数学基础讲义

高伟辰 著

中国人口出版社
China Population Publishing House
全国百佳出版单位

数学基础讲义

高伟辰 著

中国人口出版社
China Population Publishing House
全国百佳出版单位

图书在版编目（CIP）数据

数学基础讲义 / 高伟辰 著 . -- 北京 : 中国人口出版社，2017.10

ISBN 978-7-5101-5392-1

Ⅰ . ①数… Ⅱ . ①高… Ⅲ . ①数学基础 Ⅳ . ① 0143

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 247559 号

数学基础讲义

高伟辰 著

出版发行	中国人口出版社
印　　刷	北京三只猫打样印刷有限公司
开　　本	710×1000 毫米　1/16
印　　张	14.25
字　　数	160 千字
版　　次	2017 年 10 月第 1 版
印　　次	2017 年 10 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5101-5392-1
定　　价	30.00 元

出 版 人	邱　立
网　　址	www. rkcbs. net
电子信箱	rkcbs@126. com
电　　话	（010）83519390
传　　真	（010）83519401
地　　址	北京市西城区广安门南街 80 号中加大厦
邮　　编	100054

序

在 19 世纪 70 年代，两篇极为重要的作品问世了。一者，是康托(Cantor)于 1874 年发表的论文《实代数数类的一个属性》（*Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, On a Property of the Class of all Real Algebraic Numbers*）；二者，是弗雷格（Frege）于 1879 年出版的著作《概念文字》（*Begriffsschrift*）。这两个看似并无关联的著作却在十余年后共同推动了一场巨大的变革，数学界、逻辑学界、哲学界无不牵涉其中，共同争论着数学的最终命运。

1902 年，弗雷格完成了他的著作《算术基本规律》（*The Basic Laws of Arithmetic*）的第二卷，他一生以逻辑主义之立场构建数学之基础的努力眼看就要成功，却在此时收到了罗素（Russell）的一封信。我们暂且不谈信的内容，先看一下弗雷格为此写的他的著作的附录 II 的开头：

Hardly anything more unwelcome can befall a scientific writer than that one of the foundations of his edifice be shaken after the work is finished. I have been placed in this position by a letter of Mr. Bertrand Russell just as the printing of this volume was nearing completion.

对于一个科学工作者来说，最不幸的事情莫过于：当他的工作接近完成时却发现大厦的基础已然动摇。当本卷即将付印之际，贝特兰·罗素先生的一封信却置我于那样的境地。

可能读者对此也有些了解，罗素在此封信中提到的正是罗素悖论（Russell's Paradox），我们大致陈述如下：

使用不加限制的概括原理，即对于每一个性质φ，$\{x|\varphi(x)\}$便是一个集合。取$\varphi(x)$为$x \notin x$，便会生成一个集合 A，而由 A 的构造，这便会导致$A \notin A \Leftrightarrow A \in A$。

这件事对于弗雷格是个沉重的打击，对于数学也是。对集合论中出现的悖论（在罗素悖论之前其实便已经有一些悖论出现了），直觉主义者的态度很明确：惹麻烦的都是超穷数理论，应该一劳永逸地消灭之。至于其他学派，则主要是希望通过（某种意义下的）公理化来解决问题。但对于如何保证之后不会再出现悖论，这便颇有争论了。

在这种背景下，1910—1913 年，《数学原理》（*Principia Mathematica*）这本数学史上有举足轻重之地位的书出版了。怀特海（Whitehead）和罗素继承了逻辑主义学派的志向，完成了这本鸿篇巨制，消灭了当时已知的各种素朴集合论悖论，建立了现在简写为 **PM** 的集合论公理系统（这么说其实是有

问题的，但让我们暂且不管这一点），确确实实地把数学建立在了逻辑的基础之上。

再让我们回到 1900 年，在巴黎的国际数学家大会上，希尔伯特（Hilbert），当时数学界的领袖人物，发表了一篇演讲，其中提及了他认为的 23 个有待解决的重大数学问题中的 10 个，我们很有必要提及的是第二个，“算术公理的相容性”（*The Compatibility of the Arithmetical Axioms*），意思很明确，证明在算术的公理系统中是没有矛盾的。希尔伯特所提及的实际上是实数的公理系统（现在称之为分析），而不是自然数的公理系统（现在称之为算术，如 **PA**），而如今我们也关心集合论的公理系统（如 **ZFC**）是否有矛盾这一问题。我们会在讲义的后面更详细地提及。

那么希尔伯特的第二问题的目标有达成吗？换句话说，实数理论确实没有悖论吗？整个数学界都十分关心此事，因为一个有悖论的系统就彻底没有意义了——它可以证明任何命题（*Principle of Explosion*），而且更进一步地，由于诸如 **PM** 一类的系统都可以导出实数理论，因此这也会让 **PM** 和其他的集合论系统彻底崩溃。到 1929 年，由于阿克曼（Ackermann）和冯·诺依曼（von Neumann）的工作，希尔伯特已经对此充满信心，事实上他相信自然数理论（**PA**）的一致性已经被证出了，只需要等待片刻实数理论便也会得到解决，他的形式主义伟业便达成了。这也促使他在 1930 年的柯尼斯堡（Königsberg）会议上说出了这样一段著名的话：

For the mathematician there is no Ignorabimus, and, in my opinion, not at all for natural science either... The true reason why no one has succeeded in finding an unsolvable problem is, in my opinion, that there is no unsolvable problem. In contrast to the foolish Ignorabimus, our credo avers: Wir müssen wissen. Wir werden wissen! (*We must know. We shall know!*)

当时在听众席中的很可能有后来被喻为自亚里士多德（Aristotle）以降的最伟大逻辑学家哥德尔（Gödel），而他当时刚刚完成了两个伟大定理的证明，统称为哥德尔不完备性定理（*Gödel's incompleteness theorems*）。在会议第三天的圆桌讨论时，哥德尔宣布了他的成果。我们对这个成果大致叙述如下：

哥德尔不完备性定理：令 T 为一个包含基本算术事实的可公理化公式集（如 **PA**），且 T 为 ω-一致的［后在 1936 年被罗瑟（Rosser）削弱为一致的］，则存在一个闭语句，使得其本身和其否定均不为 T 的定理（换言之，T 不是完备的）。

Gödel's second incompleteness theorem：令 T 为一个包含基本算术事实的可公理化公式集（如 **PA**），且 T 为一致的，则“T 是一致的”这一语句的形式化版本在 T 中是不可证的。

介，让读者得以体会到 19 世纪末 20 世纪初数学哲学界百家争鸣的传奇。

最后，虽然我们在正文中略去了一些更深入的内容，但向有兴趣的读者介绍这些内容还是很有意义的，因此，在本讲义的最后有两篇附录，分别是关于序数理论和一阶逻辑模型论（包括哥德尔完全性定理的证明）的，供读者参阅。

以上。

高伟辰

2017 年 9 月 5 日

这些成果对于希尔伯特的计划是一个始料未及而无比沉重的打击，据里德（Reid）所言，希尔伯特听到哥德尔的成果时感到“*somewhat angry*”。不过对希尔伯特而言的一个安慰是，根岑（Gentzen）在 1936 年发表了一个 **PA** 的一致性证明，使用的是原始递归算术系统（**PRA**）加上到ε_0的不带参数超穷归纳，至少表明了，想证明 **PA** 的一致性，虽无法在 **PA** 内做到，但不必须用比 **PA** 强的系统。希尔伯特接受了这个证明，并认为这个证明是有穷的。当然说它是有穷的未免希尔伯特有点一厢情愿了，但希尔伯特没有因为哥德尔的成果而一蹶不振，是颇有毅力的。

集合论和数理逻辑这两个领域的大致历史我们就介绍这些。总而言之这两个领域在数学中有很独特的地位，它们是作为数学的基础（*Foundations of Mathematics*）而存在的。在本讲义中，我们主要讨论集合论作为数学基础的部分，同时我们也只将讨论数理逻辑的一些基础内容，并对哥德尔的成果和数学哲学的学派做一个科普式的了解，具体来说：

第一，我们要求读者有一些基本的集合与函数相关的知识，大致了解集合是什么，集合之间的一些基本运算，函数是什么，它们在数学中的意义等。在 1 ~ 3 讲中我们将对一阶逻辑体系、形式证明、公理系统和一些逻辑推演的方法做一个介绍，其中将会使用到一些集合方面的知识。这些内容将使读者对于公理化方法有一个认识，从而便于进入接下来的公理化集合论的内容。

而后是 4 ~ 13 讲，介绍集合论作为数学基础的部分。对于集合论的这一部分，我们关注的主要核心是数的构造，从自然数以至于实数的构造是我们关注的焦点，但本讲义也仅到此为止，对于借助实数构造更广的数系等，都不会在本讲义中涉及，感兴趣的读者可查阅其他文献。

在这一过程中，我们将会穿插集合论的公理化。出于分散难点，减轻读者阅读障碍的考虑，我们将部分公理化的内容单独放入 4’、5’、13’讲，作为 4、5、13 的附讲存在。在 4、5、13 讲中我们将采用一些素朴直观的方式进行展开，而在其后的 4’、5’、13’讲中将给出对应的公理并严格化之前的论证。我们希望这种方式能够让读者在学习到公理化集合论的前提下尽量减少一些困难。

14 ~ 18 讲中我们将返回到数理逻辑，对命题逻辑和一阶逻辑再做一个介绍，并最终在第 17 讲中证明命题逻辑的可靠性和完全性，从而“证明”直观意义下的命题联词的含义和推理方式。在第 18 讲中证明在第 3 讲中已经提出的一阶逻辑各元定理，从而“证明”一些一阶逻辑中的基本推理原则。这样我们就完成了数学基础所需的内容。

第 19 讲和第 20 讲是额外的内容。我们在第 19 讲中将对哥德尔的两大成果：完全性定理和不完备性定理进行科普式的简介，使读者对于这两个主要成果有一个基本认识。在第 20 讲中将对数学哲学各学派做一个科普式简

目录

第 1 讲：一阶逻辑语言与逻辑公理

1879 年，弗雷格的著作《概念文字》*Begriffsschrift* 出版了。这本书可谓是一本跨时代的著作，它建立了第一个公理化的符号逻辑系统，算是部分完成了 Leibniz 建立一个有能力处理人类全部思想的符号语言的目标，也让后来轰轰烈烈的数学公理化运动有了一个坚实的逻辑学基础。弗雷格的书中的逻辑体系与现在常见的一阶逻辑体系是有所区别的，所使用的符号更是天差地别。在本书中，我们采用现在更常见的体系和符号，但同时也提醒读者，弗雷格的工作无论如何都是这一切的基础。

一、语言与句法结构

一阶逻辑语言中有且仅有如下符号：

1. **括号**：“(” 和 “)”；
2. **命题联词**：“¬”（也有文本做“~”）和“→”（也有文本做“⊃”）；
3. **全称量词符号**：“∀”；
4.（在所选取的语言中无需给定）**变元符号**；
5. 若干个**常数符号**；
6. ***n* 元函数符号**（*n* 是任意自然数）；
7. ***n* 元谓词符号**（*n* 是任意自然数）；
8. **等词符号**（依所选取的语言而有或没有，若有，视作二元谓词符号）：“=”。

作为一门语言，其字符和词汇自然不可能随意地组合起来就是一个有意义的句子，因此，我们需要对哪些句子是“合法的”做一个界定：

定义 1.1　固定一个一阶逻辑语言，如下类型的字符串称为**项**：

1. 每一个变元符号或常数符号自身便是一个项；
2. 如果t_1、t_2、⋯、t_n是 n 个项，f 是一个 n 元函数符号，则$f\,t_1t_2\cdots t_n$也是项。

定义 1.2　固定一个一阶逻辑语言，如下类型的字符串称为**合式公式**（简称**公式**）：

1. 如果t_1、t_2、⋯、t_n是 n 个项，P 是一个 n 元谓词符号，则$P\,t_1t_2\cdots t_n$是一个公式，特别地，这类公式又称为**原子公式**；
2. 如果α和β是公式，则$(\neg\alpha)$，$(\alpha\to\beta)$都是公式；

3. 如果α是公式，则$\forall v\,\alpha$是公式，其中 v 是任意一个变元符号，特别地，这类公式与原子公式合称**素公式**。

注 一般情况下，我们做如下一些处理以简化或明确公式：

1.加入如下成分等同于命题联词的符号："$\alpha \vee \beta$" 表示$\big((\neg\alpha) \to \beta\big)$，"$\alpha \wedge \beta$" 表示$\Big(\neg\big(\alpha \to (\neg\beta)\big)\Big)$，"$\alpha \leftrightarrow \beta$" 表示$\big((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)\big)$；

2. 加入如下成分等同于量词符号的符号：$\exists v\,\alpha$表示$(\neg\,\forall v(\neg\alpha))$，并称"$\exists$"为**存在量词符号**；

3. 对于原子公式$P\,t_1 t_2$，其中 P 是一个二元谓词符号，可将之写为$t_1\,P\,t_2$，特别地，将$=t_1 t_2$写做$t_1 = t_2$；并将$(\neg = t_1 t_2)$简写为$t_1 \neq t_2$，对一些特定的谓词，如集合论中会引入的$\in$，也可采用这样的简写；

4. 很多时候我们会省略掉括号，在括号省略方面，有如下规则：最外的括号可以直接略去；"$\neg$"的管辖范围尽可能短，即如$\neg\alpha \to \beta$指$\big((\neg\alpha) \to \beta\big)$；同一联词反复出现时则以右侧为先，即如$\alpha \to \beta \to \gamma$指$\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big)$；一旦出现歧义，应立即停止一切括号省略；

5. 量词符号管辖范围应尽可能短，即如$\forall v\,\alpha \to \beta$指的是"$\forall v\,\alpha$""$\to$""$\beta$"，而不是$\forall v(\alpha \to \beta)$；

6. 在讨论一阶逻辑的一些一般规律时，一般用大写英文字母表示谓词符号；用 x、y、z、v 表示变元；用 f、g、h 表示函数符号；用 a、b、c 表示常数符号；用 t 表示项；用小写希腊字母表示公式；用大写希腊字母表示公式的集合。

对于前面给出的各符号，我们给出下表将它们对应上相应的自然语言词汇，但请注意，这个表格仅供在直觉意义下参考，在严格的形式证明中，理应将这些符号视为无意义的字符：

符号	自然语言词汇
$\neg$	否定，并非，不
$\to$	蕴含，可推出
$\vee$	或
$\wedge$	且，与
$\leftrightarrow$	等价于，当且仅当
$=$	等于
$\neq$	不等于
$\forall$	对于所有
$\exists$	存在

表 1-1

注 关于联词"→"的意义我们有必要强调一下，即$\alpha \to \beta$成立除了α、β均成立之外还有一种情况，就是α不成立。对这一点我们做如下理解，假若我们提出"若 A 事件发生 B 事件就会发生"，此时 A 事件发生了那么 B 事件当然必须发生，但若 A 事件没有发生，B 事件发生与否我们提出的这个断言都没有问题，所以说$\alpha \to \beta$在某种意义上可以理解为"α不成立或β成立"。

二、 一阶语言示例

前面我们给出了一阶语言的句法结构，但对于读者来讲可能由于缺乏具体的示例而使这些内容较为难以理解，因此接下来我们将给出一系列一阶语言公式的例子，并给出其对应的"翻译"。我们应该指出，同前面给出的各符号的意义表一样，这些所谓的"翻译"也仅供参考。而且我们也应该指出，既然一个一阶语言公式实质上只是一个字符串，我们不能保证同一个公式只有一种理解方式，换言之，所谓的"翻译"并不是唯一的。

第一部分：日常用语：

1. 人类是动物的一种。

$$\forall x(P_1 x \to P_2 x)$$

其中，$P_1 x$表示"x 是一个人"，$P_2 x$表示"x 是一个动物"，则$\forall x(P_1 x \to P_2 x)$表示是人的皆是动物，亦即人类是动物的一种。不过也可以这么解释：$P_1 x$表示"x 是人类这一物种"，$P_2 x$表示"x 是动物的一种"，则该句可直接地解释为人类是动物的一种。

2. 太阳系的行星中只有地球上已知存在生命。

$$\forall x\big((P_1 x \wedge \neg P_2 x) \to \neg P_3 x\big) \wedge \forall x\big(P_2 x \to (P_1 x \wedge P_3 x)\big)$$

其中，$P_1 x$表示"x 是太阳系的行星"，$P_2 x$表示"x 是地球"，$P_3 x$表示"x 上已知存在生命"。则$\forall x\big((P_1 x \wedge \neg P_2 x) \to \neg P_3 x\big)$表示"$x$ 若是太阳系的行星且不是地球则并非已知存在生命"，$\forall x\big(P_2 x \to (P_1 x \wedge P_3 x)\big)$表示地球是太阳系的行星且已知存在生命，前者且后者便表达了我们想要的意思。

第二部分：自然数：

既然是关于自然数的示例，那么我们假定变元的"取值"全部为自然数，后面关于集合的示例也类似处理。

1. 没有自然数的后继（一个一元函数符号，记为$S x$，可理解为$x+1$）为 0。

$$\forall x(S x \neq 0)$$

2. 若两个自然数的后继相等，则这两个自然数相等。

$$\forall x \forall y (S\,x = S\,y \to x = y)$$

3. 有素数存在。

我们首先需要重新解读一下这句话，首先，“x 为素数”可以理解为：x 大于 1 且任何小于 x 的两个自然数之积不可能等于 x。则“有素数存在”相应地可表示为：

$$\exists x \Big(S\,0 < x \wedge \forall y \forall z \big((y < x \wedge z < x) \to y \cdot z \neq x \big) \Big)$$

注意到这里的“$<$”是一个二元谓词符号，意为“小于”，我们采用简写规则将“$< yx$”写为“$y < x$”；再注意到$y \cdot z$代表的是 y 乘以 z，其中“$\cdot$”是一个二元函数符号，此处理应写为“$\cdot\, yz$”，但按照一般的习惯我们在此将其写为“$y \cdot z$”；另，这里的 1 我们没有直接写做“1”，而是写为“$S\,0$”，是因为在标准的自然数算术的一阶语言中，一般是没有“1”这个常数符号的，而是把“1”视作“$S\,0$”的一种简写。

第三部分：集合：

1. 两个集合如果有相同的元素，则它们是相等的。

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

注意到此处的“$\in$”是一个二元谓词符号，代表属于。此处同样采用了将$\in zx$简写成$z \in x$的做法。

2. 存在不含任何元素的集合。

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

注意到此处我们采用了前面已提及的将$(\neg \in yx)$简写为$y \notin x$的做法。另，这样的不含任何元素的集合称之为**空集**，记为$\emptyset$，待后面我们讨论至集合论时还会再提。

三、变元与逻辑公理

我们现在来讨论一个公式中的变元，考虑下面这个例子：

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

在此式中，尽管都身为变元，但 x 和 i 的意义是不同的，x 若是随意地替换为其他变元，该式的结果会发生变化，但改变 i 则不会。在一阶逻辑语言中有类似的现象，我们称之为**自由出现**和**约束出现**，其严格定义如下：

定义 1.3 变元 v 在公式α中**自由出现**定义为：

1. 若α为原子公式，则 v 在α中自由出现当且仅当它在α中出现；

2. 若α为$(\neg\beta)$，则 v 在α中自由出现当且仅当它在β中自由出现；

3. 若α为$(\beta \to \gamma)$，则 v 在α中自由出现当且仅当它在β中自由出现或它在γ中自由出现；

4. 若α为$\forall x\,\beta$，则 v 在α中自由出现当且仅当它在β中自由出现且 x 和 v 不同。

若 v 在α中出现但不在α中自由出现，则称它在α中**约束出现**。

注 两点注释：

1. 在非严格的直观意义下，变元 v 在公式α中约束出现就是指有一个量词“约束”着 v；

2. 如果一个公式α中没有变元自由出现，则称之为一个**闭公式**或**语句**，直观意义下，这就是指该公式中的变元的“取值”不影响公式的意义。

既然我们提到了将一个变元替换为另一个变元，我们就需要对此进行一些讨论。我们定义一个记号α_t^x，表示对于公式α中的每个素公式，若变元 x 在其中自由出现，则将之替换为项 t。只替换自由出现的 x 是必要的，否则若 t 不是一个变元，则可能出现全称量词符号后面不是变元的情况，另一方面，替换约束出现的 x 也没有意义。严格地说，该记号定义如下：

定义 1.4 记号α_t^x是指：

1. 若α为原子公式，则将α中的全部 x 替换为 t 即可；

2. $(\neg\alpha)_t^x = (\neg\alpha_t^x)$

3. $(\alpha \to \beta)_t^x = (\alpha_t^x \to \beta_t^x)$

4. 若α形如$\forall y\,\beta$，则若 x 不同于 y，α_t^x为$\forall y\,\beta_t^x$；若反之，α_t^x为α不变。

这种替换并非在项 t 是任何形式的时候都是“合理”的，考虑这样一种情况：

$$(\neg\forall y\, x = y)_y^x = (\neg\forall y\, y = y)$$

替换前，变元 x 是自由出现的，替换后则变为约束出现，有时我们需要避免这种情况，为此，我们定义：

定义 1.5 称 **t 在α中可以替换 x** 是指：

1. 若α为原子公式，则恒有 t 在α中可以替换 x；

2. 若α为$(\neg\beta)$，则 t 在α中可以替换 x 当且仅当 t 在β中可以替换 x；

3. 若α为$(\beta \to \gamma)$，则 t 在α中可以替换 x 当且仅当 t 在β和γ中均可以替换 x；

4. 若α为$\forall y\,\beta$，则 t 在α中可以替换 x 当且仅当：①x 不在α中自由出现；或②y 不在 t 中出现且 t 在β中可以替换 x。

符号逻辑的体系是公理化的，这就意味着以符号逻辑为基础的推演是以

一系列逻辑公理和严格的推理规则为基础的。我们接下来列举这些公理，它们在直观意义下是显然的，其真确性是不证自明的：

第一部分：命题逻辑公理：

这部分公理我们暂不给出。事实上，可以说这部分公理的意义就在于证明命题联词直观意义的正确性和演绎定理。演绎定理将在第 3 讲中给出，至于命题联词的具体讨论放在后面，暂时我们对于这一部分公理的处理就是遵循命题及联词的直观意义，即如$\neg\neg\alpha \to \alpha$、$\neg(\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$等是显然真的(有必要强调一下所举的第二个例子，该公式及$\neg(\alpha \wedge \beta) \to (\neg\alpha \vee \neg\beta)$再加上二者的逆命题统称为**德摩根律**，是十分常用的推理步骤，集合论中也有同名的德摩根律，注意不要混淆，二者间的关系待讲到集合论德摩根律时再提)。

第二部分：全称量词的公理：

1. $\forall x\, \alpha \to \alpha_t^x$，其中 t 在α中可以替换 x；
2. $\forall x(\alpha \to \beta) \to \forall x\, \alpha \to \forall x\, \beta$；
3. $\alpha \to \forall x\, \alpha$，其中 x 不在α中自由出现。

第三部分：等词的公理：

这部分公理只在语言中有等词时才应被给出：

1. $x = x$；
2. $x = y \to \alpha \to \alpha'$，其中$\alpha$是原子公式，$\alpha'$是将$\alpha$中的若干个 x 替换为 y 得到的，不必须替换全部的 x，也可以不做替换。

对于公式α和β，如果存在一系列变元(也可以是 0 个)v_1、v_2、$\cdots$、v_n，使得$\alpha = \forall v_1 \forall v_2 \cdots \forall v_n\, \beta$，则称$\alpha$是$\beta$的一个**全称概括**（简称**概括**），特别地，β也是自身的一个全称概括。那么一阶逻辑的公理便是由前面所述三部分公理的全称概括所组成的。

第 2 讲：公理系统的概念

数学史上的第一个公理系统是古希腊数学家欧几里德（Euclid）在《几何原本》（*Elements*）一书中提出的， *Elements* 在 19 世纪末 20 世纪初之前长期作为欧洲各国的数学教材（主要是几何，但事实上它也包含几何之外的内容，例如数论），可见其影响之深。*Elements* 中的体系以今天的眼光来看是有缺陷的，这些缺陷至 1899 年希尔伯特在其《几何学基础》（*The Foundations of Geometry*）一书终得修补完毕。至于实数的公理化的历史更是曲折，我们在这里就不加介绍了。

回到公理系统一事上来。直观上说，一个公理系统就是一个公式的集合，更准确地说，由于含有自由变元的公式的意义是“不明确的”，所以应该是一个语句的集合。因此我们定义：

定义 2.1 固定一个一阶语言。一个**公理系统**即是指一个语句的集合，其中的语句则称为该系统的**公理**。

但是我们一般会对此有所要求。一个基本的要求是存在一个“方法”能够判定一个语句是否是公理。对此要求的严格定义以目前的知识无法给出，但为了便于读者理解，我们举一个例子：

考虑实数的小数表示，有的实数只有有限位，这个时候若要判定某一串数码是否有在其中出现，只需枚举；但若是无限位的小数枚举则是不可能的，这时候有两种可能：

1. 这个无限位的小数是有某种规律的，这不必须说它是循环小数，例如：0.10100100010000……也是有某种规律的。一些著名的无理数，如π，既然有定义，则在本质上它也是有某种规律的；

2. 这个无限位的小数毫无规律。这是可能的，是要以完全无规律的、混乱的方式给出各数码，既然是无规律的，例子自然无法举出，但是还是可以从直观上确认这是可能的。

显然我们希望一个公理系统或是有穷的，或是“有某种规律的”，否则我们都没有办法知道一个语句是否是公理了，这显然不可接受。这种“有某种规律”的严格名称是**可判定的**，它的具体定义需要用到递归论的知识，读者可参考相关文献。

我们接下来讨论证明。一个数学证明本质上是线性的，我们证明一个命题，又以之为基础去证明新的命题，最终指向我们所想要证明的命题。而在这些命题之间则运用合乎逻辑的推理规则从一个得出另一个。但推理总是有起点的，这些起点也就是公理，除了公理系统中的公理外，还有逻辑公理，

它们的正确性都是被假定的。

由此我们可以给出证明的定义了：

定义 2.2 从公式集Γ到公式σ的一个**证明**（或**推演**）是指一个公式的有穷序列：

$$\langle \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \rangle$$

满足$\alpha_n = \sigma$，且对于任意自然数$i \leq n$，有：

1. $\alpha_i \in \Gamma$或者它是逻辑公理；或

2. 存在$j, k < i$，使得$\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$，按这种方式得到公式是一条**推理规则**，称为**分离规则**。

如果存在从Γ到σ的证明，则称σ是Γ的一个**定理**，记作$\Gamma \vdash \sigma$。

注 这里的公式集Γ不必是一个公理系统，因为其中的公式不必是语句，所以我们定义的证明比直观意义下的证明更"广义"了些许。

给出两个基本的关于证明的事实：

定义 2.3（元定理）

1. 若$\Gamma \subseteq \Delta$，$\Gamma \vdash \sigma$，则$\Delta \vdash \sigma$；

2. $\Gamma \vdash \sigma$当且仅当存在Γ的有穷子集Γ_0，使得$\Gamma_0 \vdash \sigma$。

证 习题。 □

注 此处所写的"**元定理**"是相对于前面所定义的"定理"而言的。前面所定义的定理是以一个公式集为基础，经形式化的推演所得到的；而此处的元定理则是不依赖于公式集的，它是在形式系统之外的，经符合直觉意义下的严谨推理（而不是形式化的推演）所得出的，是讨论关于形式系统一般规律的，因此证明元定理可以使用很多数学方法（具体可以使用哪些方法涉及哲学问题），且其表述完全可以使用正常的自然语言。

我们接下来定义一致和完备两个概念：

定义 2.4 对于一个公理系统Γ，如果没有公式σ使得$\Gamma \vdash \sigma$且$\Gamma \vdash \neg\sigma$，则称它是**一致的**；如果对于每一个闭公式σ都有$\Gamma \vdash \sigma$或$\Gamma \vdash \neg\sigma$，则称它是**完备的**。

注 一致的定义可以扩展到一般的公式集而不必是公理系统，但对于完备这么做则没有什么意义。

返回到公理化本身上来，公理化实质是要把一系列关于某个对象的结论建立在一些公理的基础之上，我们希望公理所推出来的正是全部的那些结论。为此，我们定义：

定义 2.5 对于一个语句集T，如果它对推演封闭，即对于任何语句σ，若$T \vdash \sigma$则$\sigma \in T$，就称 T 是一个**理论**。若存在一个可判定的公理系统Γ使得对于任何语句σ，$\sigma \in T$当且仅当$\Gamma \vdash \sigma$，则称 T 是**可公理化的**，若Γ是有穷的，则称 T 是**可有穷公理化的**。

注意到我们要求Γ是可判定的，这正呼应了前面我们指出的一个公理系统只有是可判定的才有意义这一点。而单独对于可公理化的定义，若我们不要求可判定，那这个定义也就没有了意义，因为那样的话每一个理论 T 都将是可公理化的（T 自身便是一个符合条件的公理系统）。