李克正 著

群概形及其作用论

Group Schemes and Their Actions

清华大学出版社
TSINGHUA UNIVERSITY PRESS

李克正 著

群概形及其作用论

Group Schemes and Their Actions

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

群概形是代数几何与算术代数几何的重要课题。本书内容不仅包括群概形的基本理论，而且包括其他一些相关课题，其中有些是工具，有些是基本的应用，有些是这两方面兼而有之。除此之外，书中还有一些关于历史、数学语言、思想方法与几何直观等的“聊天”。

本书可用作研究生高等教科书，书中使用概形的语言作为基本语言，所需要的预备知识为代数几何的基础知识。

图书在版编目(CIP)数据

群概形及其作用论/李克正著.—北京：清华大学出版社，2018
ISBN 978-7-302-49002-9

I. ①群… II. ①李… III. ①群论–研究 IV. ①O152

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 322014 号

责任编辑： 陈朝晖
封面设计： 何凤霞
责任校对： 刘玉霞
责任印制： 丛怀宇

出版发行： 清华大学出版社
网　　址： http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址： 北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：** 100084
社 总 机： 010-62770175　　**邮　　购：** 010-62786544
投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者： 三河市铭诚印务有限公司
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 155mm×235mm　　**印　　张：** 30.75　　**字　　数：** 488 千字
版　　次： 2018 年 8 月第 1 版　　**印　　次：** 2018 年 8 月第 1 次印刷
定　　价： 139.00 元

产品编号：051092-01

献给 *Arthur Ogus*，于先生七十寿辰

前言

群概形是代数几何与算术代数几何的重要课题，也是一个强有力的工具，很多学生和研究者对此很需要。但是，这方面的文献浩如烟海，而且所采用的语言大相径庭，使初学者有相当大的困难。作者在大约二十年前已强烈感到在这方面很需要一本全面系统且采用统一语言的教科书，并开始着手准备。

在准备过程中发现困难很大，经常遇到一些文献中的断言有误或可疑，至于有漏洞的证明就更多了。因此，对于这方面的各课题都需要再研究，最好是系统地讲一遍甚至多遍。幸运的是，自 1998 年始，作者参加中国科学院晨兴数学中心算术代数几何讨论班十余年，后来又在首都师范大学讲授该方面的课程五年多，晨兴中心的同事们和首都师范大学的研究生们以严谨甚至苛刻的态度对待作者的报告，使得很多疑问得以澄清，很多错误得以及时纠正。

在这段时期，作者曾与很多专家就本书的各课题做了深入的讨论，其间还访问了台湾理论研究中心、马普数学所、苏黎世高工和东京大学，这些都很有助于本书的准备。

在经过十余年的准备后，作者开始本书的写作，在写作过程中又多次讲授其中的内容，并根据反馈意见修订。

本书可看作研究生高等教科书。书中使用概形的语言作为基本语言(与此对照，许多其他教科书不完全使用概形的语言)。所需要的预备知识为代数几何的基础知识 (例如 Hartshorne 的 [H], Grothendieck 的 [EGA] 更佳)。本书的内容不仅包括群概形的基本理论，而且包括其他一些相关课题，其中有些是工具 (主要是第 Ⅳ 章和第 Ⅴ 章)，有些是基本的应用 (主要是第 Ⅵ.2 节，第 Ⅶ.4 节和第 Ⅸ 章)，有些是这两方面兼之 (主要是第 Ⅵ.1 节和第 Ⅺ 章)。这些都是很多研究者所需要的基本内容。读者可能感觉这些课题有不同的的深度和难度。除了主要课题外，书中还有一些关于历史、数学语言、思想方法与几何直观等的“聊天”，这些内容比起主要课题来要容易得多，有时还很初等。其中有些聊天可能只是作者个人的观点。读者可以略过这些聊天而不损失主要课题的任何内容。

尽管书中的大部分内容可见于文献，但很少采用文献中的处理，这不仅是为了避免错误，更是因为一本书的篇幅不允许冗长的证明，且需要采

取统一的语言甚至记号。这显然是一个十分艰巨的任务, 在写作中必然会出现很多缺点和错误, 甚至严重的错误。如果没有同事们和学生们的帮助, 是不可能完成的。尽管如此, 书中的缺点和错误仍是无法避免的, 只能待出版后根据读者的意见进一步修改。

本书在写作上力求自足, 力求精炼, 尽可能给读者以方便, 但阅读本书需要很大的努力和耐心。

书中各章节有一些习题, 这些习题基本上都是作者在讲学中积累的, 远非充足, 但有助于对正文的理解, 其中有些结果是有用的。

作者希望感谢下列专家, 他们曾就本书中的课题与作者进行了富有启发性的讨论: Pierre Berthelot, Spencer Bloch, 翟敬立, Gerd Faltings, 扶磊, Gerard van der Geer, 橋本喜一郎 (Kiichiro Hashimoto), 伊吹山知義 (Tomoyoshi Ibukiyama,), Luc Illusie, 桂利行 (Toshiyuki Katsura), 黎景輝 (King Fai Lai), Vikram Mehta, 宮西正宜 (Masayoshi Miyanishi), 森重文 (Shigefumi Mori), Niels Nygaard, 小田忠雄 (Tadao Oda), Arthur Ogus, Frans Oort, Richard Pink, 徐飞, 徐克舰, 杨富中, Yuri Zarhin; 希望感谢中国科学院晨兴数学中心、台湾理论研究中心、马普数学所、苏黎世高工和东京大学提供了很好的研究环境和条件; 感谢晨兴中心算术代数几何讨论班的同事们和首都师范大学的研究生们对本书的贡献。

本书是使用天元软件写的, 为此必须感谢不幸病逝的朋友、代数几何学家肖刚, 他所编制的天元软件是 TEX 的接口软件, 不仅可以用于中文, 而且有很强的画图功能, 迄今尚无其他排版软件可达到; 还应感谢另一位朋友、代数几何学家陈志杰, 他将天元软件推进为通用和方便的版本并长期维护。他们二位对作者都曾经常指导。

作者希望感谢国家自然科学基金的长期资助 (实际上作者自 1987 年回国以来一直在国家自然科学基金重点项目或数学天元基金项目资助下工作), 由于国家自然科学基金的评审重质量而不是重数量, 作者可以长期集中精力于较深入的研究工作, 而不必急于发表阶段性的结果。否则, 耗时十余载写一本书是不可想象的。

李克正

2018 年 8 月

目 录

第0章 引言

在今天, 概形理论已经是整个代数几何的基础和语言。概形理论的建立至少有两个动因: 一是建立一种适合于研究数论的几何, 因此考虑一般的交换环而不仅仅是域上的代数; 二是将微分引入到函数中, 因此允许环中有幂零元。

但是, 迄今为止代数几何的核心课题是代数簇, 它是建立在域上的, 而且没有幂零函数。这使得很多人对于使用概形的理由难以理解, 一些人 (包括一些专家) 甚至认为概形理论没什么用, 主张学生不要学。

如果不是很深入地理解概形, 可能只是看到它是原有几何“空间”概念的推广。其实不然, 至少我们可以举出概形的两个非常重要的具体意义, 一是模空间理论, 二是群概形。

模空间理论自黎曼开始, 黎曼建立的椭圆曲线的模空间是复解析空间, 尚无幂零函数, 也没有建立在 $\mathbb{Z}$ 上。它的点代表复数域上的椭圆曲线, 可以理解为丢番图方程, 由此可以理解其有理数解, 但离其整数解仍很遥远。要研究丢番图方程的整数解, 至少也要理解其“模素数 p”的解, 这已经超出复数的范围。而今天的模空间理论已经可以建立在 $\mathbb{Z}$ 上, 故更直接地适用于数论。另一方面, 离开幂零函数就不可能有无穷小变形理论, 而无穷小变形是一个强大的工具, 对于模空间尤其如此。

将概形应用到群论, 则不仅是给出强有力的工具, 而且**发现**了一个自然的事实, 即“无穷小群”的存在。如果简单地考虑带有代数几何结构的群, 就得到“群簇”的概念, 而如果仅考虑特征 0 的域, 则任何群概形都是约化的, 所以只研究群簇也就够了; 但在特征 $p>0$ 的域上, 一个群概形不一定是约化的, 甚至可能只有一个点但有不平凡的切空间, 这就是所谓“无穷小群”。那么, 是否可以避开不约化的情形而仅考虑群簇呢? 如果这样做, 我们就不能建立“对偶性” (这可以理解为将有限阿贝尔群的对偶理论几何化), 例如 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的群簇结构的对偶就是无穷小群。我们知道, 对偶性是数学中最基本和重要的原理之一, 因此回避无穷小群是不明智的。

我们下面讨论的课题既要涉及群概形, 又要涉及模空间, 因此概形的上述具体意义都将展现出来。

群概形的历史至少可以追溯到 19 世纪中期的椭圆函数、格、椭圆曲线、模形式等。一百多年的发展, 使该领域有极为丰富的内容, 且与其他领域有极为深刻的联系。就其研究课题而言, 至少有线性群簇、阿贝尔簇、平展群概形、无穷小群、群概形的作用和表示、商空间、齐性空间、皮卡概形、阿尔巴内塞簇、丢多涅模、自同构群概形、分类与模空间、志村簇等, 而与其有深刻联系的领域包括代数、数论、李群与李代数、代数几何、复几何、动力系统甚至数学物理。

粗糙地说, 群概形是有代数几何结构的群, 因此在研究中需要兼顾其群结构与几何结构, 以及它们之间的联系。在群论中, 表示是基本的研究方法和工具, 也是联系群与其应用的基本桥梁, 而表示与作用是等价的。在群概形理论中, 作用同样是基本的研究方法和工具, 也是联系群概形与其应用的基本桥梁; 但有所不同的是, 表示与作用一般不等价, 因为自同构群未必有适当的群概形结构 (详见例 IX.1.2), 因此本书的主题是群概形及其作用, 而不是群概形及其表示, 尽管有时表示也是有意义的。

本书各章节的内容及其相互关联简述如下:

基本的预备知识为代数几何基础, 学过 Hartshorne [H] 的 I-Ⅲ 章基本够了, 若学过 [EGA] 当然更好。对于 [H] 中缺乏或不够深入的内容, 在第 I 章中做了一个较系统的整理作为补充, 包括纤维丛 (平坦性、光滑性、预层的语言、有理映射等), 微积分 (高阶微分、导数与微分算子、外微分与德拉姆复形等), 射影概形的希尔伯特多项式 (一般及多个可逆层的希尔伯特多项式、次数公式、半连续性与消失定理等), 除子与相交类 (除子族及其性质、线性系、泛除子、相交类的基本性质等)。

第 Ⅱ 章为群概形、同态、核、作用、安定子等基本概念, 方法基本上是初等的, 但也有一些较深入的结果 (如引理 1.3, 引理 1.4, 引理 1.6 等)。

第 Ⅲ 章系统地讲群概形的微积分和群概形作用的微积分, 这是基本的和强有力的工具。第 1 节为群概形的微积分, 包括不变微分、李代数与不变微分算子环等, 由此即可得到一些较深入的结果; 第 2 节为群概形作用的微积分, 包括群概形作用诱导的典范微分层同态、李代数同态、微分算子环同态、德拉姆复形等; 第 3 节为切丛与诱导作用, 定义了环概形、模概形并给出广义切丛作为模概形的基本性质, 然后给出群概形的作用在切丛上诱导的线性作用; 第 4 节为关于交换群概形的较深入讨论。

群概形对模空间理论的建立有重要的作用，而且很多模空间具有群概形结构；另一方面，模空间也是研究群概形的重要和强有力工具。因此，我们用一章（第 IV 章）系统地讲模空间理论的基础。其中第 1 节讲模空间的基本概念和思想，并举例说明如何应用；第 2 节讲希尔伯特概形；第 3 节讲变形的概念、变形与模空间的联系，并举例说明变形理论的强大。后面各章都或多或少地用到模空间的方法和思想。

商的存在性和构造是代数几何中重要而困难的问题，在群概形及其作用中尤为重要；推出是商的推广。第 V 章专门讨论这一课题。第 1 节讲商与推出的基本概念，并给出一个基本的判别准则；第 2 节给出射影情形商与推出存在的一个充分条件，并讨论了有理商；第 3 节讨论仿射情形，特别是有限情形商与推出存在的条件，并给出格罗滕迪克下降原理。

第 VI 章将商与推出作为工具应用于群概形。第 1 节讲群概形作用的商，给出商与微积分的联系，对射影情形、有限仿射作用情形和半稳定情形给出商存在的充分条件，并初步讨论了齐性概形，将这些应用于域上的情形给出域上的群概形及其作用的一些基本性质；第 2 节讲皮卡概形，给出皮卡概形的存在性和基本性质，并讨论群概形的作用在皮卡概形上的诱导作用。

第 VII 章为阿贝尔簇与阿贝尔概形，这方面的内容很丰富。第 1 节为刚性及其应用，并给出阿贝尔簇与同态的一些基本性质；第 2 节为对偶理论，建立于皮卡概形理论之上，给出阿贝尔概形的对偶的存在性与基本性质，并进一步深入讨论极化等，给出黎曼-罗赫定理等深刻定理，并对特征 $p>0$ 情形定义了一般的移位态射；第 3 节用 l-进表示深入讨论自同态环与极化等；第 4 节为阿尔巴内塞簇的基本理论，包括阿贝尔簇的极小性、曲线的雅克比簇、阿尔巴内塞簇的存在性与一些基本性质；作为附录，第 5 节给出复阿贝尔簇的解析理论概要供参考。

在特征 $p>0$ 的情形，丢多涅模是研究交换群概形的一个基本工具，这方面的理论相当庞大，且甚为复杂。第 VIII 章专门讨论这一课题。第 1 节讲交换形式群、p-可除群与塞尔对偶；第 2 节讲维特环、维特概形与基本性质；第 3 节通过“丢多涅元”建立丢多涅模的基本理论，并定义一般基上的丢多涅模概形；第 4 节讲对偶与拟极化，其中对偶是构造性地给出的；第 5 节讨论丢多涅模的结构和分类，给出源晶体的结构，并初步讨论

了丢多涅模与拟极化丢多涅模的同构分类。

对于一般的射影概形，自同构群概形是一个重要的相关对象，也经常是一个有力的工具。第 IX 章专门讨论这一课题。第 1 节给出自同构群概形的一些基本性质和例子，并对几个特殊情形给出自同构群概形的结构；第 2 节为自同构群概形的微积分，给出自同构群概形的变形的基本定理和自同构群概形的微积分的基本定理，并给出对阿贝尔簇和齐性概形的一些应用；第 3 节讨论保持某些几何结构的自同构群概形，由此可以将自同构群概形的某些方法应用于非射影情形，特别是线性情形；第 4 节应用自同构群概形证明阿贝尔簇的变形的基本定理（这个定理原有的证明并非如此，但应用自同构群概形可使证明大为简化）。

第 X 章主要是给出域上的有限型群概形的结构。这方面的结果基本上都是经典的（完成于 20 世纪 50 年代），但要改为用现代的语言证明，有时颇不容易。由于有了前几章的准备，可以避免冗长的证明。

第 XI 章为阿贝尔簇的模空间理论。作为直观的预备，首先简述了复解析方法及一些结果；然后用代数几何方法建立了阿贝尔簇的粗糙和精细模空间以及曲线的模空间，并初步给出模空间的一些性质。

书中各章节有一些习题，做这些习题有助于对正文的理解，且其中一些结果是有用的。

第 I 章　代数几何的一些预备

第 1 节　纤维丛

1. 纤维丛的基本概念

拓扑学中的纤维丛是指局部平凡族。详言之，一个拓扑空间的连续映射 $f: X \to S$ 称为 S 上的一个**纤维丛**，如果存在一个拓扑空间 F，使得对任一点 $s \in S$ 有一个开邻域 $U \subset S$ 及一个同胚 $\phi: f^{-1}(U) \xrightarrow{\simeq} F \times U$，满足 $f|_{f^{-1}(U)} = \mathrm{pr}_2 \circ \phi$。此时 F 称为这个纤维丛的**纤维**。$F \times S$ 当然是一个纤维丛，称为**平凡的**纤维丛。一般的纤维丛虽然局部 (即在足够小的开集 $U \subset S$ 上) 结构和 $F \times S$ 一样，但整体结构却可能不同。例如设 S 为圆周，F 为线段，则有两个熟知的纤维丛，一是环带，另一是默比乌斯带 (图 1)。这两个纤维丛是显然不同的，因为前者是双侧的而后者是单侧的。

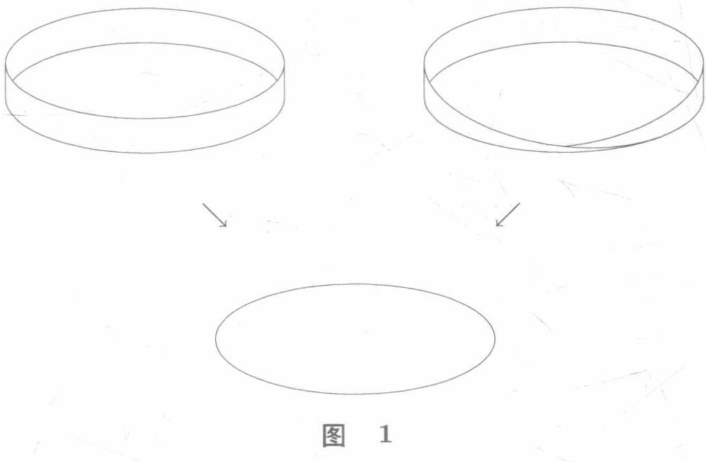

图　1

在代数几何中也会遇到类似的情形，特别是向量丛的情形。

例 1. 设 k 是代数闭域，$S = \mathbb{P}_k^1$，齐次坐标为 $(X_0 : X_1)$，$T = \mathbb{A}_k^2$，坐标为 x_0, x_1，则 $T \times_k S \cong \mathbb{A}_S^2$ 为 S 上的平凡平面丛，它有一个子丛

$$L = \{(x_0, x_1, X_0 : X_1) | x_0X_0 + x_1X_1 = 0\} \subset T \times_k S \tag{1}$$