"十三五"普通高等教育规划教材

DAXUE WULI SHIYAN

大学物理实验

主　编　石仁斌　宋德祝

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

"十三五"普通高等教育规划教材

大学物理实验

主　编　石仁斌　宋德祝
副主编　王印磊　殷玉琴
参　编　石宗华　陈晓钊　程传功

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书共分六章，共29个实验.第一章主要介绍了有关误差理论和数据处理方面的内容；第二章至第六章共选编了29个有关力学、热学、电磁学、光学和近代物理学等方面的实验.本书在内容上，对基础实验侧重对基本实验现象的深入分析，对综合性、设计性和研究性实验侧重学生科学实验能力、创新精神和科研素养的培训和训练.

本书可供高等院校非物理专业理工科学生使用，同时也可作为物理专业学生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验/石仁斌，宋德祝主编.--北京：北京邮电大学出版社，2018.1

ISBN 978-7-5635-5367-9

Ⅰ.①大… Ⅱ.①石… ②宋… Ⅲ.①物理学—实验—高等学校—教材 Ⅳ.①O4-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第002413号

书　　名	大学物理实验
主　　编	石仁斌　宋德祝
责任编辑	张保林
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址	www.buptpress3.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京泽宇印刷有限公司
开　　本	787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张	13
字　　数	331千字
版　　次	2018年1月第1版　2018年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-5367-9　　定价：35.00元

前　言

大学物理实验是高等学校理工科专业学生必修的基础课程，其主要任务是让学生系统地学习实验方法、仪器使用、数据处理等知识，培养学生敏锐的观察力和良好的实验习惯，提高学生发现问题、分析问题和解决问题的能力.

本书的特点是对许多传统的实验项目采用了新的实验方法、新的实验仪器.在实验中较广泛采用了新的技术，把现代技术和经典物理实验结合起来.本书注意对学生实际操作能力的训练，各个实验既注重对实验原理的理论分析，又重视对学生的实验技术的指导.实验中还编写一些思考题，以培养学生独立思考的能力.

本书共分 6 章，包括 29 个实验.第一章主要介绍了有关误差理论和数据处理方面的内容；第二章至第六章共选编了 29 个有关力学、热学、电磁学、光学和近代物理学等方面的实验.

本书由石仁斌、宋德祝主编，具体参加编写的教师有石仁斌、宋德祝、王印磊、殷玉琴、石宗华、陈晓钊、程传功等.

由于编者水平有限，书中一定还存在缺点和错误，恳请广大读者批评指正.

目　　录

第一章 绪 论

§1 怎样学好物理实验

一、大学物理实验课的教学目的

虽然物理实验必须以物理学的理论为基础，运用物理学的原理进行实验或研究，但大学物理实验教学的目的与中学阶段的物理实验教学目的是不同的."大学物理实验"是一门独立的基础课程，而不是"大学物理学"课程的分支或组成部分，也不是以验证物理定律、加强理解物理规律为主要目的.对理工科学生开设这门课程，不仅是由于物理学是一门实验科学，更重要的是物理实验本身有它一套实验知识、方法、习惯和技能，要掌握好这套实验知识、方法、习惯和技能，需要由浅入深、由简到繁加以培养和锻炼.在整个物理实验教学过程中，是以物理实验的基本技术或基本物理量的测量方法为主线，再贯穿以现代误差理论，现代物理实验仪器设备、器件的使用方法，构建成一个完整的但又不断发展的课程体系.其教学目的主要有：使学生在学习物理基础实验的同时，受到严格的训练，掌握初步的实验能力——动手能力和动脑能力，养成良好的实验习惯、严谨的科学作风以及创新精神和团队合作精神.通过实验操作，训练安装、调整和操作实验装置的技能，不仅要培养学生在实验过程中观察分析实验现象，正确处理实验数据并得出正确实验结果的能力，还要培养设计实验步骤、选取实验条件、分析实验现象、判断故障和审查数据以及撰写规范合格的实验报告等方面的能力.

二、如何学好大学物理实验

从上述对大学物理实验课程教学目的的介绍可以看出，要学好这门课程，不但要花气力、下功夫，而且要有一定的学习方法.那么，怎样才能学好这门课程呢？

第一，要注意掌握实验中所采用的实验方法，特别是基本测量方法.基本的测量方法既是经常用到的方法，也是复杂的测量方法的基础，学习时不仅要弄明白它的道理，也要逐步熟悉和记牢.任何实验方法都有它的运用条件、优点和不足，只有亲自认真做过实验才能对这些条件和优缺点有较深的印象.

第二，要有意识地培养良好的实验习惯.教材中不少地方叙述了应如何记录原始数据和处理数据，要注意记录实验的环境条件（如温度、湿度），体会如何安排实验仪器和装置，如何养成

正确的操作习惯乃至一些操作的姿势.这些良好习惯是经过多次实验后的总结,它能保证实验安全、避免差错.但是就单个习惯而言,由于它很容易明白,不难掌握,反而容易被忽视,认为其无关紧要.实际上,要真正养成良好的习惯不光是要经过多次实验,还要在每次实验中有意识地锻炼自己.

第三,要逐步学会分析实验,排除实验中出现的各种故障.实验最后一般总有数据结果,这些数据是否正确?靠什么去判断?数据的好坏又说明什么?这些问题主要是要靠分析实验本身来判断,即必须分析实验方法是否正确及其带来多大误差,仪器带来多大误差,实验环境影响有多大等.但千万别认为,实验的目的是为了做出标准数据结果.往往有学生,当实验数据与理论计算一致时,就会心满意足,简单地认为已经学好了这次实验;而一旦数据和理论计算差别较大,就感到失望,抱怨仪器装置甚至拼凑数据.这两种表现都是不正确的.实际上,任何理论公式都是一定的理论上的抽象和简化,而客观现实和实验所处的环境条件要复杂得多,实验结果必然会带来和理论公式的差异,问题在于差异的大小是否合理.所以不论数据好坏,主要是要逐步学会分析实验,找出数据好坏的原因.

当出现数据不佳时应怎样对待呢?首先,要检查自己的操作和读数.这往往要重复实验,这时关键的操作和读数一定要注意,如果操作和读数都正确,则问题可能出现在仪器和装置上.仪器的小毛病和小故障,学生要力求自己动手解决.应该说,能否发现仪器装置故障并修复是实验能力强弱的一个重要表现.

第四,每次实验要掌握好重点.实验是一件实际工作,除了重点的学习内容外还会遇到很多零散的问题,需要做一些枝节性的工作.这些工作固然要做好,但要把它们完全弄懂,时间上是不可能的,所以有一个学习重点的问题.在每次实验中应把实验中的主要精力放在实验重点上,以提高学习效率.

三、大学物理实验的基本程序

实验课的主要特点是学生在教师的指导下自己动手,并独立完成实验任务.通常每个实验的学习都要经历三个阶段:

(一)实验前的准备

实验前必须做好必要的预习,并写出预习报告.这是按质按量按时完成实验的前提.预习报告通常应体现以下内容:

① 实验目的:说明本实验的目的.

② 实验原理:在理解的基础上,用简洁的文字阐述实验原理,叙述过程中应力求做到图文并茂,包括原理图、电路图或光路图等,同时还应写出实验所用的主要公式及其适用条件.要注意的是,不应照抄书本,应用自己的语言进行表述.

③ 实验步骤:写出实验步骤,列出各步的原始数据表格.表格应简洁明了,便于并保证能完整记录数据.数据表应科学合理地体现所测物理量的单位.

④ 写出实验注意事项,特别要理解并写明仪器使用方法.

(二)实验操作

实验内容包括仪器的安装连接与调整,选择测试条件并观察实验现象,进行测量与数据记录,简单计算与分析实验结果,进行简单的误差估算等.

进入实验室应遵守《学生实验守则》,并首先核对《实验登记卡》上所填写仪器用品是否齐全完好,无误后在该卡上签名.实验过程中,对观察到的现象和测得的数据要及时进行判断,判断它们是否正常与合理.对实验过程中出现的故障,要力求自己分析原因并学会排除,不要轻易请求教师的帮助.这对提高包括观察能力、判断能力和动手能力在内的实验能力是很好的机会.

所记录的数据必须做到有效数字正确.

为了保证实验的可重复性,还要记下所用仪器的型号规格及其最小分度值,必要时还应记下相关的环境条件.

实验完毕,应先让教师检查实验数据,数据无误完备后再将仪器设备整理并放回原位.经老师检查并在《实验登记卡》签名验收后方可离开实验室.

(三) 撰写实验报告

撰写实验报告是为了训练学生以书面形式汇报实验成效的能力.实验报告要求书写清晰,字迹端正,文理通顺,条理清楚,逻辑严密,内容简明扼要,数据记录完整简洁,图表正确,结果表达正确,并对实验结果进行分析和讨论,提出实验体会或对实验的改进意见和建议.特别要注意,所有的图表必须要有编号和名称,作图应使用规范的作图纸,要注意结果的有效数字的正确性;对实验结果的分析讨论和实验体会切忌流于形式,而应具体明确,有针对性.

四、物理实验中应注意的安全事项

实验过程中应时时注意人身与仪器安全.仪器的安装与使用必须符合有关技术规范.在操作前应了解所用仪器各旋钮及按键的作用.特别要注意以下事项.

① 正确使用电源.未经实验教师同意,不得随意打开电源.

② 接、拆线路必须在断电状态下或消除静电后方可进行.

③ 改变电路的连接方式或改变电表量程之前,必须断开电源;改接电路后,必须再请指导教师检查无误后方可重新通电.

④ 不得随意搬动与实验无关的仪器,不得随意调换仪器.

⑤ 在相关实验过程中,还应注意防火、防水或防强光.

§2 测量与误差

测量误差是一门专门的科学，深入讨论它，需要有丰富的实验经验和较多的数学知识. 这里只介绍有关测量误差的基本知识，重在理解其物理内容，学会简单的计算，领会误差分析的思想对于做好实验的意义.

一、物理实验与测量误差

实验总是根据所要求的精确度 —— 对测量结果误差限度的一定要求，来制订方案并选用仪器的. 在一定的要求下，还要以最小的代价来取得最好的结果，不能要求仪器是越高级越好，环境条件(如恒温、恒湿)是越稳定越好，测量次数是越多越好，等等. 这样的要求是不实际或是浪费的. 测量结果的误差是各个因素所引起的误差总和. 减小某些因素所引起的误差，代价较小；而减小另一些因素所引起的误差，所需的代价可能很大. 为了提高测量的精确程度，往往是着力于减小某一二项主要的误差. 因此要根据要求和误差的考虑进行合理的设计及选择方案和仪器. 这就需要学习误差的有关知识.

二、测量误差的基本知识

(一) 真值与测量误差

物理实验离不开测量. 各被测量量在实验时均有不以人的意志为转移的真实大小，此值叫被测量量的真值. 因测量仪器、实验条件及种种因素的局限，测量是不能无限精确的，即真值是无法得到的. 定义测量值减去真值的差为测量值的误差，即

$$误差(\delta) = 测量值(x) - 真值(a) \tag{1-1}$$

显然，误差可正可负，正误差表示测量值偏大，负误差表示测量值偏小.

误差公理：误差存在于一切测量中，而且贯穿于测量过程的始终.

测量告知我们关于某物的属性. 它可以告诉我们某物体有多重，或者有多热，或者有多长. 测量就赋予这种属性一个数，即测量就是把待测物理量与作为计量单位的同类已知量相比较，找出待测物理量是单位的多少倍的过程. 这个倍数称为测量的读数. 把读数加上单位记录下来就是数据.

测量总是用某种仪器来实现的. 尺子、秒表、称重秤，以及温度计等都是测量仪器.

由于真值不能确切知道，测量误差也只能估计，所以测量的任务如下.

① 给出被测量量真值的最佳估计.

② 给出真值最佳估计值的可靠程度的估计.

(二) 系统误差与随机误差

误差根据其性质分为两类：随机误差和系统误差.

1. 系统误差

系统误差总是使测量结果向一个方向偏离，其数值一定或按一定规律变化，所以不能用多次测量取平均的方法消除它. 但在实验中根据具体情况进行分析，找出其来源后，就可以采用一定的方法去减小乃至消除它的影响或对测量结果进行修正. 它的来源有以下几个方面：

(1) 仪器误差

这是由于仪器本身的缺陷或没有按规定条件使用仪器而造成的. 例如，天平左、右臂长不完全相等引入的误差，可用复称法消除；又如，仪器零点不准，可进行修正；又如，在 20 ℃ 下标定的标准电阻在 30 ℃ 下使用；等等.

(2) 理论(方法)误差

这是由测量所依据的理论公式本身的近似性，或实验条件不能达到理论公式所规定的要求，或测量方法所带来的. 例如，理论公式中没有把散热考虑在内，没有把接线电阻和接触电阻考虑在内；单摆周期公式的成立条件是摆角趋于零，这在实际上是达不到的；用伏安法测电阻，结果受电表内阻的影响；等等.

(3) 个人误差(不是粗差)

这是由于观测者本人的反应速度和固有习惯造成的. 例如，用停表时，总是过早或过迟按下；判断指针式仪表的零点时，总是偏左或偏右.

系统误差有些是定值的，如游标卡尺的零点不准；有些是积累性的，如用受热膨胀的钢质米尺进行测量，其指示值就小于真实值，且误差值随待测长度成比例增加；还有些是周期性的，如仪器的转动中心与刻度盘的几何中心不重合造成的偏心差；还有一些系统误差是按其他特定规律变化的. 找出其来源后，就可以采用一定的方法去消除它的影响或对测量结果进行修正.

研究系统误差的主要目的如下.

① 分析系统误差的来源，设计实验方案消除或削减它.

② 估计残存的系统误差的可能范围.

2. 随机误差

在测量时，即使排除了系统误差(实际是不可能也不必要绝对排除)，进行了精心的测量，仍将存在一定的误差. 这种误差是由于人的感官灵敏程度和仪器精密程度有限，周围环境的干扰及随测量而来的其他不可预测的随机因素造成的. 如用米尺测量一组振幅，每次判断振幅的大小及用尺去对准它并估计毫米以下的一位读数，都有一定的随机性，都会带来误差；又如，测量时温度的微小起伏、气流的扰动等会造成测量结果的无序变化；不规则的脉动和杂散电磁场也会影响精密测量；等等.

这些由于随机的或不确定的因素所造成的每一次测量值的无规则涨落叫随机误差或偶然误差.

随机误差的存在使每次测量值偏大或偏小是不定的，但它服从一定的统计规律. 常见的一种是比真值大或小的测量值出现的概率相等，而且误差较小的数据比误差较大的数据出现的概率大；同时，绝对值很大的误差趋于零，即随机误差具有单峰性、对称性和有界性，如图 1-1 所示.

所以，增加测量次数，可以减小随机误差. 这就是在实际工作中常用重复多次测量的依据，

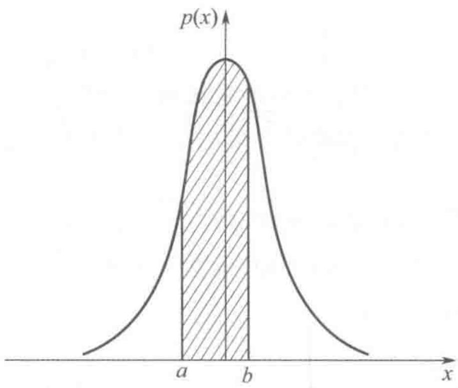

图 1-1　连续型随机变量的概率密度函数

但随机误差是不能消除的.

总之,系统误差与随机误差的性质不同,来源不同,处理方法也不同.测量精密度高,是指随机误差小;测量准确度高,是指系统误差小;而精确度(简称为精度)是把两者都包括进去了.影响测量结果精度的,有时主要是随机误差,有时主要是系统误差,对于每项具体工作要进行具体分析.测量结果的总误差是两种误差的代数和.

有时候,系统误差与随机误差是加以区别、分别处理的,特别是在精密测量时.而有时只是为了说明总误差的限度,就不加以区别,如有些不太精密的仪器的最大允许误差就既包含系统误差又包含随机误差.而有时候也难以区别它们.例如,尺子刻度的不均匀性,球不圆等,对于尺上或球上的某个部位,它与准确值或平均值的偏差是确定的;但是对不同位置,又有随机性,对这类测量对象的不确定性以及一些有抵消性的误差,可以当作随机误差来处理,以多次测量表示其结果及计算误差.

除上述两类误差之外,还可能发生错误,也称粗差,如读错、记错等.这主要是由于仪器损坏、设计错误、操作不当或粗心大意而引起.一般粗差值大大超过系统误差或随机误差.粗差不属于误差范畴,不仅大大影响测量成果的可靠性,甚至造成返工.因此必须采取适当的方法和措施,杜绝错误发生.

三、直接测量结果及其随机误差的估计

(一) 随机变量及其概率分布

在概率论中,把在一定条件下,可能发生也可能不发生或者可能出现多种结果的现象称为随机现象.在一定条件下,对随机现象进行试验的每一种可能的结果称为随机事件.描述随机事件的变量称为随机变量.一般常用希腊字母 ξ,η 等表示随机变量,英文字母 x,y 等表示随机变量的取值.物理量的测量具有随机性,因此物理量的实验观测值就可用随机变量(如 ξ,η) 来描述.

要完整地描述一个随机变量,除了给出它可能取的全部值(或取值范围) 之外,还必须给出每种可能取值出现的可能性,即出现概率的大小,并写出它的概率密度函数或分布函数.

对于位于某一区间$[a,b]$ 上的连续型随机变量 ξ,概率可表示为

$$P\{a \leqslant \xi \leqslant b\} = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x \tag{1-2}$$

该概率即为区间$[a,b]$上概率密度函数 $p(x)$ 曲线下所包围的面积(见图 1-1). 如果将 ξ 的取值扩大到整个可能的取值范围,则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{1-3}$$

这就是连续型概率密度函数的归一化条件,它表示所有可能取值的概率等于 1.

(二) 随机误差的统计分布规律

随机误差是一种随机变量,它服从某种统计分布规律,可以用相应分布的概率密度函数或分布函数来描述. 随机误差的常用分布有二项分布、正态分布、泊松分布、均匀分布、指数分布等. 在物理实验中等精度测量的随机误差多数服从正态分布(又称高斯分布),正态分布的概率密度函数可写为

$$p(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1-4}$$

正态分布的概率密度函数式(1-4) 中,参数 σ 直接反映了曲线的形状特征. 由于概率密度函数的归一化特性(各种误差 δ 出现的总概率为 100%),$p(\delta)$ 曲线下所围的面积恒等于 1,σ 越小,图 1-2 中曲线的峰值就越高,分布曲线就越陡,测量的重复性越好,误差 δ 的分散性越小. 所以,σ 的大小直接反映了测量数据分布的离散情况,称为正态分布的标准误差,而将 σ^2 称为正态分布的方差.

从图 1-2 的正态分布曲线可以看出,服从正态分布的随机误差具有下面的一些特性.

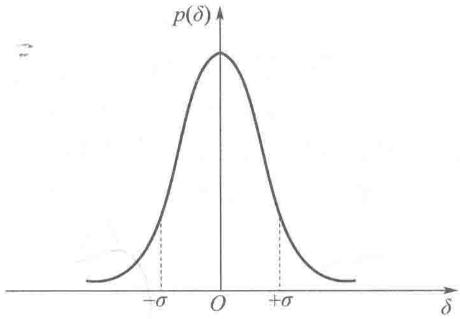

图 1-2　测量误差位于$(-\sigma \sim +\sigma)$ 范围的概率为 68.3%

① 单峰性 —— 绝对值小的误差出现的概率与绝对值大的误差出现的概率相比占多数.

② 有界性 —— 在一定测量条件下,误差的绝对值不超过一定界限.

③ 对称性 —— 绝对值相等的正、负误差有相等的概率.

④ 抵偿性 —— 由于存在对称性,误差的算术平均值随着测量次数的增多而趋于零,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = 0$$

(三) 以算术平均值代表测量结果

因真值不能确切知道,对某一物理量进行多次测量的结果不会完全一样,如何最好地表示测量结果,使它最合理地代表真值?

常用的是，在测量条件不变的情况下，以多次(n)次测量的算术平均值作为测量结果，是真值的最好近似：设 n 次测量值为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$，真值为 a，则由上述关于随机误差的性质可知，测量次数多时，取平均的结果是随机误差的影响可以抵消一些，所以，n 越大，算术平均值越接近真值. 当然，实际上测量次数都是有限的，这时算术平均值不是真值，但它是最接近真值的测量值，称为测量的最佳值. 所以可以用算术平均值作为真值的最佳估计：

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n} \tag{1-5}$$

另外，当测量值的误差中包含有已知的系统误差时，则要用算术平均值加上修正值作为被测量真值的最佳估计(修正值与系统误差等值反号).

(四) 多次直接测量结果随机误差的估计

1. 正态分布下误差的概率水平

关于随机误差的分布规律及处理方法，有系统的理论. 这里只大致介绍一下随机误差的正态分布规律及标准偏差的统计意义.

大量实践证明，对某一个物理量进行重复多次测量，其结果服从一定的统计分布规律. 当测量次数很多时其其表现为正态分布或称为高斯分布. 从随机误差的正态分布曲线中，可以求出测量误差 δ 落在 $[-\beta,\beta]$ 范围内的概率为

$$\begin{aligned}P\{-\beta\leqslant\delta\leqslant\beta\}&=\int_{-\beta}^{\beta}p(\delta)\mathrm{d}\delta\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\beta}^{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\delta\end{aligned}$$

上式右边的积分称为拉普拉斯积分. 据此可以算得：当测量误差落在 $[-\sigma,\sigma]$ 范围内的概率为 $P\{-\sigma\leqslant\delta\leqslant\sigma\}=0.683=68.3\%$，即在正态分布曲线中，测量误差位于 $[-\sigma,\sigma]$ 范围内的曲线所包围的面积(见图 1-2) 占总面积的 68.3%. 或者说，在一组等精度的重复测量中，其中任一次测量的误差位于 $[-\sigma,\sigma]$ 范围内的概率为 68.3%.

同样对于平均误差 η，其概率水平为 57.5%. 而对于极限误差 3σ，其概率水平为 99.7%.

2. 随机误差的表示

由误差的定义知，因真值不能确定，所以误差也只能估计. 估计随机误差的方法有许多种，常用标准偏差 σ、平均误差 η 和极限误差 3σ 来表示随机误差的大小. 标准偏差和各次测量值的误差有着完全不同的意义，标准偏差不是一个具体的测量误差，它反映的是在相同条件下进行一组测量的随机误差的概率分布情况，只具有统计性质的意义. 平均误差和极限误差也只具有统计性的意义，它们都是在某一概率水平下划分出来的误差区间.

由误差理论可以证明，有限次观测中的某一次测量结果的标准偏差(也称为测量列的标准偏差)为

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{1-6}$$

标准偏差 σ_x 与标准误差 σ 有一样的概率含义，即在一组等准确度的重复测量中，其偏差位

于($-\sigma_x \sim \sigma_x$)范围内的概率为68.3%.

n次测量结果平均值的标准偏差为

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1-7}$$

式(1-7)表明:多次测量减小了随机误差.由于随机误差本身是一个估计值,所以其结果一般只取一位或两位数字.平均值$\bar{x}$也是一个随机变量,随n的增减而变化,显然$\bar{x}$肯定比每一次测量值x_i误差更小,更接近真值.$\sigma(\bar{x})$表示在$[\bar{x} \pm \sigma(\bar{x})]$范围内包含真值$a$的可能性是68.3%.

估计随机误差的另一种方法是以算术平均偏差来表示,即

$$\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}| \tag{1-8}$$

在测量次数很多时,两种随机误差之间存在关系:

$$\sigma_x \approx 1.25\eta \tag{1-9}$$

增加测量次数有利于减小测量误差,但测量次数也不是越多越好,一方面,它增加测量时间,这在实验环境不稳定时是对测量结果不利的;另一方面,有时在实验过程中也不必要测量太多次.一般地,在随机误差较大的测量中要多测几次,否则可少测几次.一般实验取4到10次为宜.

实际工作中,有时测量不能重复,有时不需精确测量,便采取一次测量并估计误差.估计误差要根据仪器的分度值大小、测量的环境条件等具体情况考虑,要尽量符合实际.一次测量估计的误差可以包括随机误差和系统误差,要根据情况进行处理.

(五)置信度与显著性水平

在误差理论中,一般将表示随机误差分布的概率称为置信度、置信水平或置信概率P,其对应的误差区间称为置信区间.对于服从正态分布的随机误差而言,置信概率P与置信区间β之间满足拉普拉斯积分关系式.因此,标准误差σ、平均误差η和极限误差3σ所对应的置信度,都是一般误差置信区间中的一些特例.通过拉普斯积分表,很容易查出任意置信区间β所对应的置信概率P.

在误差处理中,有时还用显著性水平α来表示结果的可靠程度,α与P之间的关系为

$$\alpha = 1 - P \tag{1-10}$$

由式(1-10)可知,一个误差表示所对应的置信度越高,其显著性水平就越小,因此表示的结果就越可靠.

测量次数较少时,误差的分布就不是正态分布,而是服从一种新的分布形式——t分布,也叫泊松分布.t分布的曲线与正态分布相似,也是左右对称的,但它较正态分布矮而宽,如图1-3所示.也就是说,在置信水平相同的情况下,t分布的误差较正态分布大.这种差别在n较小时比较明显,但随着n的增大将逐渐减小.当$n > 30$时二者之间已没有太大的区别了.当测量次数趋于无限大时,t分布过渡到正态分布.

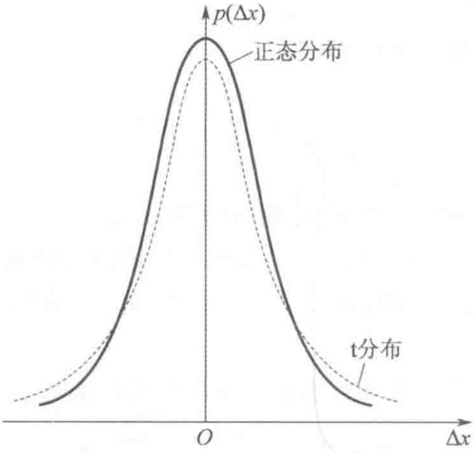

图 1-3　t 分布概率密度函数的曲线

（六）间接测量结果误差的计算

由直接测量的量代入公式计算，得到的结果称为间接测量结果．直接测量有误差，所以间接测量也会有误差．这就是误差的传递．

1．误差传递的基本公式

设 $N=f(x,y,z,\cdots)$，$x,y,z,\cdots$ 为独立的物理量（两个量相互独立是指一个量的变化与另一个量的变化完全无关），则有全微分：

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots \tag{1-11}$$

式(1-11) 表示，当 $x,y,z,\cdots$ 有微小变化 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z,\cdots$ 时，N 改变 $\mathrm{d}N$．通常误差远小于测量值，把 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z,\cdots,\mathrm{d}N$ 看作误差，式(1-11) 就是误差传递公式了．

上述误差传递公式在函数是加减的形式时较适用．当函数是乘除形式时，通过对函数求对数后再求全微分得到误差传递的基本公式：

$$\ln N=\ln f(x,y,z,\cdots)$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=\frac{\partial \ln f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \ln f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial \ln f}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots \tag{1-12}$$

式(1-11) 和式(1-12) 中的每一项叫分误差，每一项中前面的偏导数叫误差传递系数．

可见，一个间接测量量的总误差不仅取决于各独立量的测量误差的大小，而且还取决于误差传递系数．

2．随机误差的传递和合成

由各部分的分误差组合成总误差，就是误差的合成．各个独立量的测量结果的随机误差是以一定方式合成的．上述误差传递公式中也包括误差的合成．如果用标准偏差代表随机误差，可以证明，它们的合成方式是方和根合成，即

$$\sigma(\overline{N})=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma^2(\overline{x})+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma^2(\overline{y})+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\sigma^2(\overline{z})+\cdots} \tag{1-13}$$

或
$$\frac{\sigma(\bar{N})}{N}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2\sigma^2(\bar{x})+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2\sigma^2(\bar{y})+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right)^2\sigma^2(\bar{z})+\cdots} \tag{1-14}$$

总之，加减法用绝对误差平方和，乘除法用相对误差平方和，都取正号.

归纳起来，求间接测量结果误差(标准差)的步骤如下.

① 对函数求全微分(或先取对数再求全微分).

② 合并同一变量的系数.

③ 将微分号变为误差号，求平方和. 注意各项均用"+"号相连.

例 用流体静力称衡法测固体密度的公式为 $\rho=\frac{m}{m-m_1}\rho_0$，测得 $m=(27.06\pm0.02)\text{g}$，$m_1=(17.03\pm0.02)\text{g}$，$\rho_0=(0.9997\pm0.0003)\text{g/cm}^3$，求 ρ 的误差.

解 (1) 取对数求全微分：
$$\ln\rho=\ln m-\ln(m-m_1)+\ln\rho_0$$
$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{\mathrm{d}m}{m}-\frac{\mathrm{d}m-\mathrm{d}m_1}{m-m_1}+\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\rho_0}$$

(2) 合并同一变量系数：
$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{-m_1}{m(m-m_1)}\mathrm{d}m+\frac{1}{m-m_1}\mathrm{d}m_1+\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\rho_0}$$

(3) 将微分号改为误差号，平方相加再开方：
$$\frac{\sigma(\bar{\rho})}{\rho}=\sqrt{\frac{m^2}{m^2(m-m_1)^2}\sigma(m)^2+\frac{1}{(m-m_1)^2}\sigma(m_1)^2+\frac{\sigma^2(\rho_0)}{\rho_0^2}}$$
于是，可求得 $\sigma(\bar{\rho})\approx0.006\ \text{g/cm}^3$.

根据误差合成公式，在误差合成时，起主要作用的常常只是其中一二项或少数几项分误差. 当分误差对总误差的贡献很小时，例如占总误差的 1/10 以下，就可把这项分误差略去. 由于总误差来自各项分误差平方和相加，所以通常某一项分误差小于最大分误差的 1/3 以下时就可以略去. 这在分析误差、计算误差时很有意义，可简化计算.

(七) 测量结果的表示方法之一 —— 绝对误差与相对误差

通常把测量结果表示为 $\bar{x}\pm\Delta x$ 的形式，其中 $\bar{x}$ 是测量值，它可以是一次测量值，也可以是多次测量的平均值，Δx 是绝对误差(直接测量量或间接测量量的). 例如，测得一长度为 $l=(8.05\pm0.08)$ cm. 这个表示不能理解为 l 只有两个值，而是表示它在 8.05 cm 附近正、负 0.08 cm 这个范围内包含真值的一定的可能性(概率). 所以，不排除多次测量中有部分测量值在 $\bar{x}\pm\Delta x$ 之外. 不同的估计方法得到的 Δx 表示在 $\bar{x}\pm\Delta x$ 范围内包含真值的不同的概率，或者说，对于不同的置信度，Δx 的大小是不同的. 这个问题后面再讨论.

绝对误差常常不能代表真正的误差大小，为此引入相对误差的概念：相对误差也叫百分误差，用 $\frac{\Delta x}{x}$ 来表示. 如上例中的相对误差为 $\frac{0.08}{8.05}\approx1\%$.