普通高等教育"十三五"规划教材

高等数学（经、管类）

学习指导

郭　军　房少梅　总主编

方　平　叶运华　主　编

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学（经、管类）学习指导

郭　军　房少梅　总主编
方　平　叶运华　主　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书作为《高等数学（经、管类）》教材配套的学习指导书，每章均由知识结构图与学习要求、内容提要、典型例题解析、自我测试题等部分组成，书后附有一些常用的基本公式及自我测试题的参考答案。

本书取材丰富，理论严谨，重点突出，结构合理，既有系统性，适合全面阅读，又具有可分性，便于选读，灵活实用，深入浅出。本书典型例题突出一题多解、分析归纳、错解分析；自我测试题分为A级和B级，A级自我测试题主要考查学生的基本知识和基本技能，是本科生必须掌握的内容，B级自我测试题主要考查学生的综合分析能力及应用能力，适合学有余力及考研的学生。

本书适合各类高等院校经济管理专业本科生使用，也可供高校教师教学参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（经、管类）学习指导 / 方平，叶运华主编. —北京：科学出版社，2018.7

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-057566-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①方… ②叶… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第112477号

责任编辑：郭勇斌 邓新平 / 责任校对：王 瑞
责任印制：师艳茹 / 封面设计：蔡美宇

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http：//www.sciencep.com

石家庄继文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018年7月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2018年7月第一次印刷 印张：18
字数：350 000

定价：45.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《高等数学（经、管类）学习指导》编委会

主　　编　方　平　叶运华

副 主 编　刘　丹　王雪琴　赵　峰

编　　者（以姓氏笔画排名）

朱艳科　邱　华　周裕中　赵立新

姜惠敏　袁利国　贾学琴　夏宝飞

徐小红

目　录

第 1 章　函数与极限

1.1　知识结构图与学习要求

1.1.1　知识结构图

- 函数与极限
  - 函数
    - 函数的概念
    - 函数的几种特性：奇偶性、单调性、周期性、有界性
    - 反函数
    - 复合函数
    - 初等函数
  - 极限
    - 极限的概念
    - 极限的性质：唯一性、局部有界性、局部保号性
    - 极限存在准则
      - 夹逼准则
      - 单调有界准则
    - 两个重要极限
    - 极限运算法则
      - 四则运算法则
      - 复合函数的极限运算法则
    - 无穷小与无穷大
  - 连续
    - 连续与间断的概念
    - 间断点的分类
    - 连续函数的运算性质
      - 和、差、积、商的连续性
      - 反函数的连续性
      - 复合函数的连续性
      - 初等函数的连续性
    - 闭区间上连续函数的性质
      - 有界性定理与最值定理
      - 零点定理与介值定理

1.1.2　学习要求

（1）理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立简单应用问题中的函数关系式.

（2）了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

（3）理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

（4）掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

（5）了解数列极限和函数极限（包括左极限和右极限）的概念.

（6）理解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的比较方法，了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.

（7）了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限四则运算法则，会应用两个重要极限.

（8）理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.

（9）了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性定理、最大值最小值定理、介值定理、零点定理）及其简单应用.

1.2 内 容 提 要

1.2.1 函数

1. 函数概念

函数是微积分学研究的对象，它具有两个要素（定义域与对应法则），函数与自变量及因变量选用的字母无关. 另外，两个函数相等指其对应两要素相同.

2. 函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性

（1）奇函数与偶函数的定义域均关于坐标原点对称，并且奇函数对应的图形关于坐标原点对称，偶函数对应的图形关于 y 轴对称.

（2）函数的单调性是在其相关定义区间上讨论，研究函数的单调性既可以用单调性定义的方法，也可以采用将在第 3 章介绍的方法.

（3）周期函数的定义域是无界集，其周期通常指最小正周期，但并非每个周期函数都有最小正周期.

（4）函数的有界性依赖于所讨论的区间. 函数在区间 I 上有界的充要条件是其既有上界又有下界.

3. 复合函数

多个函数能否复合成一个函数要满足一定条件，得到的复合函数的定义域可能减小. 另外，复杂的函数则可分解为形式较简单的函数. 复合函数是微积分学研究的主要对象之一，读者应熟练掌握函数的复合与分解的方法.

4. 分段函数

在定义域内的若干部分定义域上分别给出不同表达式的一个函数称为分段函数. 以下为常见分段函数.

（1）分段表示的函数. 如

$$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad \operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}\text{(符号函数)等.}$$

（2）含有绝对值符号的函数, 也是分段函数. 如

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

（3）含参变量的极限式表示的函数. 如

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x},\quad |x|>0$$

等, 此类函数应当通过求极限把函数写成分段表示式: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<|x|<1,\\ 0, & x=-1,\\ 2, & x=1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

（4）其他形式的分段函数, 如

$$f(x)=\sqrt{1-\sin 4x},\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};$$

$$g(x)=\min\{2,x^2\},\quad -3\leqslant x\leqslant 2;$$

$$h(x)=\frac{[x]}{x},\quad x>0$$

等. 这些函数实际上也是分段函数, 均可改写成分段表示式:

$$f(x)=\sqrt{(\sin 2x-\cos 2x)^2}=\begin{cases}\cos 2x-\sin 2x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{8},\\ \sin 2x-\cos 2x, & \dfrac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}2, & x\in[-3,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},2],\\ x^2, & x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}];\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}0, & 0<x<1,\\ \dfrac{n}{x}, & n\leqslant x<n+1, n\in\mathbf{N}.\end{cases}$$

后面将对分段函数的极限、连续性、导数与微分等问题分别进行讨论.

5. 反函数

在同一坐标系下，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称；另外，$y=f(x)$ 的定义域为 $y=f^{-1}(x)$ 的值域；$y=f(x)$ 的值域为 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域. 利用两者的这一关系，有时可用来求函数的定义域与值域.

6. 隐函数

通过方程式 $F(x,y)=0$ 给出的两个变量 x 和 y 之间的函数关系称为隐函数.

从 $F(x,y)=0$ 中解出 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$ 这一过程称为隐函数的显化. 并非所有的隐函数都可以显化，比如，$xy=\mathrm{e}^{x+y}$ 就不能显化.

7. 基本初等函数和初等函数

（1）基本初等函数共有五类：

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数. 读者应熟练掌握基本初等函数的定义域、值域及它们的图形与性质.

（2）初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数.

1.2.2　极限

1. 极限的定义

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $|x_n-A|<\varepsilon$.

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

（3）$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

（4）$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

（6）$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

（7）$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. 数列与函数极限的性质

（1）唯一性；　　（2）有界性（或局部有界性）；

（3）保号性（或局部保号性）；（4）数列极限与函数极限的关系.

3. 函数极限存在的充要条件

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

4. 两个极限存在准则与两个重要极限

（1）夹逼准则：在自变量 x 的同一变化过程中，若 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且

$$\lim g(x)=\lim h(x)=A,$$

则 $\lim f(x)=A$.

使用该准则时，将函数（或数列）放大与缩小成一个新的函数（或数列），而新的函数（或数列）与原来的函数（或数列）只相差一个无穷小量.

（2）单调有界准则：单调有界数列必有极限.

使用该准则时，通常是用如下两个结论之一：

1）单调递增且有上界则极限存在；

2）单调递减且有下界则极限存在.

有界性的证明通常采用数学归纳法，而证明单调性则用作差或作商的方法.一般地，利用该准则时，先证明有界性，后证明单调性.

（3）两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e} \text{ 或 } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

另外，有以下常用推广形式：设自变量 x 在同一变化趋势下，如果 $\lim f(x)=0$，且 $f(x)\neq 0$，则有

$$\lim\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1 \text{ 与 } \lim[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}.$$

5. 极限四则运算法则

在自变量 x 的同一变化过程中，如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

（3）$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$，其中 $B\neq 0$.

6. 复合函数的极限运算法则

设 $y=f[g(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某空心邻域内有定义. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$ 且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

该命题表明：如果 $f(u)$ 和 $g(x)$ 满足相应的条件，那么作代换 $u=g(x)$ 可把求 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]$ 化为求 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$，这里 $u_0=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

7. 幂指函数的极限

在自变量 x 的同一变化过程中，对于极限 $\lim u(x)^{v(x)}$，其中 $u(x)>0$ 且 $u(x)$ 不恒等于 1，有以下情形：

（1）当 $\lim u(x)=a$，$\lim v(x)=b$，且 a，b 有限时，则有 $\lim u(x)^{v(x)}=a^b$.

（2）当 $\lim u(x)=1$，$\lim v(x)=\infty$（或 $-\infty$，或 $+\infty$）时，则有

$$\lim u(x)^{v(x)}=\lim\{1+[u(x)-1]\}^{\frac{1}{u(x)-1}\cdot v(x)\cdot[u(x)-1]}=\exp\{\lim v(x)\cdot[u(x)-1]\},$$

或利用恒等式 $\exp\ln x=x$，则有

$$\lim u(x)^{v(x)}=\lim\exp\ln u(x)^{v(x)}=\exp[\lim v(x)\cdot\ln u(x)].$$

8. 无穷小与无穷大

（1）在自变量的某一变化过程中，如果 $\lim f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为无穷小；如果 $\lim f(x)=\infty$，则称 $f(x)$ 为无穷大.

（2）无穷小与无穷大的讨论必须指出自变量的变化过程. 理解无穷小与很小的数及无穷大与很大的数之间的差别. 无穷小、无穷大不是数. 零是唯一可以作为无穷小的常数.

（3）无穷小与无穷大的关系：在自变量 x 的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

（4）无穷大与无界的关系：无穷大一定无界；反之，则不一定.

（5）无穷小与函数极限的关系：设在自变量 x 的同一变化过程中，

$$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha,$$

其中 $\lim\alpha=0$.

（6）无穷小的比较：设在自变量的同一变化过程中，α 和 β 均为无穷小，则

1）若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，称 α 是比 β 高阶的无穷小，记为 $\alpha=o(\beta)$，显然 $\lim\dfrac{o(\beta)}{\beta}=0$.

2）若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，称 α 是比 β 低阶的无穷小，从而 β 比 α 高阶.

3）若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c$ 且 $c\neq 0$，则称 α 与 β 是同阶无穷小.

4）若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta^k}=c$ 且 $c\neq 0$，$k>0$，则称 α 是 β 的 k 阶无穷小.

5）若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，称 α 与 β 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

根据如上定义，显然有如下结论成立：

1）若 $\alpha\sim\beta$ 且 $\beta\sim\gamma$，则有 $\alpha\sim\gamma$.

2）$\alpha\sim\beta \Leftrightarrow \beta=\alpha+o(\alpha)$

3）当 $x\to 0$ 时，

$$k\cdot o(x)=o(x),\quad o(x)+ko(x)=o(x),\quad \alpha\cdot o(x)=o(x),$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$，$k$ 为常数.

（7）无穷小的运算：在同一极限过程下，有如下常用结论：

1）有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

2）有限个无穷小的乘积仍为无穷小.

3）有界量与无穷小的乘积仍为无穷小.

（8）利用等价无穷小的代换求极限.

1）替换定理：在自变量 x 的某一变化过程中，α，α_1，β，β_1 均为无穷小，且 $\alpha\sim\alpha_1$，$\beta\sim\beta_1$，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

2）当 $x\to 0$ 时，常用等价无穷小：

$$x\sim\sin x,\quad x\sim\tan x,\quad x\sim\arcsin x,$$

$$x\sim\arctan x,\quad x\sim \mathrm{e}^x-1,\quad x\sim\ln(1+x),$$

$$a^x-1\sim x\ln a,\quad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}.$$

注　上述等价关系中的 x 可换成任一无穷小量.

1.2.3 连续

1. 函数的连续性

（1）函数 $y=f(x)$ 在某点 x_0 处连续有如下几种形式的等价定义：

定义 1.1 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义 1.2 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

注 1 上述函数 $y=f(x)$ 在某点 x_0 处连续的定义可用“$\varepsilon-\delta$”语言来表述：$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

注 2 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续必须具备三个条件：

1）函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内要有定义；

2）极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

3）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

注 3 当 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续时，不能认为 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内都连续. 例如，函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbf{Q},\\ x^2, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\end{cases}$ 仅在点 $x=0$ 处连续，而在其他点尽管有定义，但不连续.

（2）函数 $y=f(x)$ 在某点 x_0 处的单侧连续，有如下几种形式：

1）若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续；

2）若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

单侧连续与函数连续有如下关系：

$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 处既要左连续又要右连续. 即

$$f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0).$$

（3）函数 $y=f(x)$ 在区间上的连续性：

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，则称函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续；如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内连

续，并且在点 $x=a$ 处右连续，在点 $x=b$ 处左连续，则称函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

2. 函数的间断点

（1）间断点的定义：若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，即 $y=f(x)$ 在点 x_0 无定义或者无极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 或者 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，则称 x_0 为 $y=f(x)$ 的间断点.

（2）间断点的分类：

间断点
- 第一类间断点（在 x_0 处的左、右极限均存在）
  - 可去间断点（左极限=右极限）
  - 跳跃间断点（左极限≠右极限）
- 第二类间断点：在 x_0 处的左右极限至少有一个不存在（常见的有振荡间断点和无穷间断点）

3. 连续函数的运算

（1）设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（当 $g(x_0)\neq 0$ 时）均在点 x_0 处连续.

（2）设函数 $f(u)$ 在点 u_0 处连续，函数 $u=g(x)$ 在点 x_0 处连续且 $u_0=g(x_0)$，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x_0 处连续.

（3）基本初等函数在其定义域内均连续；初等函数在其定义区间（即定义域内的区间）内是连续的.

4. 闭区间上连续函数的性质

定理 1.1（最大与最小值定理）　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定能取得最大值与最小值.

推论 1.1（有界性定理）　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有界.

定理 1.2（介值定理）　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，并且 $f(a)=A$，