“十三五”国家重点出版物出版规划项目

名校名家基础学科系列
Textbooks of Base Disciplines from Top Universities and Experts

工科数学分析 下册

MATHEMATICAL ANALYSIS FOR ENGINEERING

孙兵　毛京中　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十三五”国家重点出版物出版规划项目
名校名家基础学科系列

工科数学分析

下册

主　编　孙　兵　毛京中
参　编　朱国庆　姜海燕

机 械 工 业 出 版 社

本书是“工科数学分析”或“高等数学”课程教材，分为上、下两册。上册以单变量函数为主要研究对象，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，定积分与不定积分，常微分方程等。下册侧重刻画多变量函数，从向量代数与空间解析几何开始，介绍多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分和级数等。

本书结构严谨，逻辑清晰，阐述细致，浅显易懂，可作为高等院校非数学类理工科专业的本科教材，也可作为高等数学教育的参考教材和自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析．下册/孙兵，毛京中主编．—北京：机械工业出版社，2018.8

“十三五”国家重点出版物出版规划项目　名校名家基础学科系列

ISBN 978-7-111-60288-0

Ⅰ.①工…　Ⅱ.①孙…　②毛…　Ⅲ.①数学分析－高等学校－教材　Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 137310 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　李　乐　汤　嘉
责任校对：陈　越　封面设计：鞠　杨
责任印制：孙　炜
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2019 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm・21.25 印张・543 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-60288-0
定价：55.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金　书　网：www.golden-book.com

前言

工科数学分析是一门重要的大学基础课程，包括微积分的基本知识、向量代数与空间解析几何、常微分方程等，其他内容各类教材略有差异。它能和中学的数学衔接起来，高深而略能欣赏，从而使学生获得解决实际问题能力的初步训练，为学习后续课程奠定必要的数学基础。微积分是文艺复兴和科技革命以来最伟大的创造，被誉为人类精神的最高胜利。牛顿靠微积分成就了牛顿力学，大部分科学上的成就都会用到微积分。解析几何是学习多变量微积分的重要准备，其知识结构也自成体系。常微分方程作为微积分的重要应用之一，它的形成与发展是和力学、天文学、物理学以及其他科学技术的发展密切相关的。数学的其他分支的新发展，如复变函数、李群、组合拓扑学等，都对常微分方程的发展产生了深刻的影响，当前计算机的发展更是为常微分方程的应用及理论研究提供了强有力的工具。

数学的重要性不言而喻，很多著名学者对此都做出过深刻的评价。“数学王子”高斯(Johann Carl Friedrich Gauss，1777－1855)说：数学是“科学之王”。德国物理学家伦琴(Wilhelm Conrad Röntgen，1845—1923)，在回答科学家需要怎样的修养时说：第一是数学，第二是数学，第三还是数学。复旦大学数学家李大潜院士说，数学学习的本质是提高素质。美国国家科学奖章获得者，瑞士苏黎世联邦理工学院数学家卡尔曼(Kálmán Rudolf Emil)在 2005 年国际自动控制联合会的世界大会上曾评论到：高技术的本质是一种数学技术。

国家安全依赖于数学科学。不论是密码学、网络科学与技术，还是大规模科学计算，没有数学知识的背后支持，这些学科哪一门可以走得远呢？军政部门的数据决策、后勤保障、模拟训练和测试、军事演习、图像和信号分析、卫星和航天器的控制、新设备的测试和评估、威胁检测等，离了数学，又有哪一个可以行得通呢？

即使是从文化的角度来看，数学的作用也是无处不在的。我们以折纸这一古老而有趣的文化为例，对此进行简要的说明。折纸背后的数学公理系统、在计算上的算法和软件开发，对于人们的生产、生活产生了重大的影响。人们将其应用到卫星太阳能帆板、汽车安全气囊的折叠和展开、人造血管支架乃至轮胎纹理的设计等方面，取得了巨大的成功。这种纯粹基于兴趣的、看起来毫无实际用途的研究，以出乎人们意料的方式在现实生活中产生了巨大的应用价值。

确实，人类正使用数学以前所未有的力度改变着整个世界，不论是用傅里叶变换分析音乐和弦，还是用计算流体力学技术设计新型足球，我们生活的方方面面正受益于数学的应用。在网络搜索、基因工程、地质勘探、现代医学、气候研究、电子设备开发等背后，数学一直都在。如果想了解世界是怎样运转的，我们必须明白数学的作用，学习它，了解它，掌

握它。我们不应只满足于科学的应用，更应去追问所做事情中的原理。

本书为“十三五”国家重点出版物出版规划项目，隶属于“名校名家基础学科”系列。全书分为上、下两册。上册以单变量函数为主要研究对象，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，定积分与不定积分，常微分方程等。下册侧重刻画多变量函数，从向量代数与空间解析几何开始，介绍多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分和级数等。一句话，工科数学分析的主要目的就是以极限为工具，研究函数的分析运算性质。从上册的单变量函数开始，到下册的多变量函数完结。在难度设置上，工科数学分析弱于数学系本科生学习的数学分析，而强于一般非数学专业的理工科学生必修的微积分或高等数学。

和传统教材不同的是，本书配套有可供在手机或平板电脑上使用的书伴 APP。作为全新的移动学习型教材，我们综合使用这种新媒介作为作者和读者的全方位交互平台，实现了传统纸质教材与网络互联平台的有机结合。利用手机或平板电脑扫描教材每页预留的二维码，读者可以得到本页的相关资源，如教材重要内容展开、有关数学实验、图片、动画、思考题答案、视频资料以及学术讲座等内容。而且，这些内容可以跟随使用情况随时进行动态增添修改。同时，借助于这种移动终端，学生还可以在平台上提供的讨论与提问板块直接和作者、同学及专业老师进行沟通和提问；教师在平台上可以在线答疑，有共性的问题可以吸纳为习题，个性的问题也能马上解决。我们希望这种新颖的互动学习方式可以提高学生的学习兴趣，有效地避免学习疲劳。换言之，我们希望教材是动态的、开放的，是具有完全状态反馈形式的“闭环系统”，是读者和作者共同编写完成的。这一点对于以往的传统教材来说是不可想象的。在使用本书的过程中，读者若有任何建议或意见，也可以通过该平台直接反映给我们，或者给我们发电子邮件(sun345@bit. edu. cn)联络，在此提前表示感谢。

本书的完成，得益于收到的众多支持和无私帮助，在此致以诚挚的感谢。特别感谢北京理工大学的田玉斌教授、蒋立宁教授的指导和帮助。

限于编者水平，书中定有不少错误和不妥之处，恳请读者不吝批评指正。

孙　兵　毛京中　朱国庆　姜海燕

北京理工大学

目　录

第六章 向量代数与空间解析几何

向量代数与空间解析几何的知识对于多元函数微分学及多元函数积分学是不可缺少的基础，也是其他数学分支以及力学、电学等自然科学常用的工具. 本章首先建立空间直角坐标系，介绍向量的一些运算，然后以向量为工具讨论空间平面与直线，最后介绍空间曲面与曲线. 学习时要注意与平面解析几何的联系与区别.

第一节 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

过空间一点 O 引出的三条互相垂直且具有相同长度单位的数轴称为**空间直角坐标系**（见图 6-1）. 点 O 叫作坐标原点，三条数轴分别叫作 x 轴、y 轴、z 轴. 我们在本章使用的空间直角坐标系都是右手系，它的 x 轴、y 轴、z 轴的次序与方向是按右手法则排列的，若将右手四个手指从 x 轴的正向经过 $90°$ 转到 y 轴的正向时，右手拇指刚好指向 z 轴正向.

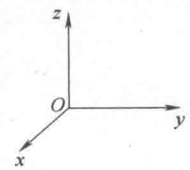

图 6-1

取定了空间直角坐标系后，我们就可以建立空间的点与三个有序实数之间的对应关系. 设 M 是空间中的一个点，过 M 分别作垂直于三个坐标轴的平面，这三个平面与三个坐标轴分别交于 A,B,C 三点（见图 6-2），这三个点在三个坐标轴上的坐标分别为 x,y,z，将有序数组 (x,y,z) 称为点 M 的坐标. 其中 x,y,z 分别叫作点 M 的 x 坐标、y 坐标、z 坐标. 反之，任意给定一个有序数组 (x,y,z)，在空间中有唯一的一个点以 (x,y,z) 为其坐标. 因此，空间中的点与有序数组 (x,y,z) 之间具有一一对应的关系.

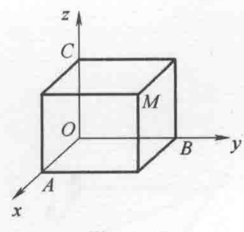

图 6-2

在空间直角坐标系中，每两条坐标轴所确定的平面叫作坐标面. 这样就确定了三个坐标面，分别为 xOy 面，yOz 面，zOx 面. 三个坐标平面把空间分成了八部分，每一部分叫作一个卦限. 如图 6-3所示，位于上半空间的四个卦限依次称为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限，位于下半空间的四个卦限依次称为Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限.

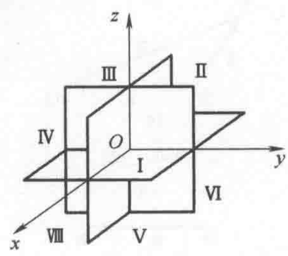

图 6-3

在每个卦限中，点的坐标的符号分别为

Ⅰ$(+,+,+)$，Ⅱ$(-,+,+)$，Ⅲ$(-,-,+)$，Ⅳ$(+,-,+)$，
Ⅴ$(+,+,-)$，Ⅵ$(-,+,-)$，Ⅶ$(-,-,-)$，Ⅷ$(+,-,-)$.

原点的坐标为(0,0,0). x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$，y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$，z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$. xOy 面上点的坐标为 $(x,y,0)$，yOz 面上点的坐标为 $(0,y,z)$，zOx 面上点的坐标为 $(x,0,z)$.

二、空间两点间的距离

如图 6-4 所示，设 $M(x_1,y_1,z_1)$ 和 $N(x_2,y_2,z_2)$ 是空间中两点，过点 M 和 N 分别作垂直于 xOy 面的直线，它们分别与 xOy 面交于点 M_1，N_1，过点 M 作 NN_1 的垂线 ML，则点 M 到点 N 的距离为

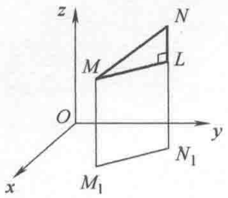

图 6-4

$$d=\sqrt{ML^2+NL^2}=\sqrt{M_1N_1^2+NL^2},$$

由于 $M_1(x_1,y_1,0)$，$N_1(x_2,y_2,0)$，因此由平面解析几何可知

$$M_1N_1^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

又

$$NL=|z_2-z_1|,$$

故有

$$\boxed{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.}$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 间的距离为

$$\boxed{d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.}$$

与平面解析几何中两点间的距离公式相比较，空间中两点间的距离公式中只是增加了一项 $(z_2-z_1)^2$.

三、坐标轴的平移

如果将空间直角坐标系 $Oxyz$ 平移得一新的直角坐标系 $O'x'y'z'$，其中 O' 在原坐标系中的坐标为 (a,b,c). 设点 M 在旧坐标系中的坐标为 (x,y,z)，在新坐标系中的坐标为 (x',y',z')，则点 M 的新旧坐标之间有如下关系：

$$\begin{cases}x=x'+a,\\ y=y'+b,\\ z=z'+c.\end{cases}$$

习题 6-1

1. 指出下列各点在空间直角坐标系中的位置.

   $A(1,-2,3)$；$B(2,3,-4)$；$C(2,-3,-4)$；$D(-2,-3,1)$；

   $E(3,4,0)$；$F(0,4,-1)$；$G(0,0,3)$；$H(0,-2,0)$.

2. 求点 $(2,-1,3)$ 关于原点、各坐标轴及各坐标面的对称点的坐标.
3. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.
4. 证明：以 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.
5. 在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.
6. 在 yOz 面上求与点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距

离的点.

第二节 向量及其线性运算

一、向量的概念

在实际问题中,我们常遇到两类不同性质的量.一类是只具有大小的量,称为**数量**.例如时间、质量、温度、体积等都是数量.另一类是不仅有大小而且还有方向的量,称为**向量**.例如力、速度、加速度等都是向量.向量可以用有向线段来表示.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向(见图 6-5).以 A 为起点,B 为终点的向量记作$\overrightarrow{AB}$或 $\boldsymbol{a}$.

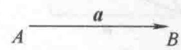

图 6-5

向量$\overrightarrow{AB}$(或 $\boldsymbol{a}$)的大小叫作向量的模,记作$|\overrightarrow{AB}|$(或$|\boldsymbol{a}|$).

模为零的向量叫作零向量,记作 $\mathbf{0}$.零向量没有确定的方向,或者说它的方向是任意的.

模为 1 的向量称为单位向量.与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^0$.

与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反但是模相等的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所在的线段平行,则称此二向量平行,记作$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

我们在本书中所讨论的向量都是自由向量,即向量可以在空间中任意地平行移动,如此移动后仍被看成是原来的向量.因而如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同,则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是相等的,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.相等的向量通过平移能完全重合.对自由向量而言,相互平行的向量又可称为共线的向量.以后为了讨论方便起见,我们常常把向量$\overrightarrow{AB}$平行移动,得到一个以原点为起点的向量$\overrightarrow{OM}$($\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$).我们将以 M 为终点的向量$\overrightarrow{OM}$叫作点 M 的向径.

二、向量的加减法

根据力学中力、速度等的合成法则,我们对一般的向量加法有如下定义.

定义 1 **设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,以这两个向量为邻边作平行四边形 $OACB$(见图 6-6a),其中$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则其对角线向量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,这种求和的法则叫作平行四边形法则.**

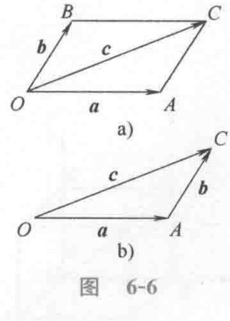

图 6-6

由于有$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,因此也可以用三角形法则定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,如图 6-6b 所示,将向量 $\boldsymbol{b}$ 平行移动,使其起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,则 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时,如图 6-7 所示,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$.

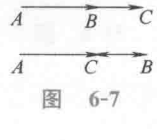

图 6-7

求多个向量的和时,可利用多边形法则(三角形法则的推广),如图 6-8 所示,将向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 依次首尾相接,有

$$a+b+c+d=\overrightarrow{AB}.$$

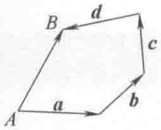

图 6-8

向量加法有以下运算规律.

(1) **交换律** $a+b=b+a$;

(2) **结合律** $(a+b)+c=a+(b+c)$.

这两个运算规律可以分别根据向量加法的定义及图 6-9 和图 6-10 得到证明.

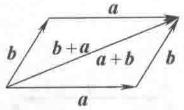

图 6-9

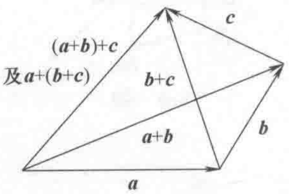

图 6-10

利用加法的逆运算可以定义向量的减法.

定义 2 **若 $b+c=a$,则称 c 为 a 与 b 的差向量,记作 $c=a-b$.**

也可以利用 $a-b=a+(-b)$ 定义 a 与 b 的差向量.图 6-11 中的 c 都表示 a 与 b 的差向量.

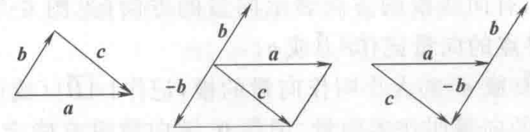

图 6-11

三、数与向量的乘积

如果将两个相等的向量 a 与 a 相加,其和向量 $a+a$ 的方向与 a 的方向相同,而大小为 a 的两倍,我们常常将 $a+a$ 记作 $2a$,这便是一个数与向量的乘积.一般地,有如下定义.

定义 3 **实数 λ 与向量 a 的乘积记作 λa(叫作数乘向量),λa 是一个向量,它的模为 $|\lambda a|=|\lambda||a|$,它的方向为:当 $\lambda>0$ 时,λa 与 a 同向;当 $\lambda<0$ 时,λa 与 a 反向;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda a=0$.**

数乘向量有下列运算规律.

(1) **结合律** $\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$;

(2) **分配律** $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$,

$$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b,$$

证 (1) 由于

$$|\lambda(\mu a)|=|\lambda||\mu a|=|\lambda||\mu||a|=|\lambda\mu||a|=|(\lambda\mu)a|,$$

即 $\lambda(\mu a)$与$(\lambda\mu)a$ 的模相等,又不论 λ,μ 为什么样的数,由定义可得知 $\lambda(\mu a)$与$(\lambda\mu)a$ 的方向也相同,因此有

$$\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a;$$

(2) 根据向量加法的定义很容易证明

$$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a,$$

利用图 6-12 及相似三角形的有关知识,可以得到

$$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b.$$

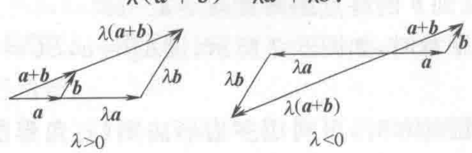

图 6-12

由数乘向量的定义可知 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$，因此当 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$ 时，有

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},$$

由此可以推出下面定理.

定理　设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是存在数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证　充分性是显然的，下面证必要性.

设 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则必有 $\boldsymbol{a}^0=\boldsymbol{b}^0$ 或 $\boldsymbol{a}^0=-\boldsymbol{b}^0$，即

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\text{或}\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=-\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|},$$

取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$ 或 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，则有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，于是定理得证.

四、向量的投影

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如图 6-13 所示，过 $\boldsymbol{a}$ 的起点 M 与终点 N 分别作与向量 $\boldsymbol{b}$ 所在的直线垂直的平面，这两个平面分别与 $\boldsymbol{b}$ 所在的直线交于点 M' 和 N'，由前面讨论知道，一定存在数 λ，使 $\overrightarrow{M'N'}=\lambda\boldsymbol{b}^0$，我们将这个数 λ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，记作 $(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}$，即

$$(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=\lambda.$$

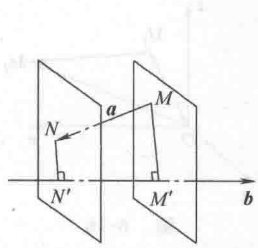

图　6-13

将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点移到一起，如图 6-14 所示，规定不超过 π 的角 $\angle AOB=\varphi$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，即 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\varphi$. 另外，规定向量与坐标轴的正方向的夹角为向量与坐标轴的夹角.

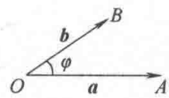

图　6-14

由以上定义可以得出**向量的投影具有如下性质.**

(1) $(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$;

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{c}}=(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{c}}+(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{c}}$.

五、向量的坐标表示

下面引进向量的坐标，把向量与数组联系起来，从而可将向量的运算化成数组的运算.

如图 6-15 所示，设 $\overrightarrow{OM}$ 是起点为原点、终点为 $M(x,y,z)$ 的向量，根据向量的加法，有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

在 x 轴、y 轴、z 轴的正方向分别取单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$（称为基本单位向量），则存在数 x,y,z，使 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$，于是有

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

我们将此式称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表示式，它也可以简写为

$$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\},$$

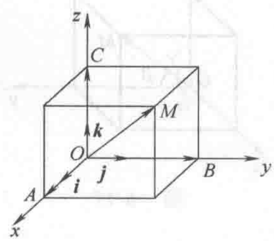

图　6-15

其中 x,y,z 称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标，它们也是向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影.

利用向量的坐标表示式，可以将前面用几何方法定义的向量的

模及向量的线性运算化成向量的坐标之间的运算(其中用到向量加法及数乘向量的运算规律).

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$,则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\pm(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k},\\\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

如图 6-16 所示,当 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 是起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的向量时,由于

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1},$$
$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$
$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

因此有

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},$$

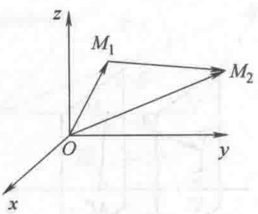

图 6-16

此式即为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示式,其中 x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标.如果我们把向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 平移,使其起点 M_1 移至原点时,则其终点 M_2 将被移到点$(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

利用向量的坐标,可以将 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 表示为

$$x_2=\lambda x_1,y_2=\lambda y_1,z_2=\lambda z_1,$$

或

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}.$$

在此式中,若某个分母(或分子)为零,则相应的分子(或分母)也应取为零.例如,如果有 $z_2=0$,则意味着向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点与终点的 z 坐标相同,因而向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直于 z 轴,由于 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,故 $\boldsymbol{a}$ 也垂直于 z 轴,所以相应的 z_1 应等于零.

六、 向量的方向角与方向余弦

这里要讨论如何用向量的坐标表示向量的方向.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴正方向的夹角分别为 α,β,γ(见图 6-17),则 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,而 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.方向角或方向余弦唯一确定了向量的方向.

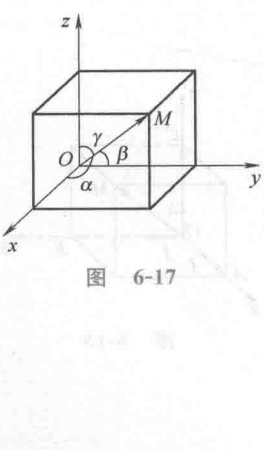

图 6-17

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,则

$$\boldsymbol{a}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\xlongequal{\triangle}x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

如将 $\boldsymbol{a}$ 的起点移至原点,则 $\boldsymbol{a}$ 的终点被移到 $M(x,y,z)$,于是 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$,故有

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

由以上三式,又可以得到

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

因而 $\qquad \boldsymbol{a}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$

例 1 已知 $M_1(1,-2,3)$,$M_2(0,2,-1)$,求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模及方向余弦.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(0-1)\boldsymbol{i}+[2-(-2)]\boldsymbol{j}+(-1-3)\boldsymbol{k}$

$$=-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k},$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{33},$$

$$\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{33}},\cos\beta=\frac{4}{\sqrt{33}},\cos\gamma=\frac{-4}{\sqrt{33}}.$$

例 2 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 5,它与 x 轴、y 轴正方向的夹角都是 $60°$,与 z 轴正方向的夹角是钝角,求向量 $\boldsymbol{a}$.

解 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0=|\boldsymbol{a}|\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$,

由于 $\qquad \alpha=\beta=60°,\cos\alpha=\cos\beta=\dfrac{1}{2},$

得 $\qquad \cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2},$

由于 γ 是钝角,故

$$\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\boldsymbol{a}=5\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}=\left\{\frac{5}{2},\frac{5}{2},-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

习题 6-2

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=60°$,且 $|\boldsymbol{a}|=5$,$|\boldsymbol{b}|=8$,计算 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 和 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.
2. 试用向量证明:如果平面上一个四边形的对角线互相平分,则它是平行四边形.
3. 设正六边形 $ABCDEF$(字母顺序按逆时针方向),设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$,试用向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AF}$ 和 $\overrightarrow{CB}$.
4. 设向量 $\overrightarrow{AB}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$,其中 A 点的坐标为 $(2,-1,7)$,求 B 点的坐标.
5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$ 的单位向量.
6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,3\}$,$\boldsymbol{b}=\{-4,5,8\}$,$\boldsymbol{c}=\{-2,1,0\}$,求向量 $\boldsymbol{d}$,使 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$ 是零向量.
7. 证明三点 $A(1,0,-1)$,$B(3,4,5)$,$C(0,-2,-4)$ 共线.
8. 设向量 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影.
9. 设点 $A(3,2,-1)$,$B(5,-4,7)$,$C(-1,1,2)$,求 $\triangle ABC$ 上由点

C 向 AB 边所引中线的长度.

10. 设点 A,B,M 在一条直线上,$A(1,2,3)$,$B(-1,2,3)$,且 $AM:MB=-\frac{3}{2}$,求点 M 的坐标.
11. 设 $A(1,2,-3)$,$B(2,-3,5)$为平行四边形 $ABCD$ 相邻的两个顶点,而 $M(1,1,1)$为两条对角线的交点,求其余两个顶点的坐标.
12. 已知三角形的三个顶点分别为 $A(2,5,0)$,$B(11,3,8)$,$C(5,1,12)$,求其重心的坐标.
13. 已知点 $M(4,\sqrt{2},1)$,$N(3,0,2)$,计算向量$\overrightarrow{MN}$的模、方向余弦和方向角.
14. 设一向量与 x 轴和 y 轴的夹角相等,而与 z 轴的夹角是前者的两倍,求此向量的方向角.
15. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与单位向量 $\boldsymbol{j}$ 成 60°角,与单位向量 $\boldsymbol{k}$ 成 120°角,且 $|\boldsymbol{a}|=5\sqrt{2}$,求向量 $\boldsymbol{a}$.
16. 向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于两向量 $\boldsymbol{b}=\{7,-4,-4\}$和 $\boldsymbol{c}=\{-2,-1,2\}$夹角的平分线,且$|\boldsymbol{a}|=5\sqrt{6}$,求向量 $\boldsymbol{a}$.

第三节 向量的乘积

一、向量的数量积

1. 数量积的概念

在物理学中我们知道,当质点在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿某一直线由 A 移动到 B 时,如图 6-18 所示,如果记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{s}$,则力 $\boldsymbol{F}$ 做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}\rangle, \tag{1}$$

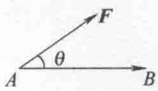

图 6-18

其中$\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}\rangle$为向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角. 两个向量之间的这种运算有时会在其他问题中遇到,为了更方便地讨论这种运算,给出如下定义.

定义 1 **设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为两向量,则$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,其中$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.**

根据向量的投影定理,可以得到向量的数量积与向量的投影有如下关系:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=|\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}},$$

$$(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|},\ (\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

由数量积的定义可知,式(1)中的功可以表示成

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

数量积有如下运算规律.

(1) **交换律** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) **结合律**　$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$（$\lambda$ 是数）；

(3) **分配律**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

证　(1) 根据数量积的定义，交换律显然成立；

(2) 如图 6-19 所示，当 $\lambda>0$ 时，$\cos\langle\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，当 $\lambda<0$ 时，$\cos\langle\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，因此有

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}&=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\\&=\pm\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|(\pm\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\\&=\lambda\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rangle,\end{aligned}$$

用同样方法可证明　$\lambda\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rangle=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；

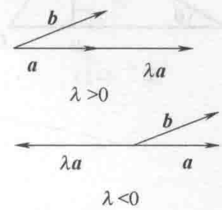

图　6-19

(3) 根据向量的数量积与向量的投影的关系及投影定理，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_c\\&=|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a})_c+|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{b})_c=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

例 1　试用向量证明三角形的余弦定理.

证　如图 6-20 所示，有 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

因此
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\pi-\theta)\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,\end{aligned}$$

这就证明了余弦定理.

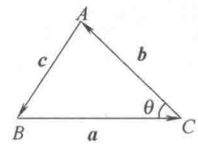

图　6-20

2. 数量积的坐标表示式

设向量

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

由数量积的运算规律，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1x_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+x_1y_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+x_1z_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})+y_1x_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+\\&\quad y_1y_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})+y_1z_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})+z_1x_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+z_1y_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})+\\&\quad z_1z_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}),\end{aligned}$$

根据数量积的定义，有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0,$$

因此得

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.}$$

此式称为数量积的坐标表示式. 由此式可以得到

$$\boxed{\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.}$$

还可以得到

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

其中 $\Leftrightarrow$ 表示充分必要条件.

例 2　已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(2,1,3)$，$B(1,2,1)$，

$C(3,1,0)$，求 BC 边上的高 AD 的长.

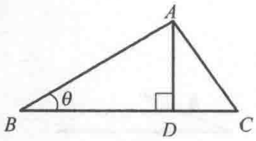

图 6-21

解 如图 6-21 所示，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}$$

$$=\frac{1\times2+(-1)\times(-1)+2\times(-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{6},$$

$$AD=|\overrightarrow{BA}|\sin\theta=\sqrt{6}\sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{35}{6}}.$$

例 3 设 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，求 $\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\rangle$.

解
$$\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\rangle=\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{d}|},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}&=(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=2|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle-3|\boldsymbol{b}|^2=2+2\cos\frac{\pi}{3}-3\times2^2\\&=-9,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\\&=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=52,\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{d}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=3,$$

故
$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{52},|\boldsymbol{d}|=\sqrt{3},$$

$$\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\rangle=\frac{-9}{\sqrt{52}\sqrt{3}}=-\frac{3\sqrt{39}}{26}.$$

二、向量的向量积

1. 向量积的概念

定义 2 **两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，它的方向是这样规定的：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 成右手系(见图 6-22).**

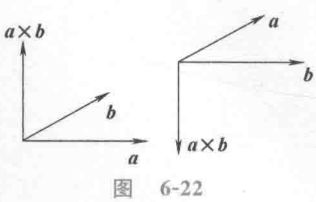

图 6-22

与数量积一样，向量积也有它的物理学背景. 我们可以从下面几个例子中看到这点.

例 4 在分析由力产生的力矩时，如图 6-23 所示，设 $\boldsymbol{F}$ 为力，则力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的力矩为

$$\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F},$$

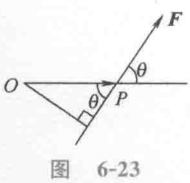

图 6-23

即力矩是一个向量，它的模为

$$|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta=|\boldsymbol{F}|(|\overrightarrow{OP}|\sin\theta),$$

即等于力 $\boldsymbol{F}$ 的大小乘以点 O 到力 $\boldsymbol{F}$ 的距离，而力矩的方向与 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 都垂直.

例 5 设刚体以等角速率 ω 绕 l 轴旋转，如图 6-24 所示，设刚体上点 M 的线速度为 $\boldsymbol{v}$，角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{r}$ 为点 M 的向径，则有

$$|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{\omega}||\overrightarrow{NM}|,$$

由物理学知识可知，$\boldsymbol{\omega}$ 的方向如图所示，故有

$$|\overrightarrow{NM}|=|\boldsymbol{r}|\sin\theta=|\boldsymbol{r}|\sin\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{r}\rangle,$$

所以 $$|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}|\sin\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{r}\rangle=|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|,$$

又 $\boldsymbol{v}$ 垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{r}$，因此

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}.$$

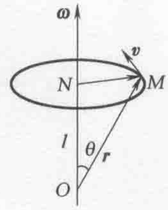

图　6-24

下面让我们来考察一下向量积的模的几何意义.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如图 6-25 所示，以它们为邻边作一平行四边形，根据向量积的定义，有

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=|\boldsymbol{a}|h,$$

因此 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模等于以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

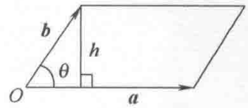

图　6-25

由向量积的定义，我们还可以得到，如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，则

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

向量积有下列运算规律.

(1) **反交换律**　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

(2) **结合律**　$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$　（λ 为数）；

(3) **分配律**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,
$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$.

2. 向量积的坐标表示

设向量

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

由向量积的运算规律，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1x_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+x_1y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+x_1z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+y_1x_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+\\&\quad y_1y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+y_1z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+z_1x_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+z_1y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+\\&\quad z_1z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}),\end{aligned}$$

根据向量积的定义，有

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},$$

因此得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(y_1z_2-y_2z_1)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

为方便记忆，可将此式写成三阶行列式的形式

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}.}$$