系统环境。输入和输出分别用 $u_1(t), \dots, u_p(t)$ 和 $y_1(t), \dots, y_q(t)$ 来表示。

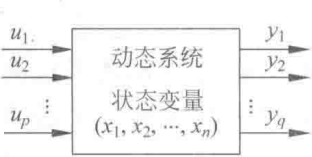


图 1.1.1 动态系统

可以想象,系统内部必然也存在一些信号(如后续会提到的状态变量)。这些内部信号和外部的输入输出同时随着时间而变化,体现了系统的运动。系统的数学描述就是反映系统信号之间的定性、定量关系的数学模型。

系统的数学描述可区分为两种基本类型:输入-输出描述和状态空间描述。

输入-输出描述把系统视为一个黑箱,不涉及系统内部的信号,只反映系统外部的输入、输出之间的因果关系。

如果系统是线性的、定常的、单输入、单输出的,那么其输入-输出描述可以表示为如下的一个线性常系数高阶微分方程:

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) \\ &= b_mu^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1u^{(1)}(t) + b_0u(t) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

在系统的零初始条件下,对方程(1.1.1)取 Laplace 变换,得到系统的传递函数

$$g(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \tag{1.1.2}$$

从后续章节的分析中将会看到:在系统零点和极点重合的情况下,输入-输出描述有可能无法反映系统内部的某些部分,因而总体上属于对系统的一种不完全描述;而状态空间描述能够表达系统的一切特性,是对系统的完全描述;只有当系统满足一定条件时,两种描述才可能等价。这表明,在建模准确度方面,状态空间描述优于输入-输出描述。

1.2 状态空间描述的基本概念

状态和状态空间的概念,在质点和刚体动力学中得到了广泛的应用;在被引入系统和控制理论领域后,状态和状态空间有了更为一般的含义。下面结合几个例子,给出系统状态空间描述的基本概念。

【例 1.2.1】 考虑一个由如下方程

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C(t) \\ \dot{i}_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} u_C(t) - \frac{R_1}{(R_1 + R_2)C} i_L(t) + \frac{1}{(R_1 + R_2)C} e(t) \\ -\frac{R_1}{(R_1 + R_2)L} u_C(t) - \frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2)L} i_L(t) + \frac{R_2}{(R_1 + R_2)L} e(t) \end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$

$$u_{R_2}(t) = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} u_C(t) - \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} i_L(t) + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t) \tag{1.2.2}$$

描述的某 RLC 电路。其中,电源电压 $e(t)$ 为输入,输出取为端电压 $u_{R_2}(t)$ 。

【例 1.2.2】考虑一个 BUCK 变换器的平均模型描述

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_c(t) \\ \dot{i}_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C}i_L(t) - \frac{1}{RC}u_c(t) \\ -\frac{1}{L}u_c(t) + \frac{1}{L}d(t)e(t) \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

其中,输入电压 $e(t)$ 存在波动,视为干扰输入; $d(t)$ 表示占空比,为控制输入;输出为电压 $u_c(t)$ 。

【例 1.2.3】考虑面装式永磁同步直线电机的模型描述

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d(t) \\ \dot{i}_q(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L}i_d(t) + \frac{\pi}{\tau}v(t)i_q(t) + \frac{1}{L}u_d(t) \\ -\frac{\pi}{\tau}v(t)i_d(t) - \frac{R_s}{L}i_q(t) - \frac{\pi\phi_f}{\tau L}v(t) + \frac{1}{L}u_q(t) \\ \frac{3\pi n_p\phi_f}{2\tau M}i(t)_q - \frac{B_v}{M}v(t) - \frac{F_0(t)}{M} \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

其中,信号方面, u_d 、 u_q 为 d 、 q 轴电压,也是系统的控制输入; i_d 、 i_q 为 d 、 q 轴电流; v 为动子线速度。参数方面, $F_0(t)$ 表示负载阻力,为干扰输入; L 为电感; R_s 为定子电阻; ϕ_f 为永磁体在定子绕组直轴上的磁链分量; τ 为极距; n_p 为极对数; M 为动子质量; B_v 为黏滞摩擦系数。

如果考虑位置调节,还要增加方程

$$\dot{s}(t) = v(t) \quad (1.2.5)$$

s 为动子线位移。

【例 1.2.4】考虑某区域的人口分布描述

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\gamma)((1-\alpha)x_1(k) + \beta x_2(k)) \\ (1+\gamma)(\alpha x_1(k) + (1-\beta)x_2(k)) \end{bmatrix} \quad (1.2.6)$$

其中, $x_1(k)$ 为城市人口, $x_2(k)$ 为农村人口; 每年由城市迁往农村的人口占上一年城市人口的比例为 α , 由农村迁往城市的人口占上一年农村人口的比例为 β , 总的人口自然增长率为 γ 。

这里的 α 、 β 和 γ , 既可视作系统参数, 也可以作为系统的控制输入, 取决于具体的问题。在传染性疾病等模型的描述中, 也有类似的情况。

对于一般的动力学系统, 有如下概念。

静态信息 系统的结构和参数。

动态信息 系统自身全部信号在任意时刻的数值。

状态变量 能够完全表示系统动态信息的最少一组信号。如例 1.2.1 和例 1.2.2 中的 $i_L(t)$ 和 $u_c(t)$, 例 1.2.3 中的 $i_d(t)$ 、 $i_q(t)$ 和 $v(t)$, 例 1.2.4 中的 $x_1(k)$ 和 $x_2(k)$ 。

这里的“完全表示”可以形象地理解为: 系统自身(或说系统内部)的任意一个信号, 都能表示为以状态变量为“自变量”的“代数函数”, 可能是一元函数, 也可能是多元函数。因此, 我们说状态变量是完备的。

状态变量之间是独立的: 每个状态变量都不能表示为其他状态变量的代数函数, 否则就会出现冗余的情况, 和定义中“最少”的提法相违背。

需要指出, 上述“独立”并非毫无关系。比如位移和速度, 是积分和微分的关系, 但可以

同时作为状态变量,因为二者都不能表示为对方的代数函数。

由于系统的静态信息相对不变,把握了状态变量,就把握了系统的全部动态信息,进而也就把握了整个系统。因此,研究状态变量对于研究系统运动能起到纲举目张的作用。从这个意义上说,状态变量有时用来代表整个系统。

状态变量的个数 n 称为系统的阶次,即一个阶次对应一个状态变量。阶次同时也是系统的结构信息,虽然可由状态变量个数来表示,但本质上与状态变量的选取无关。

对于来自机电领域等物理意义明确的系统,一个储能元件对应一个状态变量。当储能元件的惯性(机械惯性、电磁惯性等)可以忽略时,系统的阶次也就随之降低。例如,作为直流电动机的测速发动机,转子的转动惯量和电枢电感都很小,可以忽略不计。于是,测速发动机就从 2 阶的动态系统简化为静态的比例环节,阶次变为 0。

一个惯性环节对应一个状态变量,一个振荡环节包含两个储能元件,对应两个状态变量。

一个积分环节对应一个状态变量。积分环节的电路实现中,包含储能元件。积分和储能,不是瞬间完成的,都需要时间过程。

微分环节,不论几阶微分,都不对应状态变量。从动力学模型的角度看,微分环节的阶次是 0。微分是一个瞬时的概念,不依赖于时间过程。

时滞环节在离散时间系统建模中有时可以被定位为动力学行为,对应状态变量。

状态变量通常取为物理含义直观的信号,如电压、速度、温度、压力、产值等,这样便于理解系统的数学模型,也为状态变量的测量提供了物质基础。但这并非全部,有时为了便于对基于简化的或特定结构的数学模型进行分析和设计,状态变量可能会因此而变得抽象,物理含义不再直观。按照某种原则保持系统输入-输出关系的模型降阶就会导致这种情况。也可参考本书 1.4 节中的式(1.4.45)和式(1.4.55)。

状态变量的含义,直观也好,抽象也罢,都是为了总体上分析设计的简便。

状态向量 以状态变量中全部信号 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 为分量的列向量 $\mathbf{x}(t)$ 。在例 1.2.3 中,状态向量就是 $[i_d(t) \ i_q(t) \ v(t)]^T$ 。

后续会看到,对于同一系统,状态向量的选取不是唯一的,因而状态向量也是多样的;同时,不同状态向量之间是等价的:在两个不同的状态向量之间,必存在一个可逆的线性或非线性的变换。

输入向量 以输入变量中全部信号 $u_1(t), \dots, u_p(t)$ 为分量的列向量 $\mathbf{u}(t)$ 。在例 1.2.3 中,输入向量就是 $[u_d(t) \ u_q(t)]^T$; 在例 1.2.1 和例 1.2.2 中,输入 $e(t)$ 是标量。

输出向量 以输出变量中全部信号 $y_1(t), \dots, y_q(t)$ 为分量的列向量 $\mathbf{y}(t)$ 。例 1.2.3 中, i_d, i_q, v 和 s 都可以是输出,组成输出向量。

状态空间 以状态向量分量 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 为基底的 n 向量空间。

状态轨迹 系统在每一时刻 t 的状态,表现为状态空间中以 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 为坐标的一点;随着时间变化,系统状态在空间中描绘出一条轨迹,称为状态轨迹(状态轨线)。

状态方程 描述系统内部的状态变量 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 和外部的输入变量 $u_1(t), \dots, u_p(t)$ 之间关系的一阶微分方程组(连续系统)或一阶差分方程组(离散系统),称为系统的状态方程。一般形式为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (1.2.7)$$