高等院校“十三五”规划教材

线性代数习题指导

XIANXING DAISHU XITI ZHIDAO

王 璐 主编

中国国际广播出版社

高等院校“十三五”规划教材

线性代数习题指导

XIANXING DAISHU XITI ZHIDAO

王　璐　主编

中国国际广播出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题指导 / 王璐编著. --北京：中国国际广播出版社，2018.2

ISBN 978-7-5078-4194-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①王… Ⅲ.①线性代数—高等学校—习题集 Ⅳ.①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 031800 号

线性代数习题指导

主　　编	王　璐
责任编辑	郭　广
封面设计	唐韵设计
责任校对	徐秀英

出版发行	中国国际广播出版社(010－83139489 010－83139489(传真))
地　　址	北京市西城区天宁寺前街 2 号北院 A 座一层
	邮编　100055
网　　址	www.chip.com.cn
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	三河市海新印务有限公司

开　　本	787mm×960mm
字　　数	156 千字
印　　张	12
版　　次	2018 年 2 月第 1 版
印　　次	2018 年 2 月第 1 次印刷
定　　价	29.80 元

前　言

《线性代数》是高等院校经济数学的基础课程之一，其理论与方法已经渗透到经济、管理、信息、人文社科等诸多领域中，但该课程教学课时少、概念多、定理多、内容抽象.本书的编者根据多年的一线教学活动总结的经验，根据《线性代数》的教学内容和进度安排，编写了本习题指导，对帮助学生吃透教材知识、融会贯通方法技巧有一定的促进作用.

本书的每一章都设有大纲学习目标、本章知识结构图和习题精选三部分.

在习题精选部分，题型涉及填空题、选择题、计算与证明题.练习题的内容由浅入深、由易到难，使学生理解线性代数基本理论和解题方法的同时，也为后续专业打下坚实的基础.

学习是一个过程，而过程由环节组成.只有注重环节，控制过程，才能得到良好的学习效果.对学习大学数学来讲，课堂听讲和课后复习是两个重要环节.本书详细给出大部分习题的解答.真正从学习者的角度，给出解题的每一个过程与步骤，以免略掉一些看似简单但对有些同学理解解题思路却很关键的细节.

本书可为学习线性代数的经济管理类、工程类和其他非数学类专业学生以及复习线性代数准备报考硕士研究生的人员提供解题指导，也可供讲授线性代数的教师在备课和批改作业时参考.

由于编者水平有限，书中疏漏与不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

编者

2017 年 10 月

目录

CONTENTS

第一章 行列式

1.1 学习目标

1. 了解 n 阶行列式的定义；
2. 掌握行列式的性质和行列式按行(列)展开的方法；
3. 熟练掌握二阶、三阶和四阶行列式的计算法，会计算简单的 n 阶行列式；
4. 了解克莱姆法则.

1.2 知识结构

$$
\text{行列式}\begin{cases}\text{行列式定义}\\ \text{行列式性质}\\ \text{行列式展开}\\ \text{克莱姆法则}\end{cases}
$$

1.3 习题精选

一、选择题

1. 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix}=0$，则 $a=($　　$)$.

A. 2　　B. 3　　C. -2　　D. -3

2. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=($　　$)$.

A. $\dfrac{1}{k}\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ kc_1 & kc_2 & kc_3 \end{vmatrix}$　　B. $\dfrac{1}{k^2}\begin{vmatrix} a_1 & ka_2 & a_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ c_1 & kc_2 & c_3 \end{vmatrix}$

C. $\frac{1}{k^2}\begin{vmatrix} a_1 & ka_2 & a_3 \\ kb_1 & k^2 b_2 & kb_3 \\ c_1 & kc_2 & c_3 \end{vmatrix}$　　D. $\frac{1}{k}\begin{vmatrix} ka_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & kb_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & kc_3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(\quad)$.

A. $-\begin{vmatrix} a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ a_{22} & a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \end{vmatrix}$　　B. $-\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{11} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & 0 \\ a_{22} & a_{21} & 0 \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$　　D. $-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

4. 设多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x \end{vmatrix}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 为实数，则多项式 $f(x)$ 的次数为(　　).

A. 3 次　　B. 2 次　　C. 1 次　　D. $\leqslant 1$ 次

5. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix}=(\quad)$.

A. $abcdef$　　B. $abdf$　　C. $-abdf$　　D. cdf

6. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=(\quad)$.

A. $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$

B. $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

C. $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$

D. $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

7. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} a & b & c & d-x \\ a & b & c-x & d \\ a & b-x & c & d \\ a-x & b & c & d \end{vmatrix}$，则 $f(x)=0$ 的根为（　　）.

A. a,b,c,d

B. $a+b,c+d,a+d,b+c$

C. 0（三重），$a+b+c+d$

D. 0（三重），$-a-b-c-d$

9. 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k$，则 $\begin{vmatrix} a_{31} & -3a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21} & -6a_{22} & 2a_{23} \\ a_{11} & -3a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}=$（　　）.

A. $2k$　　B. $-3k$　　C. $-6k$　　D. $6k$

10. 设行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \end{vmatrix}$，则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=$（　　）.

A. 0　　B. 28　　C. 43　　D. -26

二、填空题

1. 已知 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=m$，则 $\begin{vmatrix} a & -2b & c \\ d-a & -2e+2b & f-c \\ g & -2h & i \end{vmatrix}=$________.

2. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=$________.

3. 设 $f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&1&4&15\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\0&2&5&12\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}$，则 $f(x)=0$ 的根为________.

4. 设 $D=\begin{vmatrix}3&-1&2\\-2&-3&1\\0&1&-4\end{vmatrix}$，则 $2A_{11}+A_{21}-4A_{31}=$________.

5. 设行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$，则第四行各元素余子式之和的值为________.

6. 行列式 $D=\begin{vmatrix}103&100&204\\199&200&395\\301&300&600\end{vmatrix}$________.

7. 设 $\begin{vmatrix}1&6&-1\\5&1&0\\-2&4&1\end{vmatrix}$，元素 a_{23} 的代数余子式 $A_{23}=$________.

8. 已知 $D_1=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&4&0\\b&c&9\end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&4&x\\9&y&z\end{vmatrix}$，

$$D_3=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0&0\\e&2&0&0&0&0\\f&g&3&0&0&0\\a_{11}&a_{12}&a_{13}&0&0&1\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&0&2&u\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&3&v&t\end{vmatrix},D_4=\begin{vmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&e&2&0\\0&0&0&f&g&3\\0&0&1&b_{11}&b_{12}&b_{13}\\0&2&u&b_{21}&b_{22}&b_{23}\\3&v&t&b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix},$$

则与 D_1 相等的行列式是________.

9. 若 $\begin{vmatrix}x&3&1\\y&0&1\\z&2&1\end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix}x-1&y-1&z-1\\4&1&3\\1&1&1\end{vmatrix}=$________.

10. 若齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$只有零解，则 λ 应满足________.

三、计算与证明题

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-4&-1\\-1&8&3\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}$.

第一章 行列式

2. 按自然数从小到大为标准次序,求下列各排列的逆序数:

(1) 1 2 3 4;　(2) 4 1 3 2;　(3) 3 4 2 1;　(4) 2 4 1 3;

(5) $1\ 3\ \cdots(2n-1)\ 2\ 4\cdots(2n)$;　(6) $1\ 3\ \cdots\ (2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$.

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

4. 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$.

5. 求解下列方程：

(1) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=0$；

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=0$.

6. 证明：

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$；

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^3 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^3 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^3 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^3 \end{vmatrix} = 0$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$;

(5) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.

7. 设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$，把 D 上下翻转或逆时针旋转 90°或依副对角线翻转，依次得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}$$

证明 $D_1=D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D,D_3=D$.

8. 计算下列各行列式（D_k 为 k 阶行列式）：

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$，其中对角线上元素都是 a，未写出的元素都是 0；

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$;

(3) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$;