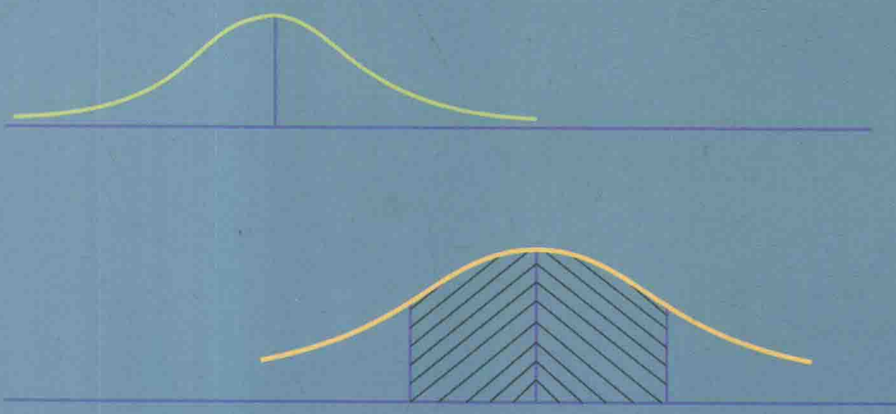
高等学校数学类“十三五”规划教材

西安电子科技大学立项教材

高等数学学习辅导

Advanced Mathematics Study Guidance



张卓奎　陈慧婵　李菊娥　任春丽　编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校数学类“十三五”规划教材
西安电子科技大学立项教材

高等数学学习辅导

张卓奎　陈慧婵　李菊娥　任春丽　编著

西安电子科技大学出版社

内容简介

本书是根据高等院校各专业对"高等数学"的学习、复习及应试要求而编写的。本书主要内容包括函数与极限及连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、二重积分、常微分方程、无穷级数、向量代数与空间解析几何及多元函数微分学在几何上的应用、多元函数积分学及其应用。

本书各章节均由三部分组成，即考点内容讲解、考点题型解析、经典习题与解答。"考点内容讲解"部分对每章的基本内容按照知识结构分为定义、性质和结论几个层面，结合读者应掌握的重点作了比较详细的讲解、概括和总结；"考点题型解析"部分根据考试规律选择常考题型，分类解析，以题说法，开拓思路，开阔视野，帮助读者提高分析问题、解决问题、变通问题的应试能力；"经典习题与解答"部分是对考点题型解析的有益补充，是读者学习解题方法的训练场。

本书叙述通俗易懂，概念清晰，实用性强，可作为高等院校"高等数学"课程的教学参考书，也可作为高等院校教师、报考硕士研究生的考生和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导/张卓奎等编著. 一西安：西安电子科技大学出版社，2018.11

ISBN 978-7-5606-5091-3

Ⅰ. ① 高…　Ⅱ. ① 张…　Ⅲ. ① 高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. ① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 222644 号

策划编辑　李惠萍
责任编辑　王　瑛
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西利达印务有限责任公司
版　　次　2018 年 11 月第 1 版　2018 年 11 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张　23
字　　数　546 千字
印　　数　1～3000 册
定　　价　49.00 元

ISBN 978-7-5606-5091-3 / O

XDUP 5393001-1

前　言

“高等数学”是高等院校一门基础课，也是全国硕士学位研究生入学考试中许多专业指定的必考课程，它已被广泛地应用到许多研究领域，并且在这些领域显现出十分重要的作用。学习并学好该门课程是许多专业最基本的要求，也是应考的必要基础。

在学习“高等数学”课程中，读者普遍感到学会了，学懂了，但总是不能得心应手，特别不能适应于应试。为此，编者结合多年的教学经验，以及学生、考生的情况，编写了本书，以帮助读者透彻理解高等数学的基本概念、基本理论和基本方法；帮助读者克服困难，尽快掌握“高等数学”课程的精髓，练习和巩固所学知识；帮助读者正确理解大纲内容和大纲要求，掌握高等数学的难点与重点，熟悉高等数学考点题型和命题规律，掌握学习和复习高等数学的方法和技巧；帮助考生在应考中能得心应手，挥洒自如。

全书共9章。第1章为函数与极限及连续；第2章为一元函数微分学；第3章为一元函数积分学；第4章为多元函数微分学；第5章为二重积分；第6章为常微分方程；第7章为无穷级数；第8章为向量代数与空间解析几何及多元函数微分学在几何上的应用；第9章为多元函数积分学及其应用。除第8章和第9章对数学二、数学三考生不做要求的内容未说明外，其他各章对不同类型的考生不做要求的内容都做了说明。

本书各章节均由考点内容讲解、考点题型解析及经典习题与解答三部分组成。“考点内容讲解”部分对每章的基本内容按照知识结构分为定义、性质和结论几个层面，结合读者应掌握的重点作了比较详细的讲解、概括和总结；“考点题型解析”部分根据考试规律选择常考题型，分类解析，以题说法，开拓思路，开阔视野，帮助读者提高分析问题、解决问题、变通问题的应试能力；“经典习题与解答”部分是对考点题型解析的有益补充，是读者学习解题方法的训练场。

本书具有以下特点：

(1) 选材紧扣大纲，少而精、广而浅，实用性强。

(2) 题型丰富多样，具有典型性、代表性。

(3) 适应面广。

(4) 科学而巧妙地安排考点内容，便于老师辅导、考生复习。

(5) 一题多解，善于方法的总结，注重问题的变通，直戳要害。

(6) 图文并茂，易于理解，便于掌握。

本书在编写过程中，得到了西安电子科技大学数学与统计学院的大力支

持，得到了西安电子科技大学教材基金的资助，许多同行同事给予了鼓励和帮助，西安电子科技大学出版社的领导也非常关心本书的出版，李惠萍和王瑛编辑对本书的出版付出了辛勤的劳动，编者在此一并致以诚挚的谢意！

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏，恳请读者批评指正。

编　者

2018 年 4 月

目　录

第 1 章　函数与极限及连续

1.1　函　数

一、考点内容讲解

1. 函数的概念

(1) 定义：设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$。x 称为自变量，y 称为因变量；当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值 $f(x_0)$ 称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值。

(2) 定义域：数集 D 称为函数的定义域，即自变量 x 的变化范围(若函数是用解析式表示的，则其定义域是使运算有意义的自变量取值的集合)。

(3) 对应法则：给定 x 值求 y 值的方法就是对应法则。

(4) 值域：当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集称为函数的值域，即 $R_f = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$。

(5) 函数定义域的求法：对于给定的函数，利用一些简单函数的定义域组成的不等式组求其解集。

2. 函数的性态

(1) 单调性：

(ⅰ) 定义：设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果 $\forall x_1, x_2 \in I$，$x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增(或单调递减)。

① 单调递增：$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$；单调不减：$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$。

② 单调递减：$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$；单调不增：$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$。

(ⅱ) 判定与结论：

① 用定义判定：若没有告知 $f(x)$ 在区间 I 上可导，则其单调性用定义判定。

② 用导数判定：设 $f(x)$ 在区间 I 上可导，如果 $f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 单调递增；如果 $f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 单调递减。

(2) 奇偶性：

(ⅰ) 定义：设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上有定义，如果 $\forall x \in I$，恒有 $f(-x) = f(x)$(或 $f(-x) = -f(x)$)，则称 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数)。

① 偶函数：$f(-x) = f(x)$。

② 奇函数：$f(-x) = -f(x)$ 且当 $f(x)$ 在原点有定义时 $f(0) = 0$。

（ⅱ）判定与结论：

① 用定义判定：若 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$），则 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）；若 $f(-x)+f(x)=0$，则 $f(x)$ 为奇函数；若函数的定义域关于原点不对称，则该函数既不是奇函数也不是偶函数。

② 偶函数的图形关于 y 轴是对称的，奇函数的图形关于原点是对称的。

③ 奇函数的代数和仍为奇函数，偶函数的代数和仍为偶函数。

④ 偶数个奇（偶）函数之积为偶函数，奇数个奇函数之积为奇函数。

⑤ 一奇一偶函数之积为奇函数。

⑥ 设 $f(x)$ 可导，如果 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数；如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$ 是奇函数。

⑦ 连续的奇函数 $f(x)$，其原函数 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 都是偶函数；连续的偶函数 $f(x)$，其原函数之一 $\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)$ 是奇函数。

（3）周期性：

（ⅰ）定义：设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在一个与 x 无关的正数 T，使得 $\forall x\in I$ 有 $x\pm T\in I$，且恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，称最小正数 T 为函数 $f(x)$ 的周期。

（ⅱ）判定与结论：

① 用定义判定：若 $\exists T>0$，有 $f(x+T)=f(x)$，则 $f(x)$ 为周期函数。

② 设 $f(x)$ 的周期为 T，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$。

③ 设 $f(x)$、$g(x)$ 的周期均为 T，则 $f(x)\pm g(x)$ 的周期也为 T。

④ 设 $f(x)$、$g(x)$ 的周期分别为 T_1、T_2，$T_1\neq T_2$，则 $f(x)\pm g(x)$ 的周期为 T_1 与 T_2 的最小公倍数。

⑤ 可导的周期函数，其导函数为周期函数；周期函数的原函数不一定是周期函数。

（4）有界性：

（ⅰ）定义：设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界；如果 $\forall M>0$，总存在 $x_0\in I$，使得 $|f(x_0)|>M$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界。

（ⅱ）判定与结论：

① 用定义判定：对给定的函数取绝对值，利用不等式的放缩法或最值法判定。

② 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

③ 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界。

④ 设 $f'(x)$ 在有限区间 I 上有界，则 $f(x)$ 在 I 上有界。

3. 反函数

（1）定义：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_f，如果 $\forall y\in R_f$，由关系式 $y=f(x)$，有确定的 $x\in D$ 与之对应，则称变量 x 为变量 y 的函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，称之为函数 $y=f(x)$ 的反函数。习惯上，$y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$。

(2) 求法与结论：

(ⅰ) 把 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$，再把所得到的表示式 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 对换，即得所求函数的反函数 $y=f^{-1}(x)$。

(ⅱ) $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称。

(ⅲ) 只有一一对应的函数才有单值反函数。

4. 复合函数

(1) 定义：设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义，且值域 $R_g\subset D_f$，则函数 $y=f[g(x)]$ 称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=g(x)$ 构成的复合函数，其定义域为 D，变量 u 称为中间变量。

(2) 复合条件与复合方法：

(ⅰ) 复合条件：函数 g 在 D 上的值域 R_g 必须含在 f 的定义域 D_f 内，即 $R_g\subset D_f$。

(ⅱ) 复合方法：

① 代入法：将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代，该方法适用于初等函数的复合。

② 分析法：抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，该方法适合于初等函数与分段函数或分段函数与分段函数之间的复合。

③ 图示法：借助图形的直观性将函数进行复合，该方法适用于分段函数之间的复合。

5. 基本的初等函数与初等函数

(1) 基本初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称基本初等函数。了解它们的定义域、性质、图形。

(2) 初等函数：由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的能用一个式子表示的函数称为初等函数。

二、考点题型解析

常考题型：• 函数概念；• 函数性态；• 复合函数。

1. 选择题

例 1　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，$0\leqslant a\leqslant 1$，则 $y=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域是(　　)。

(A) $[a-1,a+1]$　　(B) $[-a-1,-a+1]$

(C) $[1-a,a-1]$　　(D) $[a-1,1-a]$

解　应选(D)。

由于 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，因此所求定义域满足 $-1\leqslant x+a\leqslant 1$ 且 $-1\leqslant x-a\leqslant 1$，解之，得 $a-1\leqslant x\leqslant 1-a$，从而 $y=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $[a-1,1-a]$，故选(D)。

例 2　函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 是(　　)。

(A) 偶函数　　(B) 奇函数

(C) 非奇非偶函数　　(D) 既是奇函数又是偶函数

解 应选(B)。

由于

$$f(-x)+f(x)=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})+\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=\log_a 1=0$$

因此 $f(x)$ 是奇函数，故选(B)。

例 3 设 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，且 $f[g(x)]$ 有意义，则 $f[g(x)]$ 是(　　)。

(A) 偶函数　　(B) 奇函数

(C) 非奇非偶函数　　(D) 可能是奇函数也可能是偶函数

解 应选(A)。

由于 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，因此

$$f[g(-x)]=f[-g(x)]=f[g(x)]$$

即 $f[g(x)]$ 是偶函数，故选(A)。

例 4 设 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$，则 $f(x)$ 的最小正周期为(　　)。

(A) 2π　　(B) π　　(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) $\frac{\pi}{4}$

解 应选(C)。

由于

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos x|+|\sin x|=f(x)$$

因此 $\frac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的周期，但 $f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq f(x)$，故 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，故选(C)。

2. 填空题

例 1 已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$ ________，其定义域为 ________。

解 由于

$$1-x^2=f[\varphi(x)]=\sin[\varphi(x)]$$

因此

$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$$

又 $-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$，从而 $\varphi(x)$ 的定义域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$。

例 2 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则函数 $f(x+a)+f(x-a)\left(0<a\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 的定义域为 ________。

解 由 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$ 得

$$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$$

由于 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，因此 $a\leqslant x\leqslant 1-a$，从而函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $[a,1-a]$。

例 3 已知 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\-2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，则 $f(x+3)$ 的定义域为 ________。

解　方法一　由于

$$f(x+3)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x+3\leqslant 1\\ -2, & 1<x+3\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}1, & -3\leqslant x\leqslant -2\\ -2, & -2<x\leqslant -1\end{cases}$$

因此 $f(x+3)$ 的定义域为$[-3,-1]$。

方法二　由于 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]\cup(1,2]=[0,2]$，要使函数 $f(x+3)$ 有意义，须有

$$0\leqslant x+3\leqslant 2$$

解之，得

$$-3\leqslant x\leqslant -1$$

故 $f(x+3)$ 的定义域为$[-3,-1]$。

例 4　已知 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，则 $f(x)=$ ________。

解　将 $2f(x)+f(1-x)=x^2$ 中的 x 换为 $1-x$，得 $2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2$，联立两式，解之，得

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$$

例 5　设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]=$ ________。

解

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ f(x)+2, & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0\\ x^2+2, & x<0\end{cases}$$

例 6　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 2, & |x|>2\end{cases}$，则 $g[f(x)]=$ ________。

解　由于

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-[f(x)]^2, & |f(x)|\leqslant 2\\ 2, & |f(x)|>2\end{cases}$$

且 $|f(x)|\leqslant 1<2\ (x\in(-\infty,+\infty))$，因此

$$g[f(x)]=2-[f(x)]^2=\begin{cases}2-1^2, & |x|\leqslant 1\\ 2-0^2, & |x|>1\end{cases}$$

即

$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$$

3. 解答题

例 1　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 2, & |x|>2\end{cases}$，求 $f[g(x)]$。

解

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}$$

由于当 $|x|>2$ 时，$g(x)=2>1$，因此只有当 $|x|\leqslant 2$ 时才有可能 $|g(x)|\leqslant 1$，由 $|x|\leqslant 2$，$|2-x^2|\leqslant 1$，得 $1\leqslant |x|\leqslant\sqrt{3}$，故

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & 1\leqslant |x|\leqslant\sqrt{3}\\ 0, & |x|<1\text{ 或 }|x|>\sqrt{3}\end{cases}$$

例 2 已知 $f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, & x>4\end{cases}$，求 $f^{-1}(x)$。

解 当 $x<1$ 时，$y=x$ 的反函数为 $x=y(y<1)$；当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$y=x^2$ 的反函数为 $x=\sqrt{y}(1\leqslant y\leqslant 16)$；当 $x>4$ 时，$y=2^x$ 的反函数为 $x=\log_2 y(y>16)$。因此

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x, & x>16\end{cases}$$

例 3 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$（其中 a、b、c 均为常数，且 $|a|\neq|b|$），试证明：$f(-x)=-f(x)$。

证 将 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$ 中的 x 换为 $\frac{1}{x}$，得 $af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$；联立两式，解得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right)$$

所以

$$f(-x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{-x}+bcx\right)=-f(x)$$

例 4 证明函数 $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有界。

证 显然 $f(x)>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$。由于 $\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$，因此

$$0<f(x)=\frac{1}{1+x^4}+\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界。

例 5 设 $\varphi(x)$、$\psi(x)$、$f(x)$ 都是单调递增函数，试证明：若 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$，则 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$。

证 由 $\varphi(x)\leqslant f(x)$ 得 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[\varphi(x)]$，由 $\varphi(x)\leqslant f(x)$ 及 $f(x)$ 是单调递增函数得 $f[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]$，由 $f(x)\leqslant\psi(x)$ 得 $f[f(x)]\leqslant\psi[f(x)]$，由 $f(x)\leqslant\psi(x)$ 及 $\psi(x)$ 是单调递增函数得 $\psi[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$，故

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$$

三、经典习题与解答

经典习题

1. 选择题

(1) 已知 $F(x)$ 为奇函数，则函数 $f(x)=F(x)\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)(a>0, a\neq 1)$ 是(　　)。

(A) 偶函数　　(B) 奇函数

(C) 既是奇函数又是偶函数 (D) 非奇非偶函数

(2) 函数 $f(x)=10^{-x}\sin x$ 在区间$[0,+\infty)$内是(　　)。

(A) 偶函数 (B) 奇函数 (C) 单调函数 (D) 有界函数

(3) 下列函数中为奇函数的是(　　)。

(A) $f(x)=\begin{cases}x, & |x|>1\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -1, & -1<x<0\end{cases}$ (B) $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\geqslant 1\\ 1, & 0\leqslant x<1\\ -1, & -1<x<0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\geqslant 0\\ -e^{-x}, & x<0\end{cases}$ (D) $f(x)=\begin{cases}e^x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -e^{-x}, & x<0\end{cases}$

(4) 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<2\\ x^2-1, & x\geqslant 2\end{cases}$，则其反函数为(　　)。

(A) $f^{-1}(x)=\begin{cases}1-x, & x<3\\ (x+1)^2, & x\geqslant 3\end{cases}$ (B) $f^{-1}(x)=\begin{cases}x-1, & x<3\\ \sqrt{x+1}, & x\geqslant 3\end{cases}$

(C) $f^{-1}(x)=\begin{cases}1-x, & x<2\\ (x+1)^2, & x\geqslant 2\end{cases}$ (D) $f^{-1}(x)=\begin{cases}x-1, & x<2\\ \sqrt{x+1}, & x\geqslant 2\end{cases}$

2. 填空题

(1) 已知 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$ ________。

(2) 设 $f(x)=\ln\dfrac{3+x}{3-x}+1$，则 $f(x)+f\left(\dfrac{3}{x}\right)$的定义域为________。

(3) 已知 $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$，则 $f(x)$ 的值域为________。

(4) 设 $f(x)$ 为奇函数，且对一切 x 有 $f(x+2)=f(x)+f(2)$，且 $f(1)=a$，其中 a 为常数，n 为整数，则 $f(n)=$ ________。

3. 解答题

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & \dfrac{1}{e}<x<1\\ x, & 1\leqslant x<e\end{cases}$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$。

(2) 设 $f\left(\dfrac{1-x}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{2x^2-2x+1}-1(x\neq 0)$；求 $f(x)$。

经典习题解答

1. 选择题

(1) 解　应选(A)。

令 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$，则

$$g(x)+g(-x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}+\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=0$$

从而 $g(x)$ 为奇函数。又由于 $F(x)$ 为奇函数，因此 $f(x)=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$ 为偶函数，故选(A)。

(2) **解** 应选(D)。

由于当 $x\geqslant 0$ 时，$|f(x)|\leqslant 10^{-x}\leqslant 1$，因此 $f(x)$ 在区间$[0,+\infty)$内是有界函数，故选(D)。

(3) **解** 应选(D)。

方法一 由于奇函数在原点有定义时其值必为 0，因此选项(A)、(B)、(C) 都不正确，故选(D)。

方法二 由于 $f(0)=0$，当 $x>0$ 时，$-x<0$，$f(-x)=-\mathrm{e}^{-(-x)}=-\mathrm{e}^{x}=-f(x)$，当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=\mathrm{e}^{-x}=-(-\mathrm{e}^{-x})=-f(x)$，因此 $f(x)$ 是奇函数，故选(D)。

(4) **解** 应选(B)。

当 $x<2$ 时，$y=1+x$ 的反函数为 $x=y-1(y<3)$，当 $x\geqslant 2$ 时，$x=\sqrt{y+1}(y\geqslant 3)$，从而 $f^{-1}(x)=\begin{cases}x-1, & x<3\\ \sqrt{x+1}, & x\geqslant 3\end{cases}$，故选(B)。

2. 填空题

(1) **解** 方法一

$$f[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant 0\\ f(x), & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}=f(x)$$

方法二 由于 $f(x)\geqslant 0$，因此

$$f[f(x)]=\begin{cases}0, & f(x)=0\\ f(x), & f(x)>0\end{cases}=f(x)$$

(2) **解** 由 $\dfrac{3+x}{3-x}>0(x\neq 3)$，得 $\begin{cases}3+x>0\\ 3-x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3+x<0\\ 3-x<0\end{cases}$，从而 $f(x)$ 的定义域为 $|x|<3$。又 $f\left(\dfrac{3}{x}\right)$ 的定义域为 $\left|\dfrac{3}{x}\right|<3$，即 $|x|>1$，故 $f(x)+f\left(\dfrac{3}{x}\right)$ 的定义域为 $1<|x|<3$，即$(-3,-1)\cup(1,3)$。

(3) **解** 当 $x=0$ 时，$y=0$；当 $x\neq 0$ 时，$y=\dfrac{2}{x+\dfrac{1}{x}}$，当 $x>0$ 时，由 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ 得 $0<y\leqslant 1$，当 $x<0$ 时，由 $x+\dfrac{1}{x}\leqslant -2$ 得 $-1\leqslant y<0$。因此 $f(x)$ 的值域为$[-1,1]$。

(4) **解** 令 $x=-1$，则

$$f(1)=f(-1)+f(2)$$

即

$$f(2)=f(1)-f(-1)=2f(1)=2a$$

再令 $x=1$，则

$$f(3)=f(1)+f(2)=3f(1)=3a$$

用数学归纳法证明 $f(n)=na$。

当 $n=1,2,3$ 时，$f(n)=na$ 成立。假设当 $n\leqslant k$ 时，$f(n)=na$，当 $n=k+1$ 时，$f(n)=f(k+1)=f(k-1+2)=f(k-1)+f(2)=(k-1)a+2a=(k+1)a$，故对一切自然数 n，$f(n)=na$。令 $x=0$，则 $f(2)=f(0)+f(2)$，即 $f(0)=0=0\cdot a$，又 $f(x)$ 为奇函数，故对一切负整数 n，$f(n)=-f(-n)=-(-na)=na$，从而对一切整数 n，$f(n)=na$。

3. 解答题

(1) **解**　$f[g(x)]=\begin{cases}1, & \dfrac{1}{\mathrm{e}}<g(x)<1\\ g(x), & 1\leqslant g(x)<\mathrm{e}\end{cases}=\begin{cases}1, & -1<x<0\\ \mathrm{e}^x, & 0\leqslant x<1\end{cases}$

(2) **解**　令 $\dfrac{1-x}{x}=u$，则

$$x=\frac{1}{u+1}$$

从而
$$f(u)=u+1+\frac{\dfrac{1}{(u+1)^2}}{\dfrac{2}{(u+1)^2}-\dfrac{2}{u+1}+1}-1=u+\frac{1}{u^2+1}$$

即

$$f(x)=x+\frac{1}{x^2+1}$$

1.2　极　　限

一、考点内容讲解

1. 极限概念

(1) 数列极限：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$|a_n-A|<\varepsilon$$

(2) 函数极限：

(ⅰ) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。

(ⅱ) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；

左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A(f(x_0^-)=A$ 或 $f(x_0-0)=A)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；

右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A(f(x_0^+)=A$ 或 $f(x_0+0)=A)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；