新世纪高等学校规划教材 · 数学系列

# 工程数学基础

主　编◎梁显丽　王瑞星　晓　红
副主编◎杨海波　刘新元

GONGCHENG SHUXUE JICHU

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校规划教材·数学系列

# 工程数学基础

主　编◎梁显丽　王瑞星　晓　红
副主编◎杨海波　刘新元

GONGCHENG
SHUXUE JICHU

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

工程数学基础/梁显丽，王瑞星，晓红主编．—北京：北京师范大学出版社，2018.5

新世纪高等学校规划教材·数学系列

ISBN 978-7-303-22314-5

Ⅰ．①经…　Ⅱ．①梁…　②王…　③晓…Ⅲ．①工程数学－高等学校－教材　Ⅳ．①TB11①

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 102677 号

营 销 中 心 电 话　010-62978190　62979006
北师大出版社科技与经管分社　http：//jsws.bnupg.com
电　子　信　箱　kjjg@bnupg.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×1092 mm　　1/16
印　　张：15.5
字　　数：323 千字
版　　次：2018 年 5 月第 1 版
印　　次：2018 年 5 月第 1 次印刷
定　　价：36.80 元

策划编辑：雷晓玲　　　　责任编辑：雷晓玲
美术编辑：刘　超　　　　装帧设计：刘　超
责任校对：赵非非　黄　华　　责任印制：赵非非

# 前 言

本教材结合工程案例讲述数学理论，利用数学理论解决实际问题，在编写过程中，作者充分吸收国内外优秀教材之精华，以服务专业教学为导向，结合职业院校工程类生源的实际情况和工程类各个专业的需求，编排了本部教材的主要内容：函数与极限，一元函数微分学，一元函数积分学，空间解析几何与向量代数，线性代数基础知识，概率统计基础知识，数学实验等. 章后附有精心设计的习题，题型全面，囊括了教学中所有的重点.

编写本教材前进行了充分的调研，挖掘到微积分和空间解析几何与向量代数在建筑力学、理论力学、结构力学、电工技术、物理等课程中用到；概率统计基本知识在建筑材料、工程经济与管理、建筑结构设计原理、测量学等课程中用到；线性代数基本知识在建筑力学、理论力学、测量学等课程中用到. 所以本教材为工程类专业开设后续课程：建筑力学、理论力学、结构力学、电工技术、物理、建筑材料、工程经济与管理、建筑结构设计原理、测量学打基础.

本教材具有内容精简，注重理论联系实际和概念的描述，略去理论证明，整体思路清晰，结构合理，数学实验方法融入课程等特色.

编写的具体分工：本书是由梁显丽组织编写的，并编写了第 6 章、第 7 章和附录，王瑞星编写了第 2 章和第 4 章，晓红编写了第 5 章，杨海波编写了第 1 章和第 3 章的前 5 节，刘新元编写了第 3 章的第 6 节.

由于时间仓促，作者水平有限，书中难免会出现疏漏和不妥，敬请读者谅解.

编　者

2018 年 4 月

# 目 录

# 第1章 函数与极限

【学习目标】

- 了解函数的定义、性质，了解反函数与复合函数；
- 熟练掌握数列和函数极限的定义及性质；
- 熟练应用极限的运算法则进行极限计算；
- 了解无穷小、无穷大及其性质，熟练应用两个重要极限；
- 了解函数的连续性，熟练判断函数的间断点.

通过本章的学习，使学生理解函数与极限的基本概念、性质，掌握极限的基本计算方法，培养学生运用极限思想解决实际问题的能力.

## 1.1 函数

### 1.1.1 函数的定义

**定义1** 设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，$D$ 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 $y$ 按照一定的法则总有确定的值和它对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数，记为 $y=f(x)$. 当 $x$ 取数值 $x_0\in D$ 时，与 $x_0$ 对应的 $y$ 的数值称为函数在 $x_0$ 处的函数值，记为 $f(x_0)$. 而当 $x$ 取遍 $D$ 内的每一个值时，对应的函数值全体组成的集合称为函数 $f(x)$ 的值域，记为 $R_f$，即 $R_f=\{y|y=f(x),x\in D\}$. 其中，$D$ 为函数 $f(x)$ 的定义域，记为 $D_f$，$x$ 称为自变量，$y$ 称为因变量.

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值只有唯一的一个，称这种函数为单值函数；否则，如果有多个函数值与之对应，就称之为多值函数. 以后凡是没有特别说明时，函数都是单值函数.

点集 $G=\{(x,y)|y=f(x),x\in D_f\}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图形.

函数 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，其图形为抛物线，如图1-1所示.

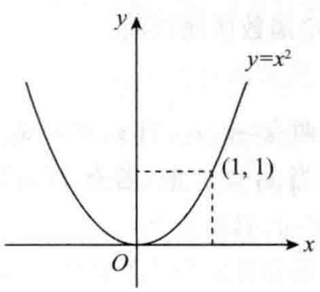


图 1-1

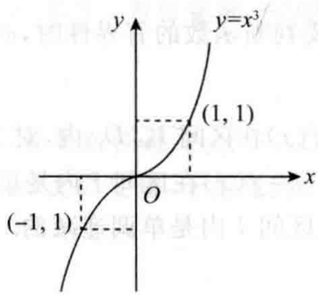


图 1-2

函数 $y=x^3$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，其图形如图 1-2 所示.

狄利克莱函数：

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{0,1\}$.

通过上述分析，可以看出，确定函数的因素有两个：

(1)对应法则 $f$；

(2)定义域 $D_f$.

于是，判断两个函数是否相同，只需观察这两个因素是否相同就可以了.

**例 1** 分析下列各组函数是否相同.

(1) $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$；　(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$；

(3) $f(x)=x-3$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$；　(4) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $g(x)=x(x-1)^{\frac{1}{3}}$.

**解** (1)不相同. $D_f=\{x\mid x\neq 0,x\in\mathbf{R}\}$，$D_g=\{x\mid x>0,x\in\mathbf{R}\}$，两个函数定义域不同，因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

(2)不相同. $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，$g(x)=x$，两个函数对应法则不同，因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

(3)不相同. $D_f=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$，$D_g=\{x\mid x\neq -3,x\in\mathbf{R}\}$，两个函数定义域不同，因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

(4)相同. 这组函数定义域相同，均为 $\mathbf{R}$，对应法则也相同，因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同.

## 1.1.2 函数的几种特征

**1. 有界性**

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I(I\subseteq D_f)$ 内有定义，如果存在一个正数 $M$，对于所有的 $x\in I$，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 内有界，否则无界.

例如，判断函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是否有界，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$内无界，这是因为任取 $M(M>1)$，由于 $\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$，故当 $x_1=\dfrac{1}{2M}$ 时，$f(x_1)=\left|\dfrac{1}{\frac{1}{2M}}\right|=2M>M$. 而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$[1,+\infty)$内有界.

由此可见，要判断函数的有界性时，必须事先给定函数所属区间.

**2. 单调性**

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I\subseteq D_f$ 内，对于 $I$ 内任意两点 $x_1,x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，若有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 内是单调递增的；当 $x_1<x_2$ 时，若有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 内是单调递减的.

**例2** 讨论函数 $y=x^2$ 的单调性.

**解** 函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内单调递增. 这是因为在区间 $[0,+\infty)$ 内任取两点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，有 $f(x_2)-f(x_1)=x_2{}^2-x_1{}^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$. 类似地，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 内单调递减.

通过本例可以看出，要想根据函数单调性的定义判断函数单调性，必须指定函数所在区间，同一函数在不同区间的单调性可能不一致.

**3. 奇偶性**

对于函数 $y=f(x)$，其定义域 $D_f$ 关于坐标原点对称.

(1)如果对于任意的 $x\in D_f$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

(2)如果对于任意的 $x\in D_f$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 $y$ 轴对称，奇函数的图形关于原点对称. 通过奇偶性的定义可以看出，判断函数的奇偶性之前必须先考虑其定义域是否关于坐标原点对称.

**例3** 讨论函数 $f(x)=x^5-3x^3$ 的奇偶性.

**解** 因为 $f(-x)=(-x)^5-3(-x)^3=-x^5+3x^3=-f(x)$，

所以函数 $f(x)=x^5-3x^3$ 是奇函数.

**4. 周期性**

设函数 $y=f(x)$，若存在 $T\in\mathbf{R}$ 且 $T\neq 0$，对于每一个 $x\in D_f$，有 $(x+T)\in D_f$，且满足 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是周期函数，$T$ 为 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期是指周期函数的最小正周期.

例如，$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 以 $2\pi$ 为周期；$y=\tan x$ 与 $y=\cot x$ 以 $\pi$ 为周期.

## 1.1.3 反函数与复合函数

**1. 反函数**

在研究同一变化过程中两个变量之间的依赖关系时，根据实际情况，需要设定其中一个为自变量，另一个为因变量(函数).

例如，在自由落体运动中，我们选定时间 $t$ 为自变量，物体下落的路程 $s$ 为因变量，$s$ 与 $t$ 的依赖关系为：

$$s=\frac{1}{2}gt^2(t\geqslant 0)，记作\ s=s(t).$$

而反过来，如果要求由下落的路程来计算下落的时间，那么 $s$ 为自变量，$t$ 为因变量，这样 $t$ 是 $s$ 的函数，记作 $t=t(s)$，它们的依赖关系为 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$.

**定义2** 设 $y=f(x)$ 的定义域为 $D_f$，值域为 $R_f$，如果对任意的 $y\in R_f$，$D_f$ 内只有一个数 $x$ 与 $y$ 对应，并适合 $f(x)=y$，此时把 $y$ 看作自变量，$x$ 为因变量，于是得到一个新函数，称此函数为直接函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

由反函数定义我们可以得到求反函数的步骤：

(1)由函数 $y=f(x)$ 解出 $x$，得到所求函数的反函数 $x=f^{-1}(y)$；

(2)习惯上,将 $x,y$ 互换位置,得 $y=f^{-1}(x)$.

**例 4** 求 $y=3x+5$ 的反函数.

**解** 由 $y=3x+5$ 得 $x=\frac{y-5}{3}$,互换 $x,y$ 位置,得 $y=\frac{x-5}{3}$,所以 $y=3x+5$ 的反函数是 $y=\frac{x-5}{3}$.

在平面直角坐标系中画出 $y=3x+5$ 及其反函数 $y=\frac{x-5}{3}$的图像,我们发现两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称,如图 1-3 所示. 由此,反函数与直接函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

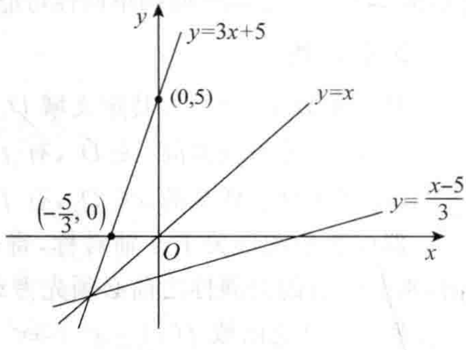


图 1-3

根据反函数的定义知,如果函数 $y=f(x)$有反函数,那么 $x$ 与 $y$ 是一一对应的,即函数 $y=f(x)$存在反函数的充分必要条件是:$x$ 与 $y$ 取值是一一对应的. 而单调函数的自变量与因变量是一一对应的,于是有以下定理.

**反函数存在定理** 单调函数具有反函数,即若函数 $y=f(x)$,$x\in D_f$ 是单调增加(减少)的,则存在反函数 $x=f^{-1}(y)$,$y\in R_f$,且该反函数也是单调增加(减少)的.

**2. 复合函数**

在同一现象中,两个变量的联系有时不是直接的,而是通过另一个变量间接联系起来的.

例如,有一个质量为 $m$ 的物体沿直线运动,速度为 $v=gt$,其中 $g$ 是重力加速度,而它的动能 $E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mg^2t^2$,现在抽取其中实际意义,便得这样两个函数:

$$E=\frac{1}{2}mv^2,v=gt.$$

将 $v=gt$ 代入到 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 中去,就得到 $E$ 通过中间变量 $v$ 而成为 $t$ 的函数,这种形式的函数就是复合函数.

**定义 3** 设函数 $y=f(u)$的定义域为 $D_f$,函数 $u=g(x)$的定义域为 $D_g$,如果 $u=g(x)$的值域 $R_g\subseteq D_f$,那么就称 $y=(f\cdot g)(x)=f[g(x)]$为定义在 $D_g$ 上由函数 $y=f(u)$经 $u=g(x)$复合而成的复合函数,$u$ 称为中间变量.

注意:不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数,如 $y=\arcsin u$,$u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数,这是因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,$u\geqslant 2$,全部落在 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,1]$之外,使得 $y=\arcsin(2+x^2)$没有意义.

## 1.1.4 初等函数

我们常见的函数大多都是初等函数,构成初等函数的元素是中学阶段详细讲解过的基本初等函数,基本初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角

函数.基本初等函数经过有限次四则运算和复合得到的能够用一个解析表达式表示的函数称为初等函数.

# 1.2　极限的概念

## 1.2.1　数列的极限

**1. 数列**

**定义1**　数列就是按照正整数增大的顺序排成的一列数,如:

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \cdots, u_n, \cdots$$

可简记作$\{u_n\}$或数列$u_n$.数列中的每一项称为数列的项,第$n$项$u_n$称为数列的通项或一般项.

**2. 举例**

(1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

(2) $\{2n-1\}: 1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1, \cdots$

(3) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

(4) $\{(-1)^{n+1}\}: 1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$

以上都是数列的例子,它们的一般项分别为$\frac{1}{n}, 2n-1, \frac{n}{n+1}, (-1)^{n+1}$.

数列$\{u_n\}$可以看作自变量为正整数$n$的函数,记作:$u_n=f(n)$,它是一个特殊的函数,因为它的定义域是全体正整数,当自变量$n$依次取1,2,3等一切正整数时,对应的函数值就排列成$\{u_n\}$.

观察以上4个数列,我们发现当数列的项数$n$无限增大时,对应的$\{u_n\}$的变化趋势是不同的,数列(1)和数列(3)分别无限接近于常数0和1;数列(2)随着$n$的增大将无限增大;数列(4)则随着$n$的增大往返跳跃的取1和$-1$两个数值,这种数列的变化趋势,就是我们关心的数列的极限,下面我们给出数列极限的定义.

**3. 数列极限定义及性质**

**定义2**　设有数列$\{u_n\}$与常数$A$,若当$n$无限增大时,$u_n$无限的接近于常数$A$,则称$A$为数列$\{u_n\}$的极限,记作:$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$或$u_n\to A(n\to\infty)$,也称数列$\{u_n\}$收敛于$A$.

如果数列没有极限,就说数列是发散的.

按上述定义,我们上面几个数列的敛散性分别是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$,而数列$\{2n-1\}$与$\{(-1)^{n+1}\}$是发散的.

**定理1**(极限存在的唯一性)　若数列$\{u_n\}$收敛,则极限值是唯一的.

**定义3**　设$M$为任意常数,当数列$\{u_n\}$的项数$n$无限增大时,它的所有项都满足不等式

$|u_n|\leqslant M$,就称数列$\{u_n\}$是有界的,反之数列无界.

**定理 2**(收敛数列的有界性)　如果数列$\{u_n\}$收敛,那么数列$\{u_n\}$一定有界.

注意:数列$\{u_n\}$收敛一定有界,但是数列$\{u_n\}$有界却不一定收敛,例如数列$\{(-1)^{n+1}\}$中$|(-1)^{n+1}|\leqslant 1$,所以数列有界,但是这个数列是发散的.

## 1.2.2　函数的极限

前面讲了数列的极限,把数列看作自变量为正整数 $n$ 的函数 $u_n=f(n)$,那么函数 $u_n=f(n)$的极限为 $A$ 表述为:当自变量 $n$ 取正整数,且 $n\to\infty$时,对应的函数值 $f(n)$无限趋近于 $A$. 把自变量 $n\to\infty$的特殊情况一般化,就有函数极限的一般概念:在自变量的某一变化过程中,如果对应的函数值无限接近某个确定的数,那么这个确定的数就称作在这一变化过程中函数的极限. 由于自变量的变化过程不同,函数的极限就表现为不同的形式,下面主要研究函数极限的两种形式:当自变量 $x$ 的绝对值$|x|$无限增大($x\to\infty$)和 $x$ 无限接近于有限值 $x_0$($x\to x_0$)时,对应函数值 $f(x)$的变化趋势.

**1. $x\to\infty$时,函数 $f(x)$的极限**

**定义 4**　设函数 $f(x)$,如果当 $x$ 的绝对值$|x|$无限增大时,函数 $f(x)$无限接近某个确定的常数 $A$,则称 $A$ 为函数 $f(x)$当 $x$ 趋于无穷大($x\to\infty$)时的极限,记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

上述定义中:

(1)如果 $x>0$ 且无限增大时,函数 $f(x)$无限接近某个确定的常数 $A$,则称 $A$ 为函数 $f(x)$当 $x$ 趋于正无穷($x\to+\infty$)时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

(2)如果 $x<0$ 且$|x|$无限增大时,函数 $f(x)$无限接近某个确定的常数 $A$,则称 $A$ 为函数 $f(x)$当 $x$ 趋于负无穷($x\to-\infty$)时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

由上面两条可以知道,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

**例 1**　设函数 $y=\dfrac{1}{x}$,考察当 $x\to\infty$时的极限.

**解**　由图 1-4 可知,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

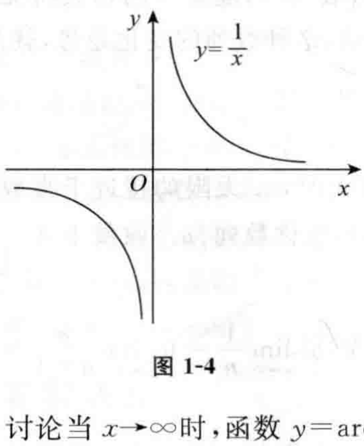


图 1-4

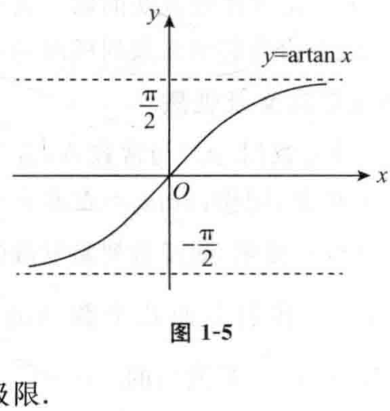


图 1-5

**例 2**　讨论当 $x\to\infty$时,函数 $y=\arctan x$ 的极限.

**解**　如图 1-5 所示,因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$,又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$

不存在.

**2. $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限**

**定义 5**　所谓 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域，是指以 $x_0$ 为中心，以 $2\delta$ 为长度的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}.$$

在 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域中去掉点 $x_0$，称为点 $x_0$ 的去心 $\delta$ 邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}.$$

下面看一个例子，当 $x\to 1$ 时，函数 $f(x)=x+1$ 无限接近于 2，当 $x\to 1$ 时，函数 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 无限接近于 2. 函数 $f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是两个不同函数，前者在 $x=1$ 处有定义，后者在 $x=1$ 处无定义，这就是说，当 $x\to 1$ 时，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限是否存在与其在 $x=1$ 处是否有定义无关.

**定义 6**　设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某一去心邻域内有定义，若当 $x$ 无限趋近于 $x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于某个确定的常数 $A$，则称 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x$ 趋向于 $x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

**左极限**　设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个左邻域 $(x_0-\delta,x_0)$ 内有定义，若当 $x$ 由 $x_0$ 左侧无限趋近于 $x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于某个确定的常数 $A$，则称 $A$ 为函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0-0).$$

**右极限**　设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个右邻域 $(x_0,x_0+\delta)$ 内有定义，若当 $x$ 由 $x_0$ 右侧无限趋近于 $x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于某个确定的常数 $A$，则称 $A$ 为函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0+0).$$

由极限定义及左（右）极限定义可以得到，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

**例 3**　设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0,\end{cases}$ 证明当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在.

**证明**　因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

**3. 函数极限的性质**

**性质 1**（函数极限的唯一性）　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$）存在，那么极限值是唯一的.

**性质 2**（局部有界性与局部保号性）　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则有

(1)局部有界性：在 $x_0$ 的某一去心邻域内，函数 $f(x)$ 有界.

(2)局部保号性：当 $A>0$(或 $A<0$)时，在 $x_0$ 的某一去心邻域内 $f(x)>0$($f(x)<0$).

**性质 3**(局部不等式性)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且在 $x_0$ 的某一去心邻域内，函数 $f(x)\geqslant 0$($f(x)\leqslant 0$)，那么 $A\geqslant 0$($A\leqslant 0$).

## 1.2.3　无穷小与无穷大

**1. 无穷小与无穷大**

**定义 7**　在 $x$ 的某个变化过程中，$f(x)$的极限为 0，即 $\lim f(x)=0$，则称 $f(x)$是该变化过程中的无穷小量，简称无穷小. 例如：$x\to 0$ 时，$x^2$，$\ln(x+1)$都是无穷小量，$x\to 1$ 时，$x-1$，$\ln x$ 都是无穷小量，$x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{x^2+2}$都是无穷小量. 无穷小量经常用希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma$ 表示.

注意：

(1)定义中的变化过程指我们学过的自变量 $x$ 的任意变化过程；

(2)我们说某个函数是无穷小时，必须说出 $x$ 的变化过程，例如 $x\to 0$ 时，$x^2$ 是无穷小，而当 $x\to 1$ 时，$x^2$ 不是无穷小；

(3)0 是唯一一个常数无穷小；

(4)无穷小与非常小的数的区别，无穷小是变量(0 除外)，而非常小的数是常量.

**定义 8**　在 $x$ 的某个变化过程中，$|f(x)|$无限增大，则称 $f(x)$是该变化过程中的无穷大量，简称无穷大. 例如：$x\to 0$ 时，$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{x^2}$都是无穷大，$x\to 1$ 时，$\frac{1}{x-1}$，$\frac{1}{\ln x}$都是无穷大，$x\to\infty$ 时，$x^2$，$\sqrt[3]{x}$都是无穷大.

无穷大可以表示为 $\lim f(x)=\infty$，这里只是借用极限的符号，并不表示 $f(x)$的极限存在.

注意：

(1)无穷大与很大的数之间的区别，无穷大是变量，很大的数是常量；

(2)无穷大必须是$|f(x)|$无限增大且越来越大. 例如 $x\to+\infty$时，$x\sin x$ 是无限增大，但不是越来越大，所以 $x\sin x$ 并不是 $x\to+\infty$时的无穷大.

无穷小与无穷大之间有简单的关系，有如下定理：

**定理 3**　在自变量的同一个变化过程中：

(1)如果 $f(x)$是无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小；

(2)$f(x)\neq 0$ 且 $f(x)$是无穷小，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大.

**2. 无穷小的性质**

在自变量的同一变化过程中：

**性质 1**　有限多个无穷小的和仍然是无穷小.

**性质 2**　有界变量(函数)与无穷小的乘积仍然是无穷小.

**性质 3**　常数与无穷小的乘积仍然是无穷小.

**性质 4** 有限多个无穷小的乘积仍然是无穷小.

# 1.3 极限的运算

用极限的定义可以验证某个常数是否为某个函数的极限，但无法求出某个函数的极限是多少，为了方便计算，下面介绍极限的四则运算法则.

以下讨论中，"lim"下面没有标明 $x$ 的变化过程，指的是自变量的同一变化过程，它包括 $x\to x_0$ ($x\to x_0^+$ 或 $x\to x_0^-$) 或 $x\to\infty$ ($x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$).

## 1.3.1 极限的四则运算法则

**法则 1** 如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B.$$

法则 1 可以推广到有限多个函数代数和的情况.

**法则 2** 如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B.$$

法则 2 可以推广到有限多个函数相乘的情况.

**推论 1** 如果 $\lim f(x)$ 存在，$C$ 为常数，则有

$$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x).$$

即常数可以提到极限符号前.

**推论 2** 如果 $\lim f(x)$ 存在，$n$ 为正整数，则有

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n.$$

综合法则 1 和法则 2 可以得到极限运算的线性性质，即如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，$\lambda$ 和 $\mu$ 是两个常数，则有

$$\lim[\lambda f(x)\pm\mu g(x)]=\lambda\lim f(x)\pm\mu\lim g(x)=\lambda A\pm\mu B.$$

同理线性性质可以推广到有限多个函数代数和的情况.

**法则 3** 如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$ 且 $B\neq 0$，则有

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}.$$

**例 1** 计算 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+3)$.

**解** $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+3)=\lim\limits_{x\to 1}x^2-2\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}3=1-2+3=2.$

设有多项式函数

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}P_n(x)&=\lim_{x\to x_0}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)\\&=a_n\lim_{x\to x_0}x^n+a_{n-1}\lim_{x\to x_0}x^{n-1}+\cdots+a_1\lim_{x\to x_0}x+\lim_{x\to x_0}a_0\\&=a_n(\lim_{x\to x_0}x)^n+a_{n-1}(\lim_{x\to x_0}x)^{n-1}+\cdots+a_1(\lim_{x\to x_0}x)+a_0\\&=a_nx_0^{\ n}+a_{n-1}x_0^{\ n-1}+\cdots+a_1x_0+a_0,\end{aligned}$$