多项式系统求解的算法研究

DUOXIANGSHI

XITONG QIUJIE DE SUANFA YANJIU

季振义　刘　诚　刘健康　著

非外借

西南财经大学出版社

四川省教育厅项目：16ZB0056

多项式系统求解的算法研究

DUOXIANGSHI

XITONG QIUJIE DE SUANFA YANJIU

季振义　刘　诚　刘健康　著

西南财经大学出版社

·成都·

图书在版编目(CIP)数据

多项式系统求解的算法研究/季振义,刘诚,刘健康著. —成都:西南财经大学出版社,2018.6
ISBN 978-7-5504-3526-1

Ⅰ.①多… Ⅱ.①季…②刘…③刘… Ⅲ.①多项式—算法—研究
Ⅳ.①O174.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 125721 号

多项式系统求解的算法研究
季振义 刘诚 刘健康 著

责任编辑:高玲 廖韧
封面设计:墨创文化
责任印制:朱曼丽

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网 址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电 话	028-87353785 87352368
照 排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印 刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	170mm×240mm
印 张	12
字 数	217 千字
版 次	2018 年 6 月第 1 版
印 次	2018 年 6 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5504-3526-1
定 价	88.00 元

安徽大学图书馆 藏书 www.lib.ahu.edu.cn

1. 版权所有,翻印必究。
2. 如有印刷、装订等差错,可向本社营销部调换。

作者简介

季振义（1983 年 2 月—），男，四川农业大学讲师，长期从事计算机代数、多项式系统求解的符号数值混合算法研究，在国内外期刊发表学术论文近 15 篇，主研、主持科研项目 6 项。

刘诚（1982 年 7 月—），男，四川农业大学讲师，长期从事非线性系统优化、非线性数据处理、人工智能和模式识别方面的研究工作，发表学术论文 20 余篇，主持、主研科研项目 10 余项，独著专著 1 部，编写教材 2 部。

刘健康（1975 年 9 月—），男，四川农业大学副教授，硕士生导师，从事数学物理计算方法、凝聚态物理的教学与科学研究，公开发表学术论文 20 余篇，参与国家自然科学基金 2 项、省厅级课题 5 项，主持校级课题 2 项，独著专著 1 部，主编教材 1 部。

序

多项式方程组的构造性理论及相关的求解算法是具有基本重要性的经典课题。伟大的数学家、哲学家笛卡尔曾有过这样一个伟大的设想（并为之进行了伟大的实践，从而创立了解析几何学）：

一切问题都可以转化为数学问题；

一切数学问题又可以转化为代数问题；

一切代数问题最终可以转化为方程的求解问题。

虽然这一伟大的设想没有成功，然而，随着科学研究的不断进步，多项式系统的求解问题在技术工程领域起着越来越重要的作用。对于单变元（线性）系统，学术界已经进行了非常深入的研究。单变元（线性）系统在科技中起到了非常重要的作用。关于多项式系统的研究，由于其本身所具有的高复杂性，以前的研究仅仅停留在理论层面上。随着电子计算机的出现，多项式系统的求解问题逐渐从理论研究转换到算法研究。

在本书中，笔者根据自己多年的学习和研究，分别介绍了牛顿迭代在特殊情况下二阶收敛性的重构、半代数系统的实根隔离、正维数系统的实根计算及其应用以及三种常用结式之间的关系等问题。为了使读者对多项式方程组求解有一个系统的了解，笔者还补充了若干必要的基本知识。它们主要集中在书中第二章。书中属于笔者的工作主要是：

（1）非线性系统奇异解的计算；

（2）半代数系统实根隔离的数值方法；

（3）正维数系统的实根的计算方法及其在微分系统稳定性判定中的应用；

（4）三种多项式系统多余因子之间关系的讨论；

（5）代数系统非混合分解的快速算法设计。

作为迭代算法中的经典方法，牛顿迭代算法是牛顿在17世纪提出的在实

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

数域和复数域上近似求解方程的一种方法。由于它具有二阶收敛性，牛顿迭代算法成了众多数值迭代算法的核心，然而，牛顿迭代算法仍然有它的局限性：奇异解。本书第三章依据对偶空间中元素的性质，给出了恢复奇异解二阶收敛性的算法，且给出了完整的理论证明；在此基础上，开发了 Maple 程序 Refine_root，通过一些实际例子表明，它的效率比我们已知的若干方法的通用程序要高。利用该方法，我们给出了简单的潮流系统的病态解。

众所周知，通过数学建模，我们可以将众多的生产实际问题转化为数学问题，特别是转化为方程问题。然而，由于实际问题中各种参数具有不同的实际意义，我们往往得到的不只是等式系统，同时也会得到一些不等式系统。半代数系统的求解在实际问题中具有重要的意义。结合同伦方法和区间牛顿方法，我们开发了求解半代数系统实根隔离的通用程序 Real_root_iso。大量的实验数据表明，它的效率比已知的符号计算通用程序 DISCOVER 要高很多。

动力系统的稳定性分析在控制系统的设计以及制造中起着至关重要的作用。对于线性系统，稳定性分析是非常简单的。但是对于非线性系统，验证平衡点的稳定性是非常困难的。此时可以通过李雅普诺夫方法解决此问题。在本书中，我们通过求解不等式系统，提出了一种快速验证系统稳定的方法。

学习过线性代数的读者都应该知道，通过系数矩阵，不需要求解我们就可以判定该系统的解的存在情况。对于多项式系统，我们通过结式也可以在不求解的情况下判断解的存在情况。因此结式的构造非常复杂，构造方法众多，不同的方法有不同的优缺点。然而它们都具有多余因子，去除多余因子才可以准确地判断解的存在。我们分析了三种结式之间的多余因子的关系，同时提出了一种新的构造 Caley-Sylvester 结式的快速递归方法。

多元代数系统不同于单变元代数系统，它的项数和次数理论上都可以是任意的，因此它不可能像单变元系统那样，通过各种消元方法，直接化为三角形系统进行求解。代数簇的分解是另外一种求解代数系统的思路。该方法类似于单变元的消元。它也是通过一定的消元（比单变元复杂），将原系统的解集分解为若干拟三角系统的解集的并集，从而达到求解的效果。通过分析不可约分解，我们发现，原有方法有两个地方比较复杂，中间存在很多不必要的计算过程。因此借助于弱非退化条件，我们提出了一种改进的方法。实验发现，我们改进的算法效率更高。

随着电子计算机的不断进步，未来代数系统的研究将集中在算法上。本书

在每一章节中，都针对某一问题，利用相关的数学理论，提出了相应的解决方法。一些研究成果具有开创性和先进性，这些成果是笔者长期研究的积累。本书内容充实，论述简明扼要，具有广泛的参考价值，可以作为相关专业学生的参考用书。

应当指出，笔者的研究工作刚刚起步，其中还有许多问题需要去解决。例如，算法的复杂度分析、并行算法程序的设计等。由于笔者水平有限，本书中难免存在错误，不妥之处望广大读者批评指正。

目　录

1 绪 论

1.1 研究工作的背景与意义

伟大的数学家、哲学家笛卡尔曾有过这样一个伟大的设想（并为之进行了伟大的实践，从而创立了解析几何学）：

一切问题都可以转化为数学问题；

一切数学问题又可以转化为代数问题；

一切代数问题最终可以转化为方程求解问题。

虽然这一伟大的设想不可能完全实现，然而它对现实世界中的许多数学问题与科技问题都成立。例如：在定理机器证明中，吴文俊院士[1]在20世纪70年代就提出了数学机械化的思想，通过求解多项式方程组实现了初等几何的机器证明；杨路等人[2]通过半代数系统的实根分类实现了不等式的机器证明。在软件安全方面，杨路和周巢尘等人[3,4]提出了通过半代数系统的实根计算验证程序终止性的方法。除此之外，诸如机器人逆运动学、分片代数簇、化学反应稳定性分析等实质上也是非线性系统的求解问题。

基于非线性系统求解的重要性，“数学机械化方法及其在信息技术中的应用”项目于2004年成功进入了国家重点基础研究发展计划（973计划）立项。针对数学机械化的核心问题有：多项式方程组的求解问题，各种高效的消去法的研究，开展符号数值综合计算的研究，开展虽不完备但对大多数情况具有低复杂度、高效率的探索式算法的研究；在应用方面，开展非线性方程组求解在信息安全的理论和实践中的应用的研究以及在广义Stewart平台中的应用。

随后在2010年，“数学机械化方法及其在数字化制造中的应用”也成功进入了国家重点基础研究发展计划（973计划）立项项目。在其核心科学问题[5]中专门设立了“基于混合计算的误差可控算法”的课题组。其主要的研

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

究目标是：针对线性或者非线性代数基本运算问题，发展基于符号数值混合计算的误差可控算法；研究数字化设计制造中出现的半代数系统，发展和设计半代数系统的高效、稳定、可信的求解算法，并且将其应用于数字化设计中出现的代数曲面的拓扑确定、曲面求交、曲面间距离等若干关键问题。总体目标是在算法的实时性、精确性、可信性等方面满足相关学科目前和今后一个时期内的实际需求。

可以说，21 世纪是非线性科学的世纪。科学研究表明，非线性方程组的求解是非线性科学的核心。国内外众多学者在非线性方程组的理论和科学计算方面都做了大量的研究工作，然而求解非线性方程组至今仍然是一个科学难题。在研究非线性代数方程组的求解过程中，每一个成果都可能为非线性科学领域带来突破性的进展。

非线性系统的求解策略，大体上分为两类：符号计算和数值计算。符号计算可以保证结果的准确性和有效性，因此它是首选的计算方法。然而它的复杂性使得它只能处理小规模的问题。所以随着问题规模的不断变大，符号方法基本已经变成理论上行得通，而实际上却是不可接受的。此时数值方法的高效率性就体现出了它的优势。然而数值计算的误差问题无处不在：实数的有限精度表示、原始数据误差、离散化连续函数的过程中产生的误差，以及计算误差的积累等。对于大规模问题，微小的误差经过多次误差累积会导致误差的扩大。还有一点，在数值方法面前，许多问题本身就是病态问题。比如重零根问题，用迭代算法返回的是错误结果。种种原因导致计算结果发生了质的变化，从而可能引起无法估量的损失。因此，计算结果的可靠性、准确性以及鲁棒性是至关重要的。解决上述问题所采取的基本方法是符号数值混合计算。

因此，本书针对非线性计算问题中的病态问题、半代数系统实根隔离的高效可信算法以及代数系统的化简问题进行深入研究，无论是对非线性问题的计算在科学计算中的应用，还是对实代数几何理论的进一步发展，都有着重要的意义。本书的工作发挥了课题组在符号数值混合计算中已有的优势，深入研究快速、稳定、可验证的混合算法，为进一步探索和解决相关的实际问题提供了理论基础和技术支持。

1.2 国内外研究历史与现状

虽然符号数值混合计算的发展历史只有十几年，然而它却在很多领域带来

了丰硕的成果。1985 年，Kaltofen[6] 首先给出了一个绝对不可约因式分解，并建议该算法采用浮点数计算，当然给出的结果也是近似绝对不可约因式分解。吴文俊院士在文献［7］中提出了一种近似数的符号表达方法，并且描述了通过近似数的正确表示来稳定地求解多项式方程组和多变元多项式的近似分解。在定理机器证明方面，张景中院士[8] 设计了并行数值方法的高效算法。2000 年，Corless 等人[9] 采用数值近似计算方法来求参数曲线和参数超曲面的隐式化方程，当然最后的结果也是近似的。近几年，中国科学院数学机械化重点实验室的支丽红研究员[10-14] 采用符号数值混合计算在近似多项式因式分解、近似多元多项式方程组求解、近似多项式的最大公因子等方面取得了丰硕的成果，并且最近在近似计算得到精确结果领域取得了重要突破。张景中院士和冯勇研究员[15] 提出了采用近似计算获得准确因式分解的方法，但是没有具体分析解决近似计算与准确结果的矛盾问题。他们在随后的文献［16］中合作解决了浮点数到有理数的重构问题，为混合计算获得准确值之间的鸿沟架起了一座桥梁，并将该方法成功地应用到了多项式因式分解中。随后，秦小林[17] 等通过近似数获得极小多项式的策略，得到了多项式的准确因式分解。在二元多项式系统求解问题方面，文献［18］首先通过结式方法得到两个单变元代数方程，通过判定多项式系统的下界，匹配两个单变元方程的实根，从而得到原系统的实根以及实根的重数。

在重零根计算方面，文献［19-35］均对此问题进行了深入的研究，在此只介绍与本书相关的内容。1985 年，Griewank[19] 研究了雅克比矩阵的余秩为 1 的系统，需要指出，该方法只适合重数等于 2 的零点。针对这一问题，支丽红等人基于 Stetter[20] 的策略，在文献［21］中给出了获得代数系统在近似奇异解的对偶空间的算法。利用对偶空间对原系统做微分运算，得到一个满秩的系统。并以此为基础结合正则牛顿方法，得到了高精度的重零根，且证明了雅克比矩阵余秩为 1 的系统，deflation 的次数等于重零点的重数。由于一个极小的扰动都有可能将系统的重零根变成非重零根，因此文献［22］通过在原系统中增加变量的方式，将文献［21］中得到的不含重根的系统变成方的系统，利用区间算法研究了这类系统含有重零点的误差界问题。对于一般的非线性系统，Leykin 等人[23] 提出了基于雅克比矩阵行列式等于零的方法。由于行列式计算的高复杂性，笔者将行列式等于零转化为求解雅克比矩阵构成的线性方程组。以系统在近似奇异点的雅克比矩阵以及其近似解空间为基础，构造新的代数系统，从而得到扩充的代数系统。如果扩充的代数系统在初始点的雅克比矩阵满秩，则原系统的奇异点为扩充系统的单重零点。否则循环这个过程，直到

得到一个不存在奇异解的系统，而且证明了这个过程必定会在有限步后终止。然而该算法在构造扩充系统的时候需要增加变量，每一次循环都使变量的个数增加一倍，最终得到一个高维的不含重根的代数系统。然而高维系统的计算还是一个比较困难的问题，如何有效地减少变量个数从而降低最终系统的维数仍然是一个需要解决的问题。需要指出的是，该方法没有使用对偶空间，对于雅克比矩阵的余秩不等于1的系统，许多系统仅仅需要1次deflation就可以构造满秩的系统，效率明显高于通过对偶空间构造满秩的系统。文献［32］研究了系统存在重根的误差界问题。文献［33］通过雅克比矩阵的左右解空间恢复了牛顿迭代算法的二次收敛性。值得注意的是，该方法还可以计算系统的高维重根。文献［34］研究了多项式系统的最大诺特空间，利用乘积矩阵的迹得到精度更高的奇异解。文献［35］使用对偶空间构造了雅克比矩阵满秩的系统。除了计算奇异解，如何判定奇异解的重数也是代数几何中的一个重要课题，这个问题等价于判定系统在奇异解局部商环的维数。早在2001年，Mourrain[36]就给出了一个显式表示对偶空间元素的公式。随后Dayton等人[37,38]利用重数矩阵解答了重数问题。然而随着系统规模和重数的变大，重数矩阵的阶数也越来越高。因此这增加了后面计算重数矩阵的解空间以及去掉多余算子的难度。最近Zeng在文献［39］中，结合对偶空间元素关于微分算子的封闭性，降低了重数矩阵的维数，提高了算法的效率。在文献［40］中，作者采用逐次部分求解方程的策略，进一步提高了算法的效率。支丽红[21,22,41]考虑了雅克比矩阵余秩等于1的系统的对偶空间计算问题。文献［42］基于非标准分析采用吴特征列方法由原方程得到含无穷小参数的代数方程，得到原方程孤立解的重数。Sommse等人[43,44]利用对偶空间的维数解决了判定正维数解的局部维数问题。本书第三章，针对雅克比矩阵余秩为1的非线性系统，构造了显式表示对偶空间元素的公式，并以此为基础，提出了快速恢复牛顿迭代算法二阶收敛性的方法，成功地解决了潮流计算的病态问题。

半代数系统的实根隔离是非常活跃的研究领域，它与不等式的机器证明以及程序终止性验证密切相关。目前已有一些算法来解决此问题。例如：陆征一等人[45]研究了三角系统的实根隔离问题。算法的基本思想是：首先基于吴特征列方法得到一系列的三角系统；然后通过估计函数的极大极小值完成三角系统的实根隔离。然而该算法只能解决没有重根的三角系统的问题。Collinsp[46]提出了基于区间方法的实根隔离算法。文献［47］针对零维三角系统提出了一个既能隔离实数解又能判定解的重数奇偶性的算法。文献［48］提出了一个隔离零维三角形多项式系统实根并计算解的重数的有效的、完整的算法。该

文章用一种很自然的方式定义了三角系统的解的重数，并且证明了该定义与经典的重数定义的等价性。其采用单变元多项式的无平方因子分解得到实根的重数，隔离无平方部分的实根得到原系统的实根区间。文献［49］基于经典的吴特征列方法给出了一个保持重数的零点分解定理及其算法。夏碧灿等人在文献［50］中研究了半代数系统的实根问题。算法首先将等式系统转化为三角列，然后将三角列半代数系统转化为正则三角列半代数系统，最后通过隔离正则三角列半代数系统得到原系统的实根区间。文献［51］采用区间算法提高了隔离三角系统实根的效率。沈飞等人在文献［52］中结合同伦算法和区间牛顿算法，提出了实根隔离的混合算法。该方法首先利用连续同伦算法得到系统在 $\mathbb{C}$ 上的所有的根；并基于此，构造初始区间向量，使得每一个区间向量包含第一步得到的复数根的实部；随后采用区间牛顿算法验证实根的存在性。由于该方法采用的是数值运算，因此，相比其他符号方法，该算法的效率更高，而且利用区间算法对实根的存在性加以验证，因此其结果是可信的。本书在第四章中将其推广到半代数系统，弥补了原有符号方法的低效率性。

求解正维数系统的实根一般有两种思路：第一种是 G. E. Collins 在 1975 年提出的柱形代数分解[46]。该方法的基本思想是将 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 剖分成“块”，通过对“块”中个别点的检验来判定公式是否成立。柱形代数分解具有双指数复杂度，导致它只能处理低维的小规模问题。随后有了一些关于柱形代数分解的改进算法[54-55]。第二种称为关键点方法。该方法通过计算空间中任意一点到曲面的极小距离而得到曲面上的实数点。其思想最早来自 Seidenberg[56] 的工作。随后文献［57-65］研究了实数点的计算问题。在文献［57］中，Grigorirv 等人研究了半代数系统是否有实根的问题，且设计了具有单指数复杂度的算法。文献［58，59］采用 Polar varieties 求解系统的实数解。文献［60，61］利用半正定规划计算实数解。然而该方法只能处理一类系统：系统的实根个数有限。文献［62］依据文献［56］的思路，研究了一类系统的实根计算问题：系统中只有一个方程。在该文献中作者分析了关键点组成的集合的性质，且证实了关键点集合中至多有有限个奇异点。在计算零维系统的实数根时，作者采用有理单变元表示计算零维系统的实根。在随后的文章［63］中，作者将其推广到含有多个方程的系统。为了降低符号方法的复杂度，Hauenstein[64] 采用文献［56］的策略，构造了一种特殊的同伦方程，使得当同伦参数 t 趋向于零时，可以得到系统代数簇上每个不可约分支的实数点。随后吴文渊等[65]将在空间中任意选取一点的策略改进为选择一个向量，将计算实根分为两个步骤：第一步，通过随机的线性方程，构造一个方的系统。若有连

通分支的实根不在此系统中，则此连通分支的实根一定满足由拉格朗日优化问题构成的系统。第二步，采用对原系统增加扰动的方式，避免极小距离点为奇异解的情形。文献［66］采用两种方法验证了正维数系统实根的存在性。然而上面这些方法只能解决一类系统：系统所有的不可约分支均具有相同的维数，且维数等于系统变量与方程个数之差。本书第五章提出了如何针对一般正维数系统的算法来弥补现有算法的缺陷；同时将微分系统李雅普诺夫函数的计算问题转化成正维数多项式系统的实根计算问题。相比于传统的算法，该算法效率更高。

结式一直是代数方程化简中最方便有效的方法，它的显著特点就是构造方法简单清晰，基本思想初等。线性代数系统的系数矩阵就是一种最简单的结式。多项式系统的结式可以理解为将此系统通过各种变化，使变化后的系统中方程个数等于变量的幂积个数。将这些幂积看作线性系统中的单变量，这个系统就可以看作是线性系统，它的系数矩阵就是此多项式系统的结式。据我们所知，Leibniz 最早于 1693 年提出了结式这个词来表示行列式[67]。E. Bezout[68]构造了一个结式来判定两个单变元 n 次多项式是否有公共解。随后 A. Cayley[69]利用增加一个变量的方式构造出了同样的结式。最经典的 Sylvester 结式最早出现在 1853 年，J. Sylvester 在文献［70］中构造了这种简单易懂的单变元多项式系统的结式。1908 年，Dixon[71]将 Bezout-Cayley 结式推广到 3 变元多项式系统。这种结式很容易推广到 $k+1$ 个方程 k 变元的多项式系统[72]。为了构造 Dixon 结式的快速方法，文献［73］将单变元多项式系统的 Sylvester 结式推广到 n 变元多项式系统，且提出了一种快速构造 Dixon 结式矩阵的算法，同时在随后的文献［74］讨论了它的多余因子问题。然而对于某些变量个数大于 5 的多项式系统，文献［73］中的算法失效。因此符红光等人在文献［75］中提出了一种递归的构造 Dixon 结式矩阵的算法。还有一种混合结式，最早出现在 Dixon 的论文［71］中，这种结式部分类似于 Sylvester 结式矩阵，部分类似于 Dixon 结式矩阵。后来 M. Zhang 等人[76]构造了另外几种双变元系统的混合结式，并且讨论这几种结式矩阵之间的相互转换关系。孙维昆[77,78]将其推广到了 n 变元多项式系统。周加农和张景中在文献［79，80］中提出了一种被称为组合结式的方法。袁勋[81]采用此方法提出了一种 Dixon 结式矩阵的快速构造方法。本书的第六章提出了一种新的构造多变元系统混合结式的方法[82]，并且讨论了这三种结式之间的关系。

代数簇的分解一直以来都是经典代数几何中的一个基本问题，且在现代几何中有诸多应用。代数簇的分解主要有两种形式，不可约分解和非混合分解

(等维分解)。目前处理代数簇的分解主要有两种处理方法：其一是由奥地利代数几何专家 B. Buchberger 提出的 Groebner 基方法，其二是以中国数学家吴文俊先生的吴特征列方法为代表的解多项式方程组零点的各种三角分解算法。

Groebner 基序列实质上就是一种代数簇的分解方法。其实现的思想来源于可约多项式的因式分解，通过将某一多项式组$\mathbb{P}$生成理想的 Groebner 基$\mathbb{I}$中的某一多项式 G 分解成 $G = G_1G_2$ 的形式，置$\mathbb{P}_i = \mathbb{G} \cup \{G_i\}$，继续求得$\mathbb{P}_i$的 Groebner 基 G_i。很明显$\mathbb{G}$所生成的代数簇可以表示成 G_i 所生成代数簇的并，令每一个 G_i 为新的$\mathbb{G}$并且继续下去，$\mathbb{P}$ 所生成的代数簇可以表示成一些子代数簇的并，且子代数簇中的生成元在域 K 上均为不可约的。高小山等人研究了零维代数簇的分解并且讨论了其在理想的准素分解和几何定理的机器证明中的应用。

代数簇的非混合分解是将代数簇分解为一些非混合的子代数簇的并。王东明研究了代数簇的非混合分解。这种方法的基本原理是对多项式组进行三角分解，将多项式$\mathbb{P}$所定义的代数簇分解为一些拟子代数簇的并的形式，结合 Groebner 基算法计算分解以后的三角列的浸润（饱和理想）的代数簇。代数簇的不可约分解即将任一多项式组定义的代数簇分解为不可约子代数簇，这与$\mathbb{P}$的非混合分解类似，与非混合唯一不一样的地方在于生成的特征序列是不可约的。

1.3 本书的主要贡献与创新

本书的部分内容来自笔者前期的研究工作[82-85]。

本书的研究内容主要围绕着多项式系统的计算问题和代数系统的化简问题，对下面几个方面的问题做了深入思考：

(1) 当方程组有重根时，牛顿迭代算法的收敛性降低，最终结果的误差会很大，使得最终结果不可信。如何提高这些解的精度，使得最终结果在一定程度上是可信的？

(2) 给定一个零维半代数系统，且已知半代数系统中等式系统的根都是单重根，如何将等式系统的实根区间中不满足限制条件的实根区间去掉，从而得到半代数系统的实根区间？

(3) 假设给定的正维数多项式系统的不可约分支的维数都不相等，如何在每一个不可约分支上至少得到一个实数点？

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com