

WILEY



经典译丛



电磁场理论与应用

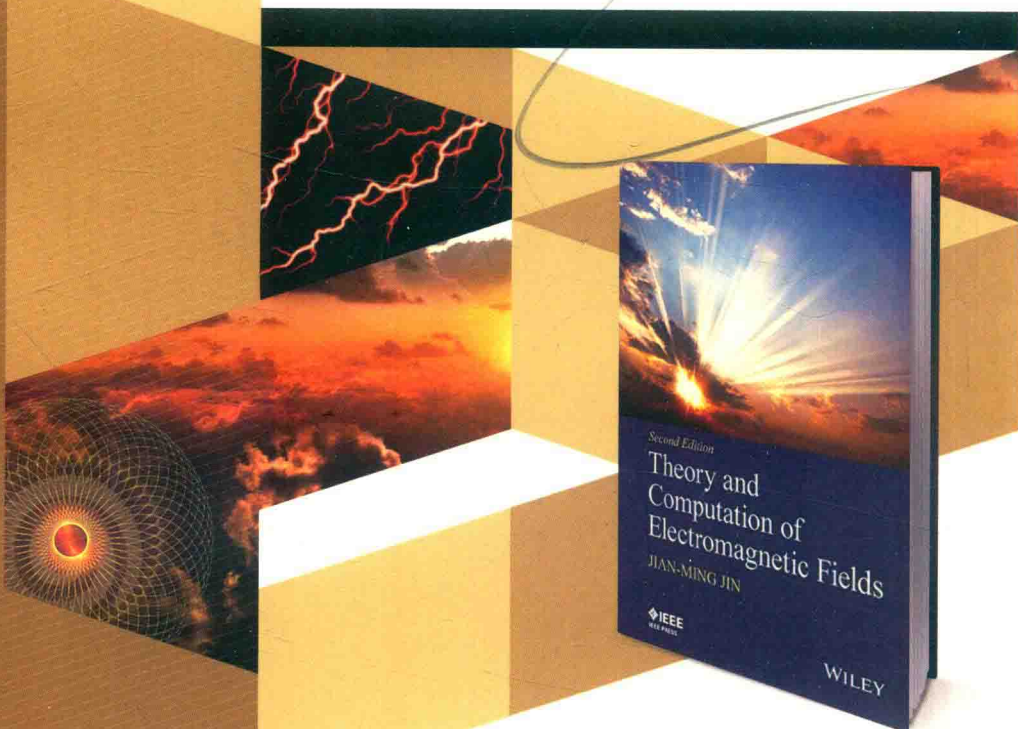
Theory and Computation of Electromagnetic Fields, Second Edition

# 计算电磁学 (第二版)

Theory and Computation  
of Electromagnetic Fields, Second Edition

【美】 Jian-Ming Jin (金建铭) 著

尹家贤 等译



中国工信出版集团



电子工业出版社  
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY  
<http://www.phei.com.cn>

经典译丛·电磁场理论与应用

# 计算电磁学

(第二版)

Theory and Computation of Electromagnetic Fields

Second Edition

[美] Jian-Ming Jin(金建铭) 著

尹家贤 周东明 丁 亮  
刘继斌 黄贤俊 杨 成



电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

## 内 容 简 介

*Theory and Computation of Electromagnetic Fields, Second Edition* 原著内容包含两个部分,中译本出版时分成两本书,分别对应原著的第一部分和第二部分。其中,第一部分为电磁场理论,适合作为刚入学研究生“电磁场理论”课程的教材;本书为电磁场的计算,适合作为高年级研究生“计算电磁学”课程的教材。

本书包含了工程应用电磁场数值分析中的几种重要的计算方法,包括有限差分法(特别是时域有限差分法)、有限元法和基于积分方程的矩量法。选择这三种方法是因为它们代表电磁场数值分析中的三种基本近似。一旦学生熟悉了这三种方法,就很容易学习其他数值方法。书中还包含了求解积分方程的快速算法及结合不同数值方法的混合技术,利用这些技术能够更有效地处理复杂的电磁问题。

本书包含现代电磁理论和计算电磁学的热点和方法,可作为研究生“计算电磁学”课程的教材,同时适合需要计算电磁场方面知识的工程技术人员参考阅读。

Theory and Computation of Electromagnetic Fields, Second Edition, 9781119108047, Jian-Ming Jin.

Copyright © 2015, John Wiley & Sons, Inc.

All rights reserved. This translation published under license.

No part of this book may be reproduced in any form without the written permission of John Wiley & Sons, Inc.

本书简体中文字版专有翻译出版权由美国 John Wiley & Sons 公司授予电子工业出版社。

未经许可,不得以任何手段和形式复制或抄袭本书内容。

版权贸易合同登记号 图字:01-2014-4718

### 图书在版编目(CIP)数据

计算电磁学:第二版/(美)金建铭(Jian-Ming Jin)著;尹家贤等译.—北京:电子工业出版社,2018.7  
(经典译丛·电磁场理论与应用)

书名原文:Theory and Computation of Electromagnetic Fields, Second Edition

ISBN 978-7-121-34333-9

I. ①计… II. ①金… ②尹… III. ①电磁计算 IV. ①TM15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 111302 号

策划编辑:马 岚

责任编辑:马 岚 特约编辑:马晓云

印 刷:三河市华成印务有限公司

装 订:三河市华成印务有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编:100036

开 本:787×1092 1/16 印张:14.25 字数:365 千字

版 次:2018 年 7 月第 1 版(原著第 2 版)

印 次:2018 年 7 月第 1 次印刷

定 价:59.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888,88258888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式:classic-series-info@phei.com.cn。

# 译者序

电磁场理论课程是国内外各大学的学生普遍感到畏惧的课程。本科学生如此，到了研究生阶段，仍然如此。其原因如下：电磁场理论公式多、推导复杂、内容抽象。有了基本的电磁场理论基础以后，在研究生阶段如何使电磁场理论知识系统化，使其运用麦克斯韦方程分析电磁问题的水平进一步提高，这是研究生电磁场理论课程需要解决的问题。

要在研究生阶段学好电磁场理论课程，首先要有一本好的教材。计算电磁学的发展使得电磁理论与计算数学产生了越来越紧密的关系，以至于有必要将这部分内容纳入电磁理论教材中，让研究生阶段的学生比较系统地掌握这部分知识，目前国内还没有这样的中文教材，值得推介的3种著名的研究生电磁场理论课程的教材分别是：

1. 哈林顿(R. F. Harrington)的 *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*;
2. 孔金瓯(J. A. Kong)的 *Electromagnetic Wave Theory*;
3. 巴拉尼斯(C. A. Balanis)的 *Advanced Engineering Electromagnetics, Second Edition*。

但是，这些教材各有不合作为教材的特点。或因所撰写年代太早，比如第1种于1961年出版；或因过于偏重理论，比如第2种；或因涵盖的内容太多，比如第3种，全书超过1000页。在计算电磁学高度发展的今天，很多需要非常复杂的公式才能解决的电磁问题，都可以交给计算机完成。因此，研究生电磁场理论课程的内容需要非常精心地选择，主要考虑以下三方面的问题：

1. 由于本科阶段基础电磁场理论课程学时数的减少，因此教材中要有相当的篇幅加强基础内容；
2. 教材内容中要体现电磁场领域中的新理论、新技术、新成果；
3. 教材内容要体现完整的电磁场理论结构体系，但理论不宜太深奥，篇幅不宜太长，其主要内容适合安排一个学期的课程。

美国伊利诺伊大学香槟校区 Jian-Ming Jin(金建铭)教授所著的 *Theory and Computation of Electromagnetic Fields, Second Edition* 满足了研究生阶段电磁场理论课程对教材的所有要求。本书有下面几个特点：

1. 为不同层次的研究生学习和了解更高等的问题提供了必须的基础知识；
2. 分析了电磁辐射、传播、透射及反射现象；
3. 阐述了重要的电磁定理和原理；
4. 对笛卡儿坐标、柱坐标、球坐标中的波的传播、散射、辐射问题的电磁分析进行了讨论；
5. 涵盖了频域和时域中基本及高级电磁计算方法及其工程应用；
6. 为检验和巩固学生对课程内容的理解，每一章都包含了一定数量的习题。为便于读者学会如何使用这些知识分析和解决相关的电磁问题，很多章节都附有例题。

考虑到国内各大学研究生课程的安排情况，我们将英文原著分成两部分出版。《高等电磁场理论(第二版)》(已由电子工业出版社出版)的内容对应原著第一部分(即前7章)及附

录,适合作为研究生的“电磁场理论”课程的教材。本书的内容对应原著第二部分,可作为研究生的“计算电磁学”课程的教材。书中的一些图示、参考文献、符号及其正斜体形式等沿用了英文原著的表示方式,以便于读者对照阅读英文原著,特此说明。

本书由国防科技大学电子科学学院的几位教师共同翻译完成,分工如下:第8章由黄贤俊初译;第9章由丁亮初译;第10章由杨成初译;第11章由周东明初译;第12章由刘继斌翻译。尹家贤对上述各章的初稿进行了统一修改。金建铭教授对全部译稿进行了认真的修改和审阅,在此表示感谢。电子工业出版社的马岚编辑在本书的出版过程中付出了辛勤的劳动,也在此表示感谢。

虽然笔者非常认真地进行了本书的翻译,但由于水平有限,书中译词不当、疏误之处难免,恳请读者批评指正。

# 前 言<sup>①</sup>

正如书名所示,本书包括两部分内容。第一部分为电磁场理论,其可以作为研究生阶段基础电磁理论课程的教材。第二部分为计算电磁学,其可以作为研究生阶段计算电磁学课程的教材。研究生阶段的基础电磁理论课程已有若干教材可用,但计算电磁学课程却没有合适的教材,本书意在填补这一空缺。本书的两部分内容是一脉相承的,以便学生可以较为容易地从第一阶段课程过渡到第二阶段课程。

虽然本书的第一部分介绍的是经典的基础电磁理论,但其涵盖的内容与现有教材有所不同,这主要是因为本科生的课程体系在过去二十年中有了较大的改变。许多大学减少了必修课的数量,以便学生在自我规划时更为自由。这就导致在美国大多数的电子工程系中,本科生只有一门电磁场的必修课程。因而研究生在入学时对基础电磁理论的掌握情况差异很大。为了应对这一挑战,使不同层次的学生均能从中受益,作者的授课课程内容既涵盖基础理论(如矢量分析、麦克斯韦方程组、边界条件和传输线理论)也包括高等问题(如波变换、叠加原理和分层介质球散射)。

在撰写本书的第一部分时,作者始终遵循下列原则。

1. 本书并不是要作为一本包罗万象的电磁理论参考书。其只应包含足够的基础知识,使电子工程专业的研究生在未来研究高级课题时有足够的知识准备。并且所有内容应该能在一学期内讲授完。因此,对该部分涵盖的内容进行了非常仔细的筛选。
2. 书的形式应该适合课堂教学和自学,而不是作为参考书使用。举例说明这其中的区别:对于参考书,所有有关格林函数的内容应该独立列为一章以便查阅;而对于课堂教学,循序渐进地介绍新思想和新概念通常更为合适。
3. 写作和教学应始终紧扣一个中心——完整的电磁理论是从麦克斯韦方程出发,以数学为工具推导发展而来的。因而在介绍每一个主题时,都应该从麦克斯韦方程,或者基于麦克斯韦方程的定理开始。

本书的第二部分介绍了几种重要的计算电磁学方法,它们在工程应用中得到了广泛使用。这些方法包括有限差分法(特别是时域有限差分法),有限元法和基于积分方程的矩量法,它们是电磁场数值分析中的三种最基本方法。学生在熟练掌握这三种方法后,可以很轻松地学习其他数值方法。第二部分还介绍了求解积分方程的快速算法以及结合不同数值方法的混合方法,掌握这些技术,就能更有效地处理复杂电磁问题。随着计算电磁学这一电磁分析和仿真工具得到越来越广泛地应用,基于上述内容的计算电磁学课程也越来越受欢迎。在伊利诺伊大学,这门课程被许多非电磁方向甚至非电子工程专业的学生选修。

下面是本书所涵盖内容的摘要<sup>②</sup>。第1章介绍基本电磁理论,包括矢量分析的简要回顾,积分和微分形式的麦克斯韦方程,不同媒质分界面和理想导体表面的边界条件,描述媒

① 为便于读者了解原著的写作思路和整体架构,这里保留了原著前言的全部内容。其中,中译本《高等电磁场理论(第二版)》(已由电子工业出版社出版)包括前7章和附录的内容。本书包括第8章至第12章的内容。——编者注

② 书中部分插图所对应的彩色图片,可通过华信教育资源网([www.hxedu.com.cn](http://www.hxedu.com.cn))注册下载。——编者注



质中电磁特性的本构关系,电磁能量和功率的概念,以及时谐场的麦克斯韦方程。本章还介绍可以简化矢量分析的符号矢量法。在本章中,将积分形式的麦克斯韦方程作为基本假定,由此推出微分形式的麦克斯韦方程以及各种边界条件。

第2章研究自由空间辐射场。利用本构关系并求解微分形式的麦克斯韦方程,就可以得到辐射场。本章中介绍作为辅助函数的标量位函数和矢量位函数,并讨论使用辅助位函数求解麦克斯韦方程的优势。另外,还介绍将场-源联系起来的格林函数和并矢格林函数。最后,研究辐射场的远场近似,并由此得到索末菲辐射条件。

第3章介绍从麦克斯韦方程导出的一些重要定理和原理。首先是唯一性定理,以及以此为基础得到的镜像原理和面等效原理。作为面等效原理的应用,推导了感应定理、物理等效原理以及口径辐射问题的求解。由麦克斯韦方程的对称性得到对偶原理,并将其应用到互补结构中,得到巴比涅原理。

第4章的研究对象是均匀平面波。分析它在无界均匀媒质中的传播,以便更好地理解波的传播特性。文中首先回顾基本的传输线理论,介绍与波传播相关的一些基本概念,例如传播常数、衰减常数和各种速度。然后,用分离变量法求得波动方程在笛卡儿坐标系中的解,并由此讨论平面波的一些基本特性,例如波阻抗、极化。接下来,求解几个简单的边值问题,包括面电流的辐射场和平面波在两种不同媒质分界面的反射和透射。本章还讨论平面波在单轴媒质、回旋媒质、手征媒质、超材料中的传播,以及入射到左手媒质中的情况。

第5章讨论电磁波在均匀和非均匀填充波导和介质波导中的传播,以及谐振腔问题。首先推导一般形式的波导和谐振腔中的电磁场解,并分析其基本特性。然后分析矩形波导和矩形谐振腔。接下来介绍微扰法,并用其计算非理想波导的衰减常数和谐振腔的品质因数,以及谐振腔中因填充材料或形状发生微小改变时谐振频率的变化。此外,还详细分析了部分填充波导和介质波导中的混合模式。最后,讨论波导和分层媒质中的电流源激励问题,因为这个问题在实际应用中非常重要。

第6章讨论柱坐标系中的电磁问题。首先用分离变量法求解柱坐标系中的亥姆霍兹方程,并推导出柱面波函数。然后用柱面波函数分析圆波导、同轴线及圆柱谐振腔。接下来,分析圆柱介质波导中的波传播。此后,推导将平面波展开成柱面波的波变换,并应用波变换求解导体柱和介质柱的散射问题。最后,分析线电流和圆柱面电流在导体柱或导体劈存在时的辐射问题。由得到的结果,推导出了二维场的索末菲辐射条件,并解释导体劈横向场的奇异性。

第7章讨论球坐标系中的电磁问题。首先用分离变量法求解球坐标系中的亥姆霍兹方程,并推导出球面波函数。然后用球面波函数分析球谐振腔和双锥天线。接下来,推导将平面波展开成球面波的波变换,并应用波变换求解导体球和介质球的散射问题。此外,还研究点电荷的辐射问题,并由此推导出球面波的加法定理。最后,分析球面电流在导体球或导体锥存在时的辐射问题,以此说明球坐标系中辐射问题的分析方法并解释导体尖端场的奇异性。

从第8章开始,讨论计算电磁学的内容。第8章通过推导基本的有限差分公式并将其应用于波动方程和扩散方程中,展示有限差分法的基本原理。紧接着,讨论有限差分法中的两个重要问题:稳定性分析和色散分析。之后,介绍二维和三维情况下用于求解麦克斯韦方程的时域有限差分法。最后,讨论如何用吸收边界条件(ABC)和理想匹配层(PML)来截断开

放区域中的电磁问题，在时域中如何分析色散媒质，如何在计算空间产生入射波，以及如何基于近场信息计算远场。

第9章主要讨论有限元法。首先通过一个简单的二维问题介绍有限元法的基本原理。然后，详细推导频域中标量和矢量电磁问题的有限元分析公式。之后，将其扩展至时域，并简要介绍一种处理色散媒质的方法。对于每个主题，都提供若干算例来展示有限元法的应用。最后，讨论如何用吸收边界条件和理想匹配层截断无界电磁问题的计算区域，以及有限元法在具体实现过程中涉及的一些数值问题。

第10章首先通过一个简单的静电场问题介绍矩量法的基本原理。之后，推导针对二维亥姆霍兹方程的通用积分方程，并且将其应用到几个具体问题中。对于每个问题，文中都详细给出了其矩量法的求解步骤。之后，对三维问题重复上述过程，并分析几个导体和媒质散射问题。本章还用矩量法分析平面周期结构和角周期结构，以及微带天线和微带电路，并由此讨论矩量法优势。最后，用一个简单的例子介绍如何将矩量法从频域推广到时域。

第11章讨论计算电磁学中的两个重要问题。第一个问题是快速算法，这些算法是为了更高效地求解积分方程发展起来的。快速算法分为两类，第一类需要基于积分核重新构建积分方程的数值离散形式，主要包括基于快速傅里叶变换的快速算法、自适应积分算法及快速多极子算法；第二类直接应用于离散后的矩阵方程，包括自适应交叉近似算法。第二个问题是混合方法的发展，这种方法结合不同的数值方法，扬长避短，因而可以更有效地处理复杂电磁问题。文中用两个例子来展示混合方法，一个例子是有限元法和时域有限差分法的结合，另一个例子是有限元法和矩量法的结合。在讨论每一个快速算法和混合方法时都有相应的数值算例来展示它们的能力。

第12章对电磁分析的计算方法进行了简要回顾，其中包括一些在第8章到第11章中没有涉及的数值方法。最后，简要讨论计算电磁学的应用与挑战。

本书在写作时假定学生已经掌握基本的电磁学知识(至少上过一门本科生电磁学课程)。作为一本工程类教材，本书中使用  $e^{j\omega t}$  作为时谐场的时间因子，而全书内容的侧重点放在解决各种电磁场边值问题上。每一章的末尾列出了一定数量的参考文献。每一章都包含了一定数量的习题，用于检验和巩固学生对课程内容的理解。每道习题都经过精心选择和设计，相互之间几乎没有重复，因而希望学生能够完成所有习题。选修计算电磁学课程的学生最好能够就时域有限差分法、有限元法和矩量法这三种方法各完成一个课程设计，并且撰写相应的技术报告。



# 目 录

第 8 章 有限差分法 .....	2
8.1 有限差分公式 .....	2
8.2 一维问题分析 .....	3
8.2.1 扩散方程的求解 .....	3
8.2.2 波动方程的求解 .....	4
8.2.3 稳定性分析 .....	5
8.2.4 数值色散分析 .....	7
8.3 二维分析 .....	8
8.3.1 时域分析 .....	8
8.3.2 频域分析 .....	9
8.4 Yee 网格 .....	10
8.4.1 二维分析 .....	10
8.4.2 三维分析 .....	12
8.5 吸收边界条件 .....	14
8.5.1 一维吸收边界条件 .....	15
8.5.2 二维吸收边界条件 .....	15
8.5.3 理想匹配层 .....	18
8.6 色散媒质的模拟 .....	26
8.6.1 递归卷积法 .....	26
8.6.2 辅助微分方程法 .....	28
8.7 波激励及远场计算 .....	29
8.7.1 波激励的模拟 .....	30
8.7.2 近远场变换 .....	32
8.8 小结 .....	33
参考文献 .....	34
习题 .....	35
第 9 章 有限元法 .....	37
9.1 有限元法概述 .....	37
9.1.1 一般原理 .....	37
9.1.2 一维算例 .....	38
9.2 标量场的有限元分析 .....	41
9.2.1 边值问题 .....	41
9.2.2 有限元公式的建立 .....	41
9.2.3 应用算例 .....	46
9.3 矢量场的有限元分析 .....	49

9.3.1	边值问题 .....	49
9.3.2	有限元公式的建立 .....	50
9.3.3	应用算例 .....	53
9.4	时域有限元分析 .....	59
9.4.1	边值问题 .....	59
9.4.2	有限元公式的建立 .....	60
9.4.3	应用算例 .....	63
9.5	时域间断伽辽金法 .....	64
9.5.1	时域间断伽辽金法的基本思想 .....	65
9.5.2	中心通量时域间断伽辽金法 .....	67
9.5.3	迎风通量时域间断伽辽金法 .....	69
9.5.4	应用算例 .....	71
9.6	吸收边界条件 .....	73
9.6.1	二维吸收边界条件 .....	73
9.6.2	三维吸收边界条件 .....	75
9.6.3	理想匹配层 .....	77
9.7	数值计算中的几个实际问题 .....	81
9.7.1	网格生成 .....	81
9.7.2	矩阵求解方法 .....	81
9.7.3	高阶单元 .....	81
9.7.4	曲边单元 .....	82
9.7.5	自适应有限元分析 .....	82
9.8	小结 .....	83
	参考文献 .....	83
	习题 .....	85
<b>第 10 章</b>	<b>矩量法 .....</b>	<b>89</b>
10.1	矩量法概述 .....	89
10.2	二维分析 .....	93
10.2.1	积分方程的建立 .....	93
10.2.2	导电柱体的散射 .....	95
10.2.3	导体条带的散射 .....	99
10.2.4	均匀介质柱体的散射 .....	101
10.3	三维分析 .....	102
10.3.1	积分方程的建立 .....	102
10.3.2	导体线的散射和辐射 .....	105
10.3.3	导电物体的散射 .....	109
10.3.4	均匀介质体的散射 .....	112
10.3.5	非均匀介质体的散射 .....	115

10.4	周期结构的矩量法分析 .....	116
10.4.1	平面周期贴片阵的散射 .....	116
10.4.2	离散旋转体的散射 .....	120
10.5	微带天线和微带电路的矩量法分析 .....	122
10.5.1	积分方程的建立 .....	122
10.5.2	矩量法求解 .....	124
10.5.3	格林函数的计算 .....	125
10.5.4	远场计算及应用实例 .....	128
10.6	时域矩量法 .....	130
10.6.1	时域积分方程 .....	130
10.6.2	时间步进求解 .....	130
10.7	小结 .....	133
	参考文献 .....	133
	习题 .....	136
<b>第 11 章</b>	<b>快速算法和混合技术 .....</b>	<b>139</b>
11.1	快速算法介绍 .....	139
11.2	共轭梯度-快速傅里叶变换法 .....	141
11.2.1	导电带与导电线的散射 .....	141
11.2.2	导电平板的散射 .....	142
11.2.3	介质体的散射 .....	146
11.3	自适应积分法 .....	151
11.3.1	平面结构的分析 .....	151
11.3.2	三维物体的分析 .....	155
11.4	快速多极子法 .....	158
11.4.1	二维分析 .....	158
11.4.2	三维分析 .....	161
11.4.3	多层快速多极子算法 .....	164
11.5	自适应交叉近似算法 .....	167
11.5.1	低秩矩阵 .....	167
11.5.2	自适应交叉近似 .....	168
11.5.3	矩量法求解中的应用 .....	170
11.6	混合技术简介 .....	173
11.7	有限差分与有限元混合方法 .....	174
11.7.1	时域有限元与时域有限差分之间的关系 .....	175
11.7.2	时域有限元与时域有限差分混合方法 .....	176
11.7.3	应用算例 .....	178
11.8	有限元-边界积分混合方法 .....	179
11.8.1	常规公式的建立 .....	180

11.8.2 对称公式的建立 .....	182
11.8.3 算例 .....	184
11.9 小结 .....	187
参考文献 .....	188
习题 .....	193
<b>第 12 章 计算电磁学结束语</b> .....	<b>194</b>
12.1 计算电磁学概述 .....	194
12.1.1 频域和时域分析的对比 .....	194
12.1.2 高频近似技术 .....	195
12.1.3 第一性原理数值方法 .....	196
12.1.4 时域仿真方法 .....	197
12.1.5 混合技术 .....	199
12.2 计算电磁学的应用 .....	199
12.3 计算电磁学的挑战 .....	207
参考文献 .....	207

## 高等电磁场理论(第二版)

第 1 章 基本电磁理论

第 2 章 自由空间中的电磁辐射

第 3 章 电磁定理和原理

第 4 章 传输线和平面波

第 5 章 笛卡儿坐标系中的场与波

第 6 章 柱坐标系中的场与波

第 7 章 球坐标系中的场与波

附录 A 矢量恒等式、积分定理和坐标变换

附录 B 贝塞尔函数

附录 C 修正贝塞尔函数

附录 D 球面贝塞尔函数

附录 E 连带勒让德多项式

计算电磁学是一门使用电子计算机数值求解麦克斯韦方程的学科。得益于计算机技术的快速发展，电磁计算已经成为电磁、射频及微波工程领域非常重要的分析工具。在过去的一百多年间，麦克斯韦理论的预测能力得到了广泛且有效的检验。我们知道，只要正确地求解麦克斯韦方程，麦克斯韦理论就可以精确地预测器件的设计性能和实验的测量结果。而且，描述电磁基本原理的麦克斯韦理论与电气工程及电子科学技术的各个领域息息相关，这些领域包括雷达、遥感、地理勘探、生物电磁效应、天线、无线通信、光子技术及高频电路等。此外，麦克斯韦的电磁理论在静态场到光频的很宽广的频带内和从亚原子到星际尺度的很大范围的几何尺度上都是成立的。因而研究人员一直致力于开发和使用数值方法正确高效地求解麦克斯韦方程，从而分析日益复杂的问题。

在 19 世纪麦克斯韦理论建立后，早期的电磁分析只能应用于如球形、圆柱形和平面的简单形状物体。随着科学及工程需求的提高，研究人员希望能够对复杂形状的物体进行电磁分析，由此发展了一系列近似技术。例如，电路理论可以看成麦克斯韦方程在低频情况下的简化，可用于对许多复杂几何形状的近似分析，并取得了很大的成功。而对于高频的情况，高频射线理论、衍射理论和微扰理论的发展为麦克斯韦方程提供了近似分析。随着计算机技术的发展，数值方法在 20 世纪 60 年代以后得到了迅速发展，为偏微分方程的求解提供了更多灵活而精确的方法。在众多的数值方法中，有限差分法、有限元法和矩量法是电磁学领域中应用最广泛的方法，三者共同构成了计算电磁学的核心。

## 第 8 章 有限差分法

有限差分法(FDM)是一种数值处理方法,它将偏微分方程变换为一组代数方程,通过求解代数方程组得到原边值问题的近似解。在所有的数值方法中,有限差分法是最古老也是最简单的。而其简单性也使得它非常稳定高效,因而被广泛应用于各种工程领域。随着时域离散麦克斯韦方程技术——时域有限差分法(FDTD)的提出和发展,有限差分法成为了电磁分析的重要工具。伴随着其进一步的发展,时域有限差分已经成为解决复杂电磁问题的最流行的数值方法<sup>[2,3]</sup>。为了解决具体问题,研究人员可以快速地编写时域有限差分程序并通过数值仿真认识和理解其中的基本电磁原理。

本章首先推导基本的有限差分公式,并将其应用于波动方程和扩散方程的离散,以此来介绍有限差分法的基本原理。接着进行有限差分法的稳定性分析和色散分析。之后,介绍如何用时域有限差分法求解二维和三维麦克斯韦方程。最后讨论如何采用吸收边界条件(ABC)和理想匹配层(PML)来截断计算区域,以解决开放区域电磁仿真的重要问题。

### 8.1 有限差分公式

有限差分法的基本思想是对偏微分方程中的微分算子进行近似。我们可直接从求导的定义出发,得到这种近似。考虑图 8.1 所示的函数  $f(x)$ , 为了计算它在  $x$  点的一阶导数, 可以有三种选择。第一种选择是将  $x$  增加微小量  $\Delta x$ , 并计算出  $f(x)$  在两个点的值之间的差, 可得到

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (8.1.1)$$

此公式称为前向差分公式。类似地, 若将  $x$  减小微小量  $\Delta x$ , 则可得到

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (8.1.2)$$

此公式称为后向差分公式。第三种选择是取式(8.1.1)和式(8.1.2)的平均, 得到

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (8.1.3)$$

此公式称为中心差分公式。二阶导数的差分公式可通过将上述差分公式应用于一阶导数来获得。由于有多种不同的组合, 二阶导数也有多种差分公式。最广泛应用的一种是先用中心差分求解一阶导数, 再对所得的一阶导数使用中心差分:

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f'(x + \Delta x/2) - f'(x - \Delta x/2)}{\Delta x} \quad (8.1.4)$$

由此得到

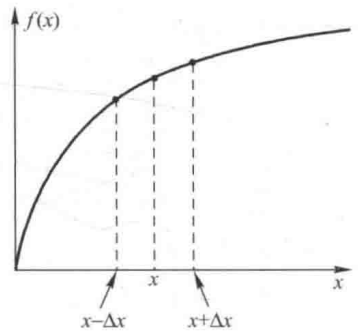


图 8.1 有限差分近似



$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (8.1.5)$$

显然,所有的差分公式均为求导的近似表示。 $\Delta x$  越小,这种近似的精度越高。然而,上面的这些差分公式不能给出精度或误差与  $\Delta x$  之间的特定关系。因此,可以考虑用另一种方法推导这些公式。由泰勒级数

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x)(\Delta x)^2 + \frac{1}{6}f'''(x)(\Delta x)^3 + \dots \quad (8.1.6)$$

可以得到

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (8.1.7)$$

式中,  $O(\Delta x)$  表示所有包含  $(\Delta x)^p (p \geq 1)$  的余项之和。由此可见,前向差分公式中主要误差与  $\Delta x$  成正比。因此,前向差分具有一阶精度。类似地,由泰勒级数

$$f(x-\Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x)(\Delta x)^2 - \frac{1}{6}f'''(x)(\Delta x)^3 + \dots \quad (8.1.8)$$

可得

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (8.1.9)$$

上式表明后向差分也具有一阶精度。若将式(8.1.6)减去式(8.1.8),则可得

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (8.1.10)$$

这表明中心差分公式具有二阶精度,这是中心差分公式与其他差分公式的一个明显区别。若将式(8.1.6)和式(8.1.8)相加,则可得

$$f''(x) = \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (8.1.11)$$

此式表明二阶导数的中心差分也具有二阶精度。正因为如此,式(8.1.5)是对二阶导数应用最广泛的差分格式。

## 8.2 一维问题分析

为了说明有限差分法如何用于偏微分方程的离散,本节考虑两个一维的例子。第一个是求解扩散方程,第二个是求解波动方程。

### 8.2.1 扩散方程的求解

当媒质有很大的导体损耗时,其中的传导电流远大于位移电流,因此可忽略位移电流,由此得到电场所满足的二阶偏微分方程为

$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{E} + \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathcal{J}_i}{\partial t} \quad (8.2.1)$$

假设  $\mathcal{J}_i$  和  $\mathcal{E}$  只有  $z$  方向分量且只在  $x$  方向上有变化,则式(8.2.1)可简化为

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial x^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} = \mu \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial t} \quad (8.2.2)$$

为表达方便,此处省略了  $\mathcal{J}_z$  的下标  $i$ 。这种类型的方程称为扩散方程或抛物线型偏微分方程。

为离散式(8.2.2),首先将沿  $x$  轴的求解区域均分成许多小段。因此,  $x$  轴被离散成多

个点, 记为  $x=i\Delta x$ , 其中  $i=0, 1, 2, \dots, M$  (见图 8.2)。类似地, 时间轴可以被离散成若干均匀分布的时间点, 记为  $t=n\Delta t$ , 其中  $n=0, 1, 2, \dots, N$ ,  $\Delta t$  表示两个相邻时刻之间的间隔。随着时间和空间上的均匀离散,  $\mathcal{E}_z(x, t)$  可以写为

$$\mathcal{E}_z(x, t) = \mathcal{E}_z(i\Delta x, n\Delta t) = \mathcal{E}_z^n(i) \quad (8.2.3)$$

其他量也可以类似地表示。对  $x$  的二阶导数应用中心差分, 并对时间的一阶导数应用前向差分, 式(8.2.2)可写为

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{E}_z(x+\Delta x, t) - 2\mathcal{E}_z(x, t) + \mathcal{E}_z(x-\Delta x, t)}{(\Delta x)^2} - \mu\sigma \frac{\mathcal{E}_z(x, t+\Delta t) - \mathcal{E}_z(x, t)}{\Delta t} \\ & = \mu \frac{\mathcal{J}_z(x, t+\Delta t) - \mathcal{J}_z(x, t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

使用式(8.2.3)引入的简写记号, 上式变为

$$\frac{\mathcal{E}_z^n(i+1) - 2\mathcal{E}_z^n(i) + \mathcal{E}_z^n(i-1)}{(\Delta x)^2} - \mu\sigma \frac{\mathcal{E}_z^{n+1}(i) - \mathcal{E}_z^n(i)}{\Delta t} = \mu \frac{\mathcal{J}_z^{n+1}(i) - \mathcal{J}_z^n(i)}{\Delta t} \quad (8.2.5)$$

将时间步最超前的场量移到左边, 其他量移到右边, 可以得到

$$\mathcal{E}_z^{n+1}(i) = \mathcal{E}_z^n(i) + \frac{\Delta t}{\mu\sigma(\Delta x)^2} \left[ \mathcal{E}_z^n(i+1) - 2\mathcal{E}_z^n(i) + \mathcal{E}_z^n(i-1) \right] - \frac{1}{\sigma} \left[ \mathcal{J}_z^{n+1}(i) - \mathcal{J}_z^n(i) \right] \quad (8.2.6)$$

仔细观察上式可以发现, 如果已知源的所有值及场的初始值, 例如在  $n=0$  时的值, 则利用上式可计算  $n=1$  时的场值, 然后得到  $n=2$  直至  $n=N$  的值。这个过程称为时间步进或时间推进, 式(8.2.6)也因此称为时间步进公式。由于在时间维上使用的前向差分公式, 所以式(8.2.6)具有一阶精度。

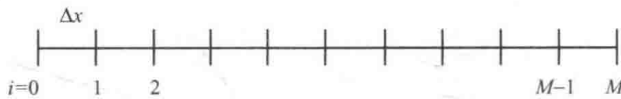


图 8.2 一维均匀离散

如果根据式(8.2.6)进行时间步进计算, 则在计算边界点即  $x=0$  和  $x=M\Delta x$  点的场时将遇到困难, 因为计算  $\mathcal{E}_z^{n+1}(0)$  和  $\mathcal{E}_z^{n+1}(M)$  需要  $\mathcal{E}_z^n(-1)$  和  $\mathcal{E}_z^n(M+1)$  的值, 而这两项均在计算区域外且未知。这个困难之所以出现, 是因为这里考虑的边界值问题的描述不完备, 它没有给出必要的边界条件。我们通常遇到的边界条件为 Dirichlet 条件和 Neumann 条件。**Dirichlet** 条件给定了边界处的场值, 如在本例中,  $x=0$  处的值给定为

$$\mathcal{E}_z(x=0, t) = \rho(t) \quad (8.2.7)$$

对于此条件, 边界值已知, 无须计算。**Neumann** 条件规定了边界处的法向导数值, 可表示为

$$\left. \frac{\partial \mathcal{E}_z(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = q(t) \quad (8.2.8)$$

使用中心差分离散, 其结果为

$$\mathcal{E}_z^n(-1) = \mathcal{E}_z^n(1) - 2\Delta x q^n \quad (8.2.9)$$

它可以用来计算  $\mathcal{E}_z^{n+1}(0)$ 。其他更复杂的边界条件将在以后介绍吸收边界条件时讨论。

## 8.2.2 波动方程的求解

当介质为无耗的时, 其电场满足下面的二阶偏微分方程:

$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{E} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \mathcal{J}_i}{\partial t} \quad (8.2.10)$$

假设  $\mathcal{J}_i$  和  $\mathcal{E}$  只有  $z$  方向分量且只在  $x$  方向变化, 则式(8.2.10)可简化为

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial x^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial t} \quad (8.2.11)$$

为方便起见, 此处省略了  $\mathcal{J}_z$  的下标  $i$ 。这种类型的方程称为波动方程或双曲型偏微分方程, 其波的传播速度为  $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 。

将空间和时间按照前面描述的方法均匀离散, 并对空间和时间导数应用中心差分, 则式(8.2.11)可以变换为

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{E}_z^n(i+1) - 2\mathcal{E}_z^n(i) + \mathcal{E}_z^n(i-1)}{(\Delta x)^2} - \mu\epsilon \frac{\mathcal{E}_z^{n+1}(i) - 2\mathcal{E}_z^n(i) + \mathcal{E}_z^{n-1}(i)}{(\Delta t)^2} \\ & = \mu \frac{\mathcal{J}_z^{n+1}(i) - \mathcal{J}_z^{n-1}(i)}{2\Delta t} \end{aligned} \quad (8.2.12)$$

从上式得到二阶精度的时间步进公式

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_z^{n+1}(i) & = 2\mathcal{E}_z^n(i) - \mathcal{E}_z^{n-1}(i) + \frac{(\Delta t)^2}{\mu\epsilon(\Delta x)^2} [\mathcal{E}_z^n(i+1) - 2\mathcal{E}_z^n(i) + \mathcal{E}_z^n(i-1)] \\ & \quad - \frac{\Delta t}{2\epsilon} [\mathcal{J}_z^{n+1}(i) - \mathcal{J}_z^{n-1}(i)] \end{aligned} \quad (8.2.13)$$

当已知源电流、场的初始值及边界条件时, 就可以用上式进行时间步进来计算场值。需要注意的是, 此时需要场在两个时刻的初始值, 例如  $n=0$  和  $n=1$  时刻, 这是因为偏微分方程中包含了时间的二阶导数。

### 8.2.3 稳定性分析

从前面介绍的扩散方程和波动方程的有限差分公式中不难看出, 在有限差分中, 需要选择合适的  $\Delta x$  和  $\Delta t$ 。一般来说,  $\Delta x$  必须足够小, 以便解能够准确模拟场的空间变化, 同时  $\Delta t$  也必须足够小, 以便解能够准确模拟场的时间变化。通常来说, 若关注的最高频率为  $f_{\max}$ , 其相应波长为  $\lambda_{\min} = c/f_{\max}$ , 周期为  $T_{\min} = 1/f_{\max}$ , 则  $\Delta x$  和  $\Delta t$  的选择应满足  $\Delta x < \lambda_{\min}/20$  和  $\Delta t < T_{\min}/20$ 。当然, 这些值的具体选择应根据特定的问题及所需的精度确定。需要特别注意的是, 由于场的空间变化和时间变化是相关的, 所以  $\Delta x$  和  $\Delta t$  的选择并不相互独立。事实上, 若选择不恰当, 则时间步进的过程将变得不稳定, 所计算的场值呈指数增加, 或为非物理的解。为了寻找  $\Delta x$  和  $\Delta t$  的合适选择, 有必要对时间步进公式进行稳定性分析。

为了说明稳定性分析的过程, 首先考虑式(8.2.6)。若丢掉源项, 则由能量守恒得知, 求解区域中的场的能量不应该随时间增加。实际上, 由于介质损耗, 其能量应该减少。这一点是稳定性分析的基础。为了考察场的能量, 首先把场展开为傅里叶级数

$$\mathcal{E}_z^n(i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^n e^{jk_m i \Delta x}, \quad k_m = \frac{m\pi}{L} \quad (8.2.14)$$

式中,  $L = M\Delta x$  表示求解区域的长度。众所周知, 场的能量正比于各傅里叶模式幅度的平方和。因此, 为了确保能量不随  $n$  的增加而增加, 可以检查傅里叶模式的幅度。为此, 将式(8.2.14)代入式(8.2.6)的无源情况, 得到