普通高等教育“十三五”规划教材

工程数学

QIAO LIANG GONG CHENG

主编◎董冠文　王富强　李晨波

吉林大学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

工程数学

主　编　董冠文　王富强　李晨波
主　审　李自勇

吉林大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

工程数学 / 董冠文，王富强，李晨波主编．—— 长春：
吉林大学出版社，2017．6
ISBN 978-7-5692-0279-3

Ⅰ．①工… Ⅱ．①董… ②王… ③李… Ⅲ．①工程数
学一高等学校一教材 Ⅳ．①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 168503 号

书　　名　工程数学
　　　　　GONGCHENG SHUXUE

作　　者　董冠文　王富强　李晨波　主编
策划编辑　李伟华
责任编辑　李伟华
责任校对　王瑞金
装帧设计　可可工作室
出版发行　吉林大学出版社
社　　址　长春市朝阳区明德路 501 号
邮政编码　130021
发行电话　0431-89580028/29/21
网　　址　http：//www．jlup．com．cn
电子邮箱　jdcbs@jlu．edu．cn
印　　刷　北京楠海印刷厂
开　　本　787×1092　1/16
印　　张　24
字　　数　570 千字
版　　次　2017 年 6 月第 1 版
印　　次　2017 年 6 月第 1 次
书　　号　ISBN 978-7-5692-0279-3
定　　价　48．00 元

前　言

应用型本科和高职高专教育着重培养学生解决实际问题的能力，在我国的高等教育中占有非常重要的地位。然而，应用型本科和高职高专在我国发展的历史都还不长，有许多问题还在探索之中，课程的优化整合就是其中之一。应用型本科和高职高专工科类各专业培养有关工程技术方面的应用型高级技术人才。这种类型的人才既需要懂得工程数学的基本概念和基本理论，更需要掌握工程数学的基本方法和实际应用。应用型本科和高职高专工科各专业需要的数学知识比较多，除高等数学外，还需要线性代数、概率论、复变函数等内容。但是，不可能安排较多的数学课程的课时。因此，许多学校将这些数学知识整合为一门课程——工程数学。本书是一本将线性代数、概率论、复变函数等内容整合到一起的工程数学教材。每个部分都严格把握其广度和深度。凡是重要的基本概念、基本方法不惜篇幅讲透彻。为满足部分学生对数学知识的较高要求，本书对绝大部分定理都给出了严格的证明。丰富的联系实际的实例和例题是本书的最大特色之一。这些内容对学生掌握基本概念和基本方法很有帮助。在知识爆炸和信息量巨大的今天，处理好传统学科和经典内容与新知识和新内容之间的关系是高等教育教学必须面临的问题之一，在保证经典知识和方法能够传授给学生的同时，适当削减学时和整合知识内容是不得不做的事情，本书就是这种思维方法的产物。

全书由李自勇教授主审，由董冠文、王富强、李晨波三名老师担任主编并编写。董冠文负责第一部分线性代数的编写，王富强负责第二部分概率论的编写，李晨波负责第三部分复变函数的编写。限于作者的水平，错误与疏漏之处恐怕难免，深望广大教师和读者提出批评指正。

目 录

第一部分 线性代数

第二部分 概率论与数理统计

第三部分 复变函数

第一部分 线性代数

第1章 行列式

§1.1 若干准备知识

1.1.1 数域

数是数学的一个最基本的概念.我们的讨论就从这里开始.在历史上,数的概念经历了一个长期发展的过程,大体上看,是由自然数到整数、有理数,然后是实数,再到复数.这个过程反映了人们对客观世界的认识的不断深入.按照所研究的问题,我们通常需要明确规定所考虑的数的范围.譬如说,任意两个整数的商不一定是整数,这就是说,把商限制在整数的范围内,除法不是普遍可以做到的,而把商在有理数范围内,只要除数不为零,除法总是可以做的.因此,在数的不同的范围内同一个问题的回答可能是不同的.我们经常会遇到的数的范围有全体有理数、全体实数以及全体复数,它们显然具有一些不同的性质.当然,它们也有很多共同的性质,在代数中经常是将有共同性质的对象统一进行讨论.关于数的加、减、乘、除等运算的性质通常称为数的代数性质.代数所研究的问题主要涉及数的代数性质,这方面的大部分性质是有理数、实数、复数的全体所共有的.有时我们还会碰到一些其它的数的范围,为了方便起见,当我们把这些数当作整体来考虑时,常称它为一个数的集合,简称数集.有些数集也具有与有理数、实数、复数的全体所共有的代数性质.为了在讨论中能够把它们统一起来,我们引入一个一般的概念.

定义 1.1.1 设 P 是某些复数所组成的集合,如果 P 中至少包含两个不同的复数,且 P 对复数的加、减、乘、除四则运算是封闭的,即对 P 内任意两个数 a、b(a 可以等于 b),必有 $a\pm b\in P$,$ab\in P$,且当 $b\neq 0$ 时,$a/b\in P$,则称 P 为一个数域.

数域是一个比较广泛的概念.我们看下面的例子.

例 1.1.1 典型的数域举例:复数域 $\mathbf{C}$;实数域 $\mathbf{R}$;有理数域 $\mathbf{Q}$;Gauss 数域:$Q(i)=\{a+b\cdot i\mid a,b\in Q\}$,其中 $i=\sqrt{-1}$.

例 1.1.2 令 $F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$,则 F 是一个数域.首先,容易看出,F 中至少有两个不同的数(例如,$0=0+0\sqrt{2}\in F$,$1=1+0\sqrt{2}\in F$),且 F 中任意两个数的和、差、积都在 F 中.现设 $c+d\sqrt{2}\neq 0$,那么 $c-d\sqrt{2}\neq 0$,否则在 $d=0$ 的情形下将得出 $c=0$,这与 $c+d\sqrt{2}\neq 0$ 的假设矛盾;在 $d\neq 0$ 的情形下将得出$\sqrt{2}=\frac{c}{d}\in\mathbf{Q}$,这与$\sqrt{2}$是无理数事实矛盾.因此

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}$$
$$=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in F$$

这就证明了 $\boldsymbol{F}$ 是一个数域.

命题 1.1.1 任意数域 P 都包括有理数域 $\mathbf{Q}$.

证明:设 P 为任意一个数域,由定义可知,存在一个元素 $a\in P$,且 $a\neq 0$. 于是

$$0=a-a\in P, 1=\frac{a}{a}\in P$$

进而 $\forall\, m\in\mathbf{Z}, m>0$

$$m=1+1+\cdots\cdots+1\in P$$

最后,$\forall\, m,n\in\mathbf{Z}, m>0, n>0, \frac{m}{n}\in P, -\frac{m}{n}=0-\frac{m}{n}\in P$. 这就证明了 $\mathbf{Q}\subseteq P$. 证毕.

1.1.2 求和号与求积号

在数学教学中常常会碰到若干个数连加和连乘的式子,为了把加法和乘法表达得更简练,我们引进求和号和乘积号.

设给定某个数域 P 上 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,我们使用如下记号:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i \tag{1.1.1}$$

$$a_1a_2\cdots a_n=\prod_{i=1}^{n}a_i \tag{1.1.2}$$

“$\sum$”称为连加号,“$\prod$”称为连乘号,a_i 表示一般项,而连加号和连乘号上下的写法表示 i 的取值由 1 到 n. 例如

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2 \tag{1.1.3}$$

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^{n-i}y^i \tag{1.1.4}$$

$$1\times 3\times\cdots\times(2n-3)\times(2n-1)=\prod_{i=1}^{n}(2\cdot i-1) \tag{1.1.5}$$

引入了记号后,我们先研究一下它们有哪些性质. 容易证明,

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda a_i \tag{1.1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i \tag{1.1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij} \tag{1.1.8}$$

事实上,最后一条性质的证明只需要把各个元素排成如下形状:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2m} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nm} \end{array}$$

分别先按行和列求和,再求总和即可.

最后,再对求和号加几点说明:

(1)在求和表达式中,用什么字母作为求和指标是任意的,如

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{it} = \sum_{j=1}^{n} a_{jt} = a_{1t} + a_{2t} + \cdots + a_{nt}$$

(2) 有时相加的数虽然是用两个指标编号,但是相加的并不是它们的全部,而是指标适合某些条件的那一部分,这时就在连加号下写出指标适合的条件. 例如

$$\sum_{j=2}^{n} \sum_{i<j}^{n} a_{ij} = a_{12} + (a_{13} + a_{23}) + \cdots + (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{(n-1)n})$$

(3)当相加的数是用多个指标编号时,我们可以类似地使用多重连加号. 例如

$$\sum_{i+r=t}^{n} \sum_{j+k=r}^{n} a_i b_j c_k = \sum_{i+j+k=t}^{n} a_i b_j c_k$$

§1.2 二阶与三阶行列式

行列式是一个数,它由一些数字按一定方式排成的阵列所确定. 这个思想早在 1683 年和 1693 年就由日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼茨提出,大约比形成独立体系的矩阵理论要早 160 年. 多年以来,行列式主要出现在线性方程组的讨论中. 在中学代数中,我们学过二元、三元线性方程组,但在生产实际中所遇到的线性方程组,它的未知量往往不止二个或三个. 例如,在生产实际中有这样一个问题:

例 1.2.1 (炼油厂模型) 某石油公司有 5 个炼油厂,每个炼油厂都生产 5 种石油产品:汽油、柴油、煤油、机油、液态石油气. 已知从 1 桶原油中,第一个工厂生产出的汽油、柴油、煤油、机油、液态石油气分别是 30L、24L、18L、12L、9L;第二、三、四、五工厂从 1 桶原油中生产出的这 5 种油分别是 28L、25L、20L、10L、9L;31L、23L、19L、11L、10L;29L、22L、17L、13L、8L;27L、26L、20L、13L、10L. 现在需要 104620L 汽油、88010L 柴油、68660L 煤油、43240L 机油、33690L 液态石油气. 本着节约资源与提高效益的原则,问给这 5 个工厂各安排多少桶原油来生产恰好满足这一需要.

事实上,设给这 5 个工厂各分配 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 桶原油正好能满足需要,由题意可以得到

$$\begin{cases} 30x_1 + 28x_2 + 31x_3 + 29x_4 + 27x_5 = 104620 \\ 24x_1 + 25x_2 + 23x_3 + 22x_4 + 26x_5 = 88010 \\ 18x_1 + 20x_2 + 19x_3 + 17x_4 + 20x_5 = 68660 \\ 12x_1 + 10x_2 + 11x_3 + 13x_4 + 13x_5 = 43240 \\ 9x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 10x_5 = 33690 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

这样问题就转化成了求解方程组了.

方程(1.2.1)是由5个未知量和5个方程构成的线性方程组. 实际上,在大量的工程技术问题中,我们经常遇到的线性方程组要远比方程(1.2.1)复杂. 就未知量个数和方程个数相等的线性方程组来说,一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1.2.2}$$

这里 n 是正整数,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是未知量,$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的系数,$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是常数项. 形如方程组(1.2.2)的线性方程组称为 $n\times n$ 线性方程组. 在求解 $n\times n$ 线性方程组的过程中便产生了行列式的概念. 下面我们先讨论 2×2 与 3×3 这两种比较简单的线性方程组的公式解.

例 1.2.2 探求 2×2 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.2.3}$$

的公式解.

解:用加减消元法,以 a_{22} 乘以方程组的第一式,以 a_{12} 乘以方程组的第二式得

$$\begin{cases} a_{22}a_{11}x_1+a_{22}a_{12}x_2=a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=a_{12}b_2 \end{cases} \tag{1.2.4}$$

在(1.2.4)中,用第一式减去第二式,消去 x_2,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$,则

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

同理,在(1.2.3)式中,以 a_{21} 乘以方程组的第一式,以 a_{11} 乘以方程组的第二式,然后相减消去 x_1,在 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ 的情况下,得

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

这样,对于方程组(1.2.3)在 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ 的情况下,得公式解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2.5}$$

虽然有了公式解,但是看上去比较复杂,不容易记忆. 为此我们引入记号.

若我们定义二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc \tag{1.2.6}$$

这样就可以很方便地将解(1.2.5)表示为:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1.2.7}$$

我们仔细观察用行列式形式表示的公式解(1.2.7),可以发现这样表达的解有一定的规律:

(1)x_1 与 x_2 的分母都是行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,即只需要将原方程组未知量前的系数按原顺序排成一个行列式即可.

(2)x_1 的分子行列式的第一列是原方程组的常数列,第二列由 x_2 的系数构成,因此这个行列式可以看成是将行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中的第一列换成常数列而得到;同时,x_2 的分子行列式可以看成是将行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中的第二列换成常数列而得到.

显然,这样的公式解更容易记忆.我们自然希望用同样的公式来得到 3×3 线性方程组的公式解,乃至 $n\times n$ 线性方程组的公式解.

例 1.2.3 探求 3×3 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.2.8}$$

的公式解.

解:同例 1.2.2 一样,用加减消元法,先从前面两式中消去 x_3,从后两式消去 x_3,得到只含 x_1 与 x_2 的 2×2 的线性方程组,然后再用消元法消去 x_2,就得到

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ &=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3) \end{aligned}$$

若 $D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$,则得到

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3)$$

$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31})$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31})$$

这就是 3×3 线性方程组(1.2.8)的公式解,为了便于记忆,同样引入三阶行列式的概念.

我们定义三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.2.9}$$

这样,我们可以很方便地表示出方程组(1.2.8)的公式解.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

当 $D\neq 0$ 时，方程(1.2.8)的公式解就可以表示为：$x_1=\dfrac{D_1}{D}, x_2=\dfrac{D_2}{D}, x_3=\dfrac{D_3}{D}$.

观察上述公式解，可以看出此解有类似于 2×2 线性方程组公式解的规律.

例 1.2.4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+y_1+z_1=0 \\ 2x_1-5y_1-3z_1=10 \\ 4x_1+8y_1+2z_1=4 \end{cases}$$

解：因为 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}=34\neq 0,\quad D_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}=68$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 10 & -3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}=0,\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 10 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix}=-68$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=2, x_2=\dfrac{D_2}{D}=0, x_3=\dfrac{D_3}{D}=-2$.

通过二阶和三阶行列式，我们就可以把系数行列式不为零的线性方程组(1.2.3)与(1.2.8)的解很简单地表示出来. 于是，我们自然就想，一般的 $n\times n$ 线性方程组(1.2.2)的解能否用 n 阶行列式表示出来？为此，我们首先要定义 n 阶行列式.

§1.3 n 阶行列式

为了给出 n 阶行列式的定义，必须先弄清楚二阶、三阶行列式的结构，为此需要先介绍一下排列的概念.

1.3.1 排列

定义 1.3.1 由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 元排列.

例如，3214 是一个四元排列，324615 是一个 6 元排列. 事实上，n 元排列的总数是

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1=n!.$$

例 1.3.1 由数码 1,2,3 构成的全部 3 元排列共有 $3!=6$ 个，它们是：

$$123, 132, 213, 231, 312, 321.$$

在所有的 n 元排列中，排列 $123\cdots n$ 称为标准排列，它的特点是较大的数码排在较小的数码之后. 而在其他 n 元排列中，都可以找到一个较大的数码排在较小的数码前面. 例如，在排列 321 中，3 排在 2 的前面，2 排在 1 的前面，这样的次序与自然顺序相反，我们称它为反序(或逆序).

定义 1.3.2 在一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果较大的数码排在较小的数码前面，则称这两个数码构成一个反序(或逆序). 一个排列中的全部反序的个数称为这个排列的反序数，记作 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

说明：($N(i_1i_2\cdots i_n)$**的算法**)给定 n 个自然数，按大小顺序排列：

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n$$

现在把它们按任意次序重排，得 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$，这个排列的反序数可用下法计算：先找出排在 i_1 前面的数字有多少，设为 $\tau(i_1)$，然后划去 i_1，再看 i_2 前面未划去的数字有多少，设为 $\tau(i_2)$，然后划去 i_2，再看 i_3 前面未划去的数字有多少，设为 $\tau(i_3)$，然后划去 i_3，…，经过 n 次后，即得

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n) = \tau(i_1) + \tau(i_2) + \cdots + \tau(i_n)$$

例 1.3.2 在排列 2431 中，21，43，41，31 是反序，2431 的反序数就是 4，即 $N(2431)=4$. 而 $N(3421)=5$.

定义 1.3.3 反序数为偶数的排列称为偶排列；反序数为奇数的排列称为奇排列.

例如，排列 2431 为偶排列，排列 3421 为奇排列.

由上例知，排列 2431 与 3421 仅是交换了 2 与 3 的的位置，但它们却一个是偶排列一个是奇排列. 这不是偶然的. 关于排列的奇偶性，有如下基本事实.

我们把一个排列中某两个数码的位置互换，而其余的数码保持不动，就得到一个新的排列，这样的一个变换称为对换.

定理 1.3.1 一次对换改变排列的奇偶性.

证明：情形 1 被对换的两个数码在排列中是相邻的情形.

设原排列为

$$\cdots jk \cdots \tag{1.3.1}$$

经过 j，k 对换变成

$$\cdots kj \cdots \tag{1.3.2}$$

这里“…”表示那些不动的数. 显然，在排列(1.3.1)与(1.3.2)中，j，k 与前后不动的数码构成的反序或顺序都是相同的，不同的只是 j 与 k 的次序变了. 若原来构成反序，经过对换后，则 k 与 j 不构成反序，这样排列(1.3.2)比排列(1.3.1)的反序数少 1. 反之，则排列(1.3.2)比(1.3.1)的反序数多 1. 无论是减少 1 还是增加 1，排列的奇偶性都发生改变.

情形 2 被对换的两个数码在排列中不相邻的情形.

设原排列为

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots \tag{1.3.3}$$

对换 j 与 k，得到新的排列

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots \tag{1.3.4}$$

不难看出，这样一个不相邻的两个数码的对换可以通过若干个相邻的两个数码的对换来实现. 从(1.3.3)出发，将 k 与 i_s 对换，再与 i_{s-1} 对换，…，与 i_1 对换，最后与 j 对换，共经过 $s+1$ 次相邻数码的对换，排列(1.3.3)变成

$$\cdots k j i_1 i_2 \cdots i_s \cdots \tag{1.3.5}$$

再从(1.3.5)出发，把 j 与 $i_1, i_2, \cdots, i_s$ 一个一个地对换，共经过 s 次相邻数码的对换，排列(1.3.5)就变成了排列(1.3.4). 因此，j 与 k 的直接对换可经过 $2s+1$ 次相邻数码的对换来实现. 由于 $2s+1$ 是奇数，根据情形 1，排列(1.3.3)与(1.3.4)的奇偶性不同. 证毕.

推论 1.3.1 奇数次对换改变排列的奇偶性，偶数次对换不改变排列的奇偶性.

定理 1.3.2 在全部 $n(n \geq 2)$ 元排列中，奇偶排列的个数相等，各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明:设在这 $n!$ 个 n 元排列中,有 p 个互不相同的奇排列,有 q 个互不相同的偶排列,则有 $p+q=n!$. 对这 p 个互不相同的奇排列都施行同一个对换(例如都对换数码 1 和 2),则由定理 1,得到 p 个互不相同的偶排列,而偶排列只有 q 个,所以 $p\leq q$. 同理,对这 q 个互不相同的偶排列都施行同一个对换,得到 q 个互不相同的偶排列,于是,$q\leq p$. 因此,$p=q=\frac{n!}{2}$. 证毕.

定理 1.3.3 由数码 $1,2,\cdots,n$ 构成的任意一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 都可以经过若干次对换变成标准排列,并且所作对换的次数与 $N(i_1i_2\cdots i_n)$ 有相同的奇偶性.

证明:对排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 讲,若 $i_1\neq 1$ 时,对换 i_1 与 1 得到新排列 $1j_2j_3\cdots j_n$,这里 $j_2j_3\cdots j_n$ 是数码 $2,3,\cdots,n$ 构成的排列. 若 $j_2\neq 2$,对换 j_2 与 2 得到新排列 $12k_3\cdots k_n$,这里 $k_3k_4\cdots k_n$ 是数码 $3,4,\cdots,n$ 构成的排列. 因 n 是有限数,如此下去,排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 就变成了标准排列 $1,2,\cdots,n$.

若 $i_1i_2\cdots i_n$ 是偶排列,则所作的对换次数一定是偶数,因为标准排列 $1,2,\cdots,n$ 也是偶排列.

若 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇排列,则所作的对换次数一定是奇数,因为将 $i_1i_2\cdots i_n$ 对换成 $1,2,\cdots,n$ 时,改变了排列的奇偶性. 证毕.

1.3.2 n 阶行列式的定义

我们现在来给出 n 阶行列式的定义. 在给出定义之前,先来回顾一下二、三阶行列式的定义. 我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.3.6}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.3.7}$$

从二、三阶行列式的定义中可以看出,它们都是一些乘积的代数和,而每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同的列的元素构成的,并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成. 在 $n=2$ 时,由不同行不同列的元素构成的乘积只有 $a_{11}a_{22}$ 与 $a_{12}a_{21}$ 这两项,正好是全部 2 元排列的个数,在 $n=3$ 时,由不同行不同列的元素构成的乘积只有(1.3.7)中的 6 项,正好是全部 3 元排列的个数,这是二、三阶行列式的特征的一方面. 另一方面,每一项乘积都带有符号,不是正号就是负号,它们是根据什么规律确定的? 可以看出,每项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号是由排列 $j_1j_2j_3$ 的奇偶性来确定的,所带的符号为 $(-1)^{N(j_1j_2j_3)}$. 于是,二、三阶行列式的定义可以改写为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum\nolimits_{j_1j_2}(-1)^{N(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2} \tag{1.3.8}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum\nolimits_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1.3.9}$$

下面我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.3.4 n 阶行列式指的是数学记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.3.10}$$

它表示 $n!$ 项的代数和，每一项是一切可能的取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前面带有的符号为 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.3.11}$$

这里 $\sum_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是对由数码 $1,2,\cdots,n$ 构成的所有 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

例 1.3.3 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解：由定义 1.3.4 知

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}+a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}+a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\ &\quad +a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}+a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \\ &\quad -a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} \\ &\quad -a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} \end{aligned}$$

例 1.3.4 计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解：观察行列式易知，D 的展开式中一般项是 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，且这个行列式的第 n 行中除 a_{nn} 外，其余的元素都是零，所以在一般项中当 $j_n\neq n$ 时都为零，因而只需要考虑 $j_n=n$ 的那些项即可. 再看第 $n-1$ 行，这一行除 $a_{n-1,n-1}$，$a_{n-1,n}$ 外，其余的元素都是零，但因 $j_{n-1}\neq n$，所以只需要考虑 $j_{n-1}=n-1$ 的那一项即可. 依次这样做下去，在 D 的展开式中除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项，其余项全是零. 又 $N(12\cdots n)=0$，所以 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

与例 1.3.4 同样处理，很容易得到下面的结论.