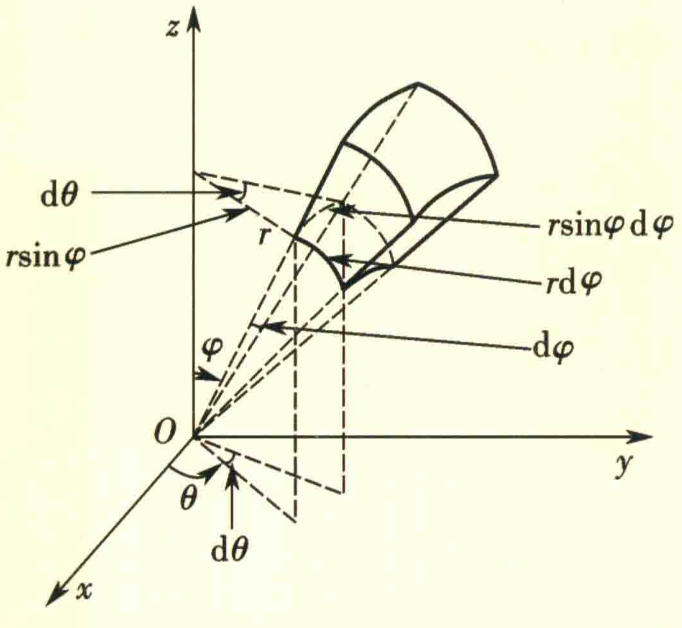
高等数学

GAO DENG SHU XUE

（下册）

文华艳　唐定云　**主编**



南開大學出版社

高等数学

（下册）

主　编　文华艳　唐定云
副主编　吴明科　郑金梅
参　编　张媛媛

南开大学出版社
天　津

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 文华艳，唐定云主编. — 天津：南开大学出版社，2018.1

ISBN 978-7-310-05535-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①文… ②唐… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 317033 号

南开大学出版社出版发行

出版人:刘运峰

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200

*

天津午阳印刷有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷

260×185 毫米 16 开本 11 印张 246 千字

定价:34.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

前　言

本教材是根据三本应用型工科院校的教学要求，在多年教学实践的基础上，并配合我院关于高等数学模块化教学改革编写而成的．教材在编写上突出了数学知识的系统性、简洁性、实用性，同时注重概念产生的背景，强调应用数学的意识．

全书分上、下两册．上册包括一元函数的微积分，下册包括向量与空间解析几何，多元函数微积分、级数、微分方程．在章节设计上，为了体现微积分在专业领域的应用，在教材的最后设有知识点的应用模块，包含了函数与极限应用模块，导数与微分的应用模块，极值应用模块，定积分的应用模块，多元函数微分学应用模块，重积分应用模块，线面积分应用模块，微分方程应用模块等内容．

本教材由西南科技大学城市学院数学教研室组织编写，文华艳，唐定云为主编，吴明科、郑金梅为副主编，张媛媛参与编写，唐定云同时负责教材的主审．

限于编者水平，以及各专业对工科学生提出的不同要求，因而教材在内容的取舍和安排上还存在不妥之处，希望读者提出批评和指正．

编　者

2017.8

目　　录

第八章　向量与空间解析几何

利用数形结合的思想将图形与方程相对应,从而能够用代数研究几何问题. 这样便产生了解析几何. 向量是一个兼具“数”和“形”的工具,因此它在解析几何中有广泛的应用.

本章首先建立空间直角坐标系,引进向量的概念和一些运算,然后利用向量的运算建立空间的平面和直线方程,最后讨论空间曲线和曲面的一般方程以及二次曲面的几何特性.

第一节　向量代数

一、空间直角坐标系及向量的概念

定义 1　在空间中,有三条交于一点(原点 O)的两两垂直的数轴,依次称为 x 轴、y 轴、z 轴,其方向符合右手规则:用右手握住 z 轴,当四指从 x 轴方向以$\dfrac{\pi}{2}$角度弯向 y 轴时,拇指伸直的方向与 z 轴方向一致. 这样的三条数轴构成了空间直角坐标系(见图 8.1),三条数轴中任意两条确定的平面称为坐标面,如 x 轴及 y 轴确定的平面叫 xOy 面,y 轴及 z 轴和 z 轴及 x 轴所确定的平面分别叫作 yOz 面及 zOx 面.

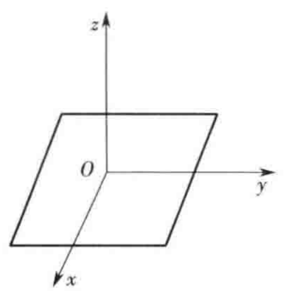


图 8.1

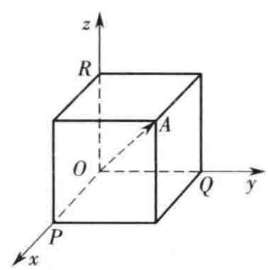


图 8.2

定义 2　在空间直角坐标系中有一点 A,过 A 向三条数轴作垂直平面,交点依次为 P,Q,R(见图 8.2). 设这三个交点在坐标轴上的坐标分别为 x,y,z,则称 (x,y,z) 为空间点 A 的坐标.

定义 3　在空间直角坐标系中有两点 A,B,称由 A 到 B 的有向线段为空间向量,记为$\overrightarrow{AB}$或 $\boldsymbol{a}$. 其中 A 为$\overrightarrow{AB}$的起点,B 为$\overrightarrow{AB}$的终点,线段的长度称为$\overrightarrow{AB}$的模,记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$;有向线段的方向称为向量的方向. 模为 1 的向量称为单位向量,通常记为 $\boldsymbol{e}$;模为 0 的向量称为零向量,记为 $\mathbf{0}$.

向量实际上是既有大小(即模)又有方向的量. 在物理学上有很多量均为向量,如力、速

度、加速度等.

在很多讨论向量的场合,常和向量的起点无关. 对于起点不在坐标原点的向量,都可以相等地平移到起点为原点的向量,于是下面仅仅定义起点在原点的向量坐标.

定义 4 设空间向量$\overrightarrow{AB}$,起点 A 与原点 O 重合,且 $B(x,y,z)$,则称(x,y,z)为向量$\overrightarrow{AB}$的坐标,记为$\overrightarrow{AB}=(x,y,z)$.

二、向量的运算

1. 线性运算

为讨论方便,以下所提向量,若无特殊说明,均为以原点为起点的空间向量.

定义 5 设任意向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$,则以下运算都称为线性运算:

(1)加法:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$.

(2)数乘:$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x_1,y_1,z_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$.

向量的加法运算符合平行四边形法则及三角形法则(见图 8.3). 向量的减法可以转化为加法,即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

其中$(-\boldsymbol{b})$为 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量(即与 $\boldsymbol{b}$ 模相等,方向相反的向量).

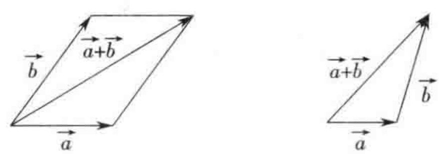


图 8.3

利用减法运算可定义起点不在原点的向量的坐标. 设 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$,则向量

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

设$\overrightarrow{AB}=(x,y,z)$,则由向量的线性运算可得

$$\overrightarrow{AB}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

其中 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ 分别为与坐标轴同向的单位向量.

2. 数量积

定义 6 设向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,称实数

$$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>,$$

为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积或内积,记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 其中 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

在物理学中,数量积可以表示很多量,如常力沿直线所做的功(见图 8.4).

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cdot\cos<\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}>.$$

由数量积的定义可得以下运算性质:

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$;

(2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(3)非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,有 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;

(4)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$;

(5)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

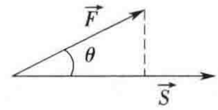


图 8.4

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$,则有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

3. 向量积

定义 7　设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,向量 $\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的方向满足右手规则,而

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>,$$

则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的向量积或外积,记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$(见图 8.5).

由向量积的定义可以得到:

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(2)任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(3)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

(4)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

(5)$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

(6)$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$.

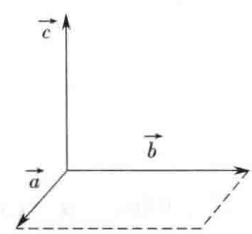


图 8.5

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$,则由向量积的运算性质有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(y_1z_2-z_1y_2)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

为了方便记忆,上式可表为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}.$$

三、向量间的关系

向量之间有相等、垂直、平行等特殊关系.

如果两个向量的模相等、方向相同,则两个向量相等.

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$,则有

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2,\\y_1=y_2,\\z_1=z_2.\end{cases}$$

$$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2},$$

其中分式为形式分式,当分母不为0时,和通常分式的意义相同.当分母等于0时,规定分子同时取0,例如分式

$$\frac{x_1}{0}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2},\text{其中 } y_2, z_2 \neq 0,$$

其等价于 $x_1=0$ 并且$\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

如果 $\boldsymbol{a} \neq 0, \boldsymbol{b} \neq 0$,则

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow x_1 x_2+y_1 y_2+z_1 z_2=0.$$

四、向量的模、方向角

1. 向量模的计算

设 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$,则由勾股定理可得空间两点距离公式

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

设空间向量 $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$,则有 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,其中 $O(0,0,0), A(x, y, z)$,由两点距离公式可以得到向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的计算公式

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

2. 方向角与方向余弦

定义8 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴的夹角 α, β, γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,方向角的余弦称为方向余弦.

设 $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$,不妨设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,其中 $O(0,0,0), A(x, y, z)$,则其方向余弦为

$$\cos \alpha=\frac{x}{|OA|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

同理可得

$$\cos \beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos \gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

显然有

$$\cos^2 \alpha+\cos^2 \beta+\cos^2 \gamma=1.$$

习题 8 - 1

1. 在 yOz 面上,求与三个已知点 $A(3,1,2), B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.
2. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$,它在 x 轴,y 轴和 z 轴上的投影依次为 $4,-4,7$,求

这向量的起点 A 的坐标.

3. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

4. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问 λ 与 μ 具有怎样的关系，才能使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直？

5. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两垂直，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=3$，求 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的长度及它和 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的夹角.

第二节　空间平面

在平面解析几何中，由不同的方式可以得到不同的直线方程. 对空间平面来讲也一样.

一、空间平面的方程

1. 平面的点法式方程

定义 1　垂直于平面的非零向量称为该平面的法向量，通常记为 $\boldsymbol{n}$.

由平面经过一点，且给定平面的一个法向量，则该平面被唯一确定，下面将用平面的法向量坐标确定平面方程.

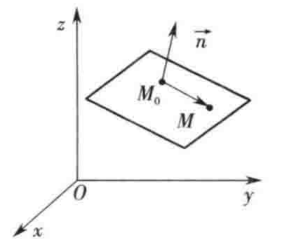


图 8.6

定理 1　设平面 π 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为其一个法向量（见图 8.6），则平面 π 的方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{8-1}$$

证明　设 $\forall M(x,y,z)\in\pi$，则 $\overrightarrow{M_0M}\perp\boldsymbol{n}$，所以

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

而 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，故有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

方程(8-1)称为平面的点法式方程.

例 1　求过点 $M(0,-2,3)$，且以 $\boldsymbol{n}=(1,2,-3)$ 为法向量的平面方程.

解　由点法式方程有

$$1(x-0)+2(y+2)-3(z-3)=0,$$

即
$$x+2y-3z+13=0.$$

2. 平面的一般方程

方程(8-1)可以化简为下面形式的方程

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{8-2}$$

称其为平面 π 的一般方程,其中 A,B,C 不全为零,且 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$. 从下面这个定理可以看出三元一次方程与平面一般方程的关系.

定理 2 任意平面都可以用三元一次方程表示;反之任意三元一次方程都可以表示一个平面.

证明 仅证结论的第二部分. 设任意三元一次方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

且(x_0,y_0,z_0)为其一个解,则有

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$$

两式相减得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

这个方程表示过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,以 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为法向量的平面. 显然它与(8-2)式是等价的,所以 $Ax+By+Cz+D=0$ 表示平面.

在一般方程中,若系数 A,B,C 取某些特殊值,则方程表示的平面也是特殊的.

定理 3 设平面 π:$Ax+By+Cz+D=0$(A,B,C 不全为零),则

(1)$D=0$ 当且仅当$(0,0,0)\in\pi$;

(2)$A=0$ 当且仅当 $\pi/\!/ x$ 轴或 x 轴在 π 上;

(3)$A=B=0$ 当且仅当 z 轴 $\perp\pi$.

例 2 已知平面通过 y 轴,且过点$(4,-1,2)$,求平面方程.

解 设过 y 轴的平面为

$$Ax+Cz=0.$$

因点$(4,-1,2)$在平面上,则

$$4A+2C=0,$$

解得 $C=-2A$. 代入所设方程,得平面方程

$$x-2z=0.$$

3. 平面的截距式方程

设平面 π 过三点 $P(a,0,0)$,$Q(0,b,0)$,$R(0,0,c)$(见图 8.7),其中 a,b,c 均不为零,平面 π 的方程可设为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

将三点的坐标代入方程,有

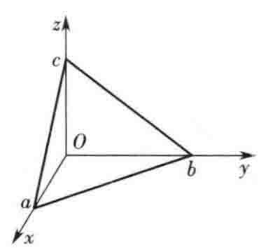


图 8.7

$$\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0. \end{cases}$$

得 $A = -\dfrac{D}{a}, B = -\dfrac{D}{b}, C = -\dfrac{D}{c}$. 代入一般方程可得

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

该方程称为平面的截距式方程,其中 a,b,c 分别称为平面在 x,y,z 轴上的截距.

二、平面间的关系

1. 平面间的位置关系

设两平面

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$
$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0;$$

则其法向量分别为:$\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$,$\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$,则有

(1)π_1 平行或重合 $\pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$;

(2)$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

2. 两平面的夹角

两平面法向量的夹角(指小于或等于$\dfrac{\pi}{2}$的角)称为两平面的夹角.

设两平面的法向量分别为:$\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$,$\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$,两平面的夹角 θ 的余弦公式为

$$\cos\theta = |\cos < \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 >| = \left| \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} \right|.$$

例 3　已知平面过两点 $M_1(1,1,1)$,$M_2(0,1,-1)$,且垂直于平面 $x+y+z=0$,求该平面的方程.

解　设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$,已知平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_0 = (1,1,1)$,$\overrightarrow{M_1M_2} = (-1,0,-2)$,则有 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}_0$ 以及 $\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$,故可取

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_0 \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = (-2,1,1).$$

故所求平面方程为

$$-2(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0,$$

即

$$2x - y - z = 0.$$

习题 8-2

1. 求通过点$(3,0,-1)$且与平面$3x-7y+5z-12=0$平行的平面方程.

2. 求过三点$(1,1,-1)$,$(-2,-2,2)$及$(1,-1,2)$的平面方程.

3. 求过点$(1,0,-1)$且平行于向量$\boldsymbol{a}=(2,1,1)$和$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$的平面方程.

4. 求与已知平面$2x+y+2z+5=0$平行且与三坐标面所构成的四面体体积为1的平面方程.

第三节 空间直线

一、空间直线的方程

1. 直线的参数方程及对称式方程

定义1 平行于直线的非零向量称为直线的方向向量,通常记为$\boldsymbol{s}$.

显然若直线经过一点,且有一个方向向量,则直线被唯一确定.

定理1 设直线l过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$,$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$为其一个方向向量(见图8.8),则直线l的方程为

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases}$$

或者

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

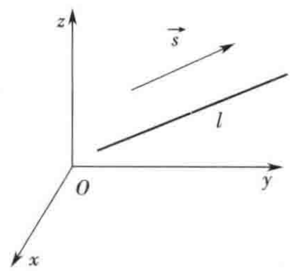


图8.8

证明 设$\forall M(x,y,z)\in l$,则

$$\overrightarrow{M_0M}/\!/\boldsymbol{s}.$$

而$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$,则

$$\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{s},t\in\mathbf{R},$$

即$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=(mt,nt,pt)$,从而有

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases} \tag{8-3}$$

从中消去t,得

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \tag{8-4}$$

其中(8-3)式称为直线的参数方程,(8-4)式称为直线的对称式方程或点向式方程.

例1　求过两点 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2z_2)$ 的直线方程.

解　取直线的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

故所求的直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

2. 直线的一般方程

空间中任意直线 L 均可看作两个相交平面的交线,因此将两个平面的方程联立,即可表示空间直线

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

称这个方程为平面的一般方程.

例2　将直线 L 的方程

$$\begin{cases}x+y+z+1=0,\\2x-y+3z=0.\end{cases}$$

转化为对称式方程.

解　取 $x=1$,解得 $y=-1,z=-1$,所以 $(1,-1,-1)\in L$. 取直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(1,1,1)\times(2,-1,3)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&1\\2&-1&3\end{vmatrix}=(4,-1,-3).$$

故直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{-3}.$$

二、直线间的关系

1. 直线间的位置关系

设两直线 L_1,L_2 的方向向量为:$\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$,$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$,则

(1) $L_1\perp L_2\Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$;

(2) L_1 平行或重合 $L_2\Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1/\!/\boldsymbol{s}_2\Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

2. 直线间的夹角

两直线的方向向量的夹角(指小于或等于$\frac{\pi}{2}$的角)称为两直线的夹角.

设两直线的方向向量分别为:$\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$,$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$,两直线夹角 θ 的余弦公式为

$$\cos\theta=|\cos<\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2>|=\left|\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}\right|.$$

例 3 求经过点(4,0,−2)且平行于直线$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{3}$的直线方程.

解 取直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(4,-1,3)$,则所求的直线方程为

$$\frac{x-4}{4}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z+2}{3}.$$

三、线面间的关系

1. 线面间的位置关系

设直线 $L:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$,平面 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$,则直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$,平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$,所以

(1)$L\perp\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}/\!/\boldsymbol{n}\Leftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$;

(2)$L/\!/\pi$ 或 $L\subseteq\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$.

当 $Am+Bn+Cp\neq0$ 时,L 与 π 相交. 容易得到直线 L 的参数方程:

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\y=y_0+nt,\\z=z_0+pt,\end{cases}\tag{8-5}$$

代入平面方程得

$$(Am+Bn+Cp)t+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$$

解出 $t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}$,代入(8-5)式可得交点坐标.

2. 点到平面的距离

定理 2 设平面 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$,点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$在平面外,则点 P_0 到平面的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

证明 在平面上任取一点 $P(x_1,y_1,z_1)\in\pi$,Q 为 P_0 在 π 上的投影. 那么有 $d=|P_0Q|$,并且

$$d^2=\overrightarrow{PP_0}\cdot\overrightarrow{QP_0},\overrightarrow{QP_0}=\pm d\cdot\boldsymbol{e},$$

其中 $\boldsymbol{e}=\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,$\overrightarrow{PP_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$,因此

$$d = \pm\overrightarrow{PP_0}\cdot \boldsymbol{e} = \pm(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)\cdot\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
$$= \pm\frac{A(x_0-x_1)+B(y_0-y)+C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
$$= \frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
$$= \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3. 线面间的夹角

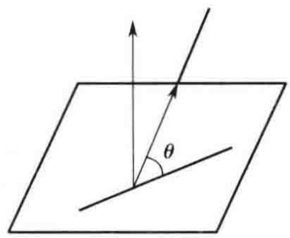


图 8.9

当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影的夹角 $\theta\left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 称为直线与平面的夹角（见图 8.9）. 当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

设直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则直线与平面的夹角 θ 满足

$$\theta=\left|\frac{\pi}{2}-<\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}>\right|,$$

因此 $\sin\theta=|\cos<\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}>|$，则 θ 的正弦计算公式为

$$\sin\theta=\left|\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\right|.$$

例 4　求过点 $(-1,0,4)$ 且平行于平面 $3x-4y+z-1=0$，与直线 $\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 相交的直线方程.

解　过点 $(-1,0,4)$ 且平行于已知平面的平面方程为

$$3(x+1)-4y+(z-4)=0,$$

即 $3x-4y+z-1=0$. 下面求它与已知直线的交点.

设 $\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}=t$，则 $x=-1+4t, y=3+t, z=4+2t$，代入平面方程，有

$$3(-1+4t)-4(3+t)+(4+2t)-1=0,$$

得 $t=\frac{6}{5}$，故交点为 $\left(\frac{19}{5},\frac{21}{5},\frac{32}{5}\right)$. 因此所求直线方程为

$$\frac{x+1}{\frac{19}{5}+1}=\frac{y-0}{\frac{21}{5}-0}=\frac{z-4}{\frac{32}{5}-4},$$

即
$$\frac{x+1}{8}=\frac{y}{7}=\frac{z-4}{4}.$$