



# 身边的数学辅导员

——用 GeoGebra 解决函数与方程问题

沈翔 著

高等教育出版社

# 身边的数学辅导员

——用 GeoGebra 解决函数与方程问题

Shenbian de Shuxue Fudaoyuan

沈翔著

高等教育出版社·北京

## 内容提要

本书是一本用数学软件 GeoGebra 帮您学习函数与方程知识的学习用书。它为函数与方程的初学者准备了许多浅显而基础性的函数与方程内容,登录 Abook 网站,下载相关 ggb 文件,结合书中文字介绍,您可一步一步地进入到函数与方程的万花园中,逐步领略千姿百态的函数与方程结论,欣赏到叹为观止的数学神奇,领略数学的博大精深。它将成为您身边的数学辅导员。本书内容包括:整式、分式与根式,整式方程与不等式,分式、根式方程与不等式,方程组与不等式组,多项式函数,指数函数与对数函数,三角函数,其他函数举例,函数的性质与运算及综合题举例。

本书供初高中学生学习,也可供一切数学学习者与数学爱好者使用。

## 图书在版编目(CIP)数据

身边的数学辅导员:用 GeoGebra 解决函数与方程问题 / 沈翔著. -- 北京:高等教育出版社, 2017.10

ISBN 978-7-04-048521-9

I. ①身… II. ①沈… III. ①数学教学-计算机辅助教学-应用软件 IV. ①O1-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 219067 号

策划编辑 邵 勇      责任编辑 邵 勇      封面设计 张 志      版式设计 杜微言  
插图绘制 杜晓丹      责任校对 窦丽娜      责任印制 韩 刚

---

出版发行	高等教育出版社	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
邮政编码	100120	网上订购	<a href="http://www.hepmall.com.cn">http://www.hepmall.com.cn</a>
印 刷	保定市中画美凯印刷有限公司		<a href="http://www.hepmall.com">http://www.hepmall.com</a>
开 本	787 mm×1092 mm 1/16		<a href="http://www.hepmall.cn">http://www.hepmall.cn</a>
印 张	23.25		
字 数	580 千字	版 次	2017年10月第1版
购书热线	010-58581118	印 次	2017年10月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	72.00 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 48521-00

# 目 录

引言 身边的数学辅导员——用 GeoGebra 解决函数与方程问题	1
第 1 章 整式、分式与根式	2
1.1 整式的加、减法与乘法	2
1.2 因式分解	5
1.3 分式	12
1.4 整式相除	16
1.5 整式开方	16
1.6 多项式的最大公因式和最小公倍式	17
1.7 展开和化简表达式	18
1.8 求代数式的值与字母代入	20
1.9 恒等式的验证与判断	22
1.10 根式的化简	24
第 2 章 整式方程与不等式	27
2.1 一元整式方程	27
2.2 一元绝对值方程	30
2.3 一元高次整式方程	31
2.4 复数范围内一元整式方程	32
2.5 整式不等式	34
2.6 不等式与区间	38
2.7 不等式的证明与领悟	39
2.8 函数观点下解整式方程与不等式	43
第 3 章 分式、根式方程与不等式	46
3.1 分式方程	46
3.2 根式方程	48
3.3 含字母的分式、根式方程	51

## II 目录

3.4	复数范围内解分式方程和根式方程	53
3.5	分式与根式混合方程	55
3.6	分式与根式不等式	56
3.7	函数观点下解分式、根式方程与不等式	61
<b>第4章</b>	<b>方程组与不等式组</b>	<b>63</b>
4.1	一次方程组	63
4.2	一次不等式组	68
4.3	二次方程组	73
4.4	二次不等式组	75
4.5	高次方程组和不等式组	78
4.6	分式与根式方程组	80
4.7	分式与根式不等式组	83
<b>第5章</b>	<b>多项式函数</b>	<b>88</b>
5.1	一次函数	88
5.2	二次函数	92
5.3	高次函数	100
<b>第6章</b>	<b>指数函数与对数函数</b>	<b>105</b>
6.1	指数式的运算	105
6.2	指数函数的图像	106
6.3	指数方程和不等式	110
6.4	指数函数性质	114
6.5	对数式的运算	116
6.6	对数函数的图像	118
6.7	对数方程和不等式	121
6.8	对数函数性质	124
6.9	指数与对数综合	129
<b>第7章</b>	<b>三角函数</b>	<b>132</b>
7.1	三角概念	132
7.2	三角求值	138
7.3	三角化简	142

7.4	三角恒等式	144
7.5	三角函数图像	148
7.6	三角函数性质	158
7.7	三角方程	161
7.8	三角不等式	165
7.9	反三角运算	168
7.10	反三角函数	171
7.11	三角形中的恒等式	174
7.12	解三角形	175
7.13	和差化积与积化和差	180
第 8 章	其他函数举例	182
8.1	分式函数	182
8.2	根式函数	187
8.3	参数曲线	191
8.4	分段函数	199
8.5	取整函数	208
8.6	$\max(\min)$ 函数	216
8.7	极坐标系中的曲线	220
8.8	曲线系与包络线	229
第 9 章	函数的性质与运算	242
9.1	函数的定义域	242
9.2	函数的最大(小)值、极值、值域	245
9.3	函数的奇偶性	252
9.4	函数的切线	262
9.5	函数的单调性	265
9.6	函数的凹凸性	270
9.7	函数的周期性	273
9.8	函数的交点与零点	278
9.9	函数的反函数	282
9.10	函数关于某直线的轴对称图形	285
9.11	函数关于某点的中心对称图形	287
9.12	函数的平移	291

9.13	函数的伸缩与位似	293
9.14	函数的旋转	297
9.15	函数的渐近线	299
9.16	复合函数与迭代函数	301
9.17	函数的极限	303
9.18	求函数的导数	307
9.19	函数的积分与面积	312
9.20	函数关系的建立	320
9.21	函数上两点曲线长度与点到函数的距离	330
9.22	缓慢绘制函数图像	332
第 10 章	综合题举例	336
后记		365

## 引言 身边的数学辅导员——用 GeoGebra 解决函数与方程问题

数学学习者在初中阶段大概就学过解一元一次方程和一元二次方程,掌握解题流程和公式后,可以较顺利地解方程,自然而然地想去解一元三次方程,可并非易事,实际上人类在探索解一元三次方程的征途中也有不少趣闻逸事,这里不述,只简要介绍解实系数一元三次方程的流程和公式.

一元三次方程可写成  $ax^3+bx^2+cx+d=0(a \neq 0)$  的形式,除以  $a$ , 并设  $y=x+\frac{b}{3a}$ , 可化为  $y^3+py+q=0$  形式,其中  $p=\frac{3ac-b^2}{3a^2}$ ,  $q=\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{27a^3}$ , 原一元三次方程的解为

$$\begin{aligned}x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \\x_2 &= \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \\x_3 &= \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},\end{aligned}$$

其中  $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ .

是不是有点复杂烦琐? 当今时代,许多烦琐之事已交给机器去做了,有没有可能将这样的数学问题解决交给软件来完成? GeoGebra 就是可以担当此重任的一款优秀免费软件,功能强大.关于它的基本操作请参见《GeoGebra 基本操作指南》一书.

本书侧重于展示众多类型的函数与方程方面问题的 GeoGebra 解决途径,并在可能的情况下,提出用不同视角、不同方法来解决问题,形成数学知识之间的关联和软件操作之间的联系,提供自检练习题做模仿性操作.从 Abook 资源网站下载并打开 ggb 文件,点击“视图”→“作图过程”可以看到这些文件是如何创建的,这样您就会有能力自创 ggb 文件解决更多的函数与方程问题.



# 第 1 章 整式、分式与根式

## 1.1 整式的加、减法与乘法

例 1: 运算:  $(2a+b)-(3a-b)+(4c-3b)$ ;

运算:  $(2a+b+1) \times (3a-b-c)$ .

操作如图 1-1 所示:

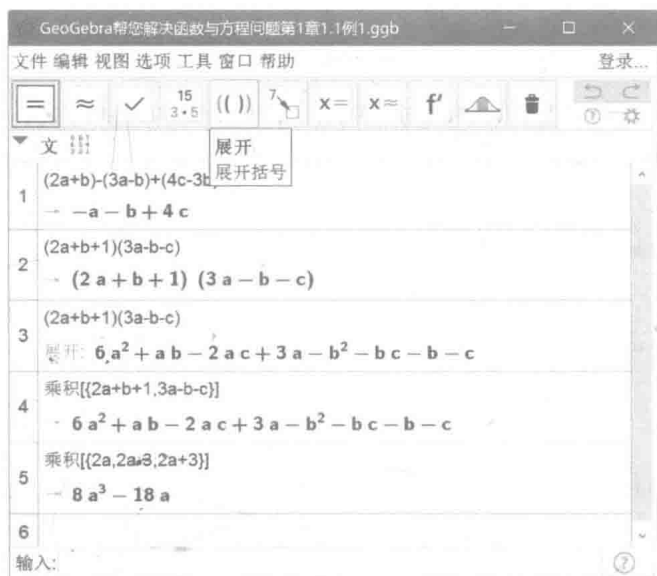


图 1-1

说明:

1. 图 1-1 中第 1 行直接输入整式,按下“Enter”键后即得到运算结果.
2. 图 1-1 中第 2 行、第 3 行两个整式间的乘号可以加也可以不加,输入两整式相乘后,按下“Enter”键后不能得到运算结果,需要点击“展开”工具图标后,得到整式相乘展开后的结果.
3. 为了节省篇幅,本例中的答案只在图 1-1 中呈现,以下各例题也是如此,若无特殊需要,一般不再另外表述.

注:您打开“GeoGebra 帮您解决函数与方程问题第 1 章 1.1 例 1”ggb 文件,看到的就是图 1-1 的界面,以下各例和练习题同样如此,但可能少数界面中的非实质性信息略有不同,不影响对内容的理解.

自检练习题: 运算:  $(2a+b)+(3a-b)-(4c-3b)$ ; 运算:  $(2a-b-1) \times (3a+b+c)$ .

答案:  $5a+3b-4c$ ;  $6a^2-ab+2ac-3a-b^2-bc-b-c$ .

例 2: 已知  $A = 2x^2 - 3xy + 2y^2$ ,  $B = 2x^2 + xy - 3y^2$ ,  $C = x^2 - xy + y^2$ , 求  $A - [B - (3C - A)]$ ,  $AB - 3CA + 2BC$ .

操作如图 1-2 所示:

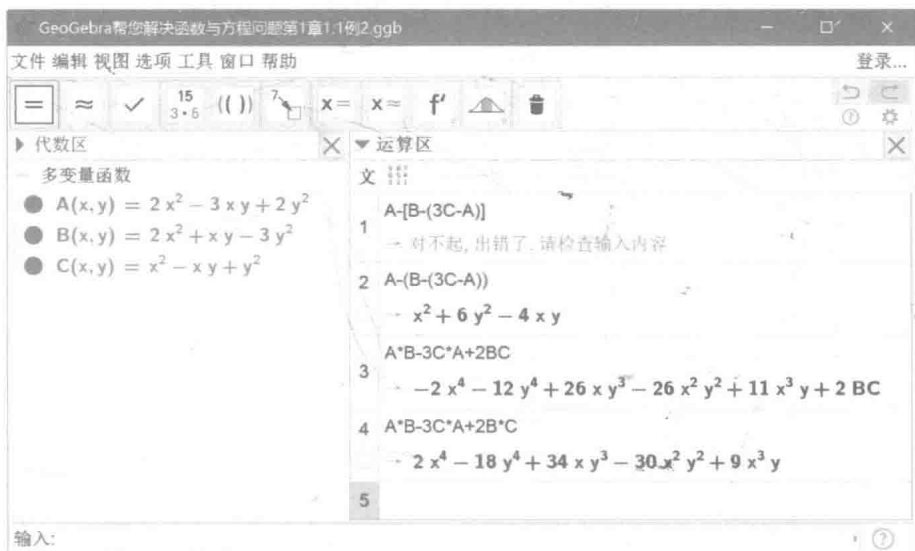


图 1-2

说明:

1. 图 1-2 中的输入框中分别输入“ $A = 2x^2 - 3xy + 2y^2$ ”、“ $B = 2x^2 + xy - 3y^2$ ”和“ $C = x^2 - xy + y^2$ ”, 得到代数区“多变量函数”下的三个函数, 这里可以通过函数的运算得到整式的运算.

2. 图 1-2 中第 1 行因为输入了中括号“[”和“]”, 软件不识别, 报错, 第 2 行都用小括号再表示括号就可以运算了.

3. 图 1-2 中第 3 行可以看出代数式  $B$  与  $C$  之间的乘号是不能省略的, 需要像第 4 行这样输入才可以得到正确的运算结果.

注: GeoGebra 默认将输入关于“ $x$ ”的表达式作为函数, 输入关于“ $x$ ”、“ $y$ ”的表达式作为多变量函数.

自检练习题: 已知  $A = x^2 + 3xy - 2y^2$ ,  $B = xy - 3y^2$ ,  $C = x^2 - xy$ , 求  $A - [2B - (C - 3A)]$ ,  $BC - 2B + AC$ .

答案:  $-x^2 + 10y^2 - 9xy$ ;  $-x^4 + 5xy^3 - 9x^2y^2 + 3x^3y + 6y^2 - 2xy$ .

例 3: 乘法公式

打开“GeoGebra 帮您解决函数与方程问题第 1 章 1.1 例 3”文件, 可以看到如图 1-3 所示界面.

说明:

1. 图 1-3 运算区中得到常用乘法公式的运算结果, 这里不一一列出.

2. 图 1-3 绘图区创建的是常用乘法公式的实验, 滑动条  $a$ 、 $b$  和  $c$  两端的数值是可以改动的, 拖动它们, 相应的动态数值也随之改动, 但有数值两两恒相等的结论.

自检练习题: 运算:  $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$ ;  $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$ .

答案:  $a^3 + b^3$ ;  $a^3 - b^3$ .

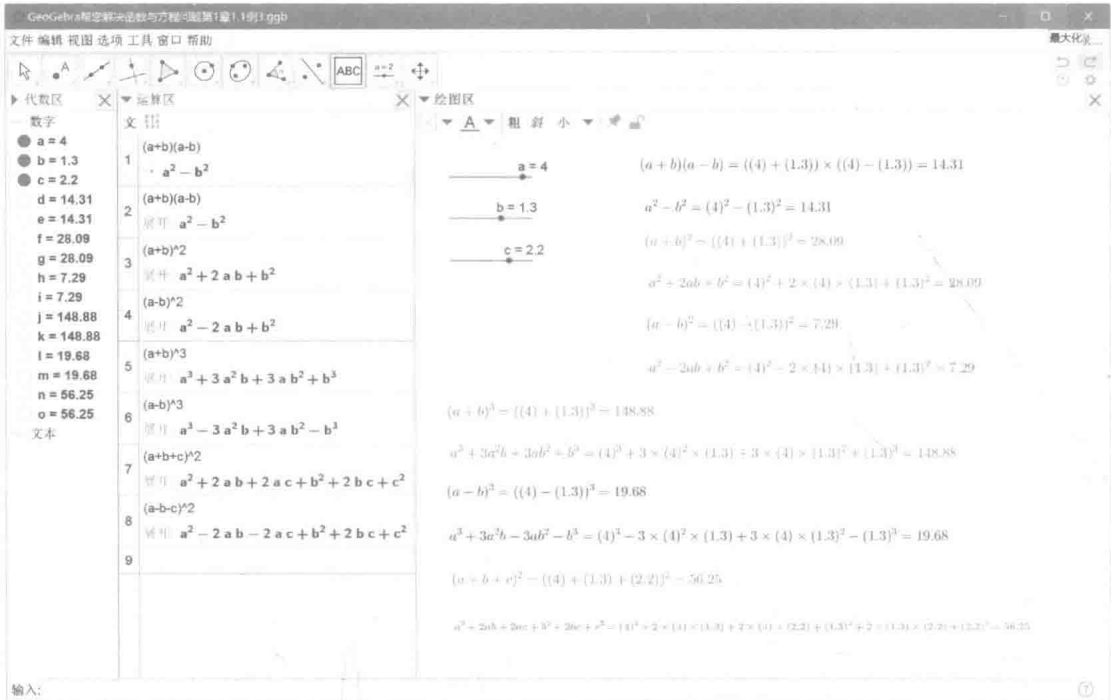


图 1-3

例 4:(1) 展开  $(1+x)^8$ , 并指出  $x^5$  的系数.

(2) 展开  $(5a^3 - 3a^2b + 7ab^2 - 2b^3)(3a^2 + 2ab - 3b^2)$ , 并分别写出按照字母  $a$ 、字母  $b$  降幂排列的系数集合.

操作如图 1-4 所示:

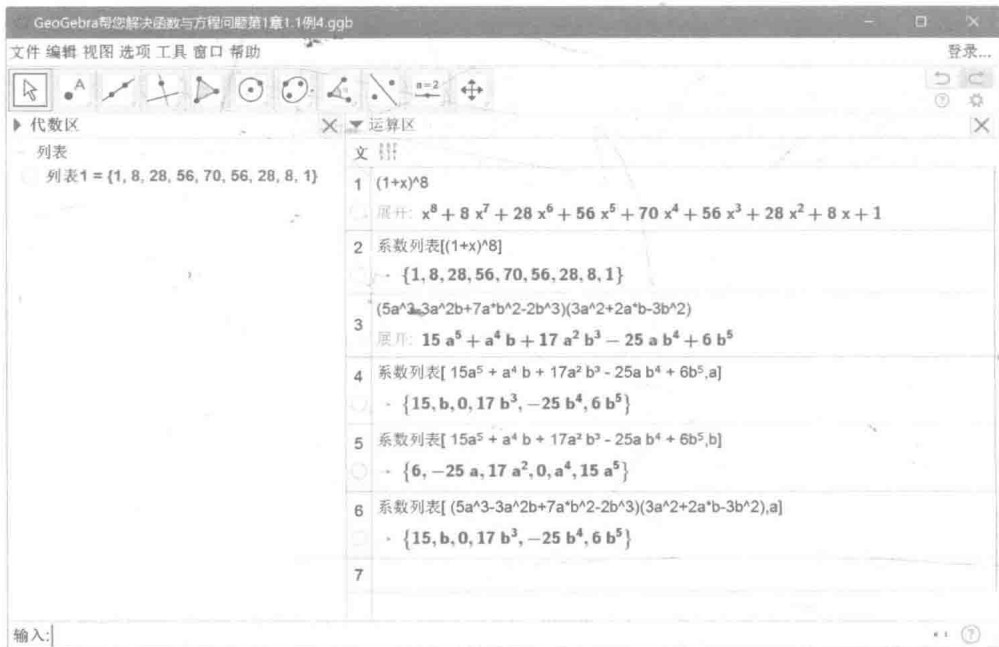


图 1-4

说明:

1. 图 1-4 运算区第 1 行是展开结果,与第 2 行对应可以看出相应系数的值, $x^5$  的系数为 56,指令“系数列表[(1+x)^8]”在输入框输入后,可以在代数区得到降幂排列的系数列表.

2. 对图 1-4 运算区第 3 行到第 6 行进行比较,可以看出:指定字母的系数是按降幂排列的,可以用复合指令来操作.注意系数列表中数字“0”的含意.

自检练习题:

1. 展开 $(1-x)^8$ ,并指出 $x^5$ 的系数.

2. 展开 $(-3a^2b+7ab^2-2b^3)(3a^2-b^2)$ ,并分别写出按字母 $a$ 、字母 $b$ 降幂排列的系数列表.

答案: -56.  $\{-9b, 21b^2, -3b^3, -7b^4, 2b^5\}$ ;  $\{2, -7a, -3a^2, 21a^3, -9a^4, 0\}$ .

## 1.2 因式分解

### 1.2.1 有理数范围内因式分解

例 1: 因式分解  $x^2+7x-18$ ; 因式分解  $8x^3-27y^3$ ; 关于字母  $x$  因式分解  $x^2+7ax-18a^2$ ; 关于字母  $a$  因式分解  $x^2+7ax-18a^2$ .

操作如图 1-5 所示:



图 1-5

说明:

1. 图 1-5 中第 1 行、第 2 行运用的操作指令为“因式分解[<多项式>]”,将指定多项式因式分解.

2. 图 1-5 第 3 行在输入多项式列表后,点击“分解”工具图标,将列表中的多项式分别因式分解.

3. 图 1-5 中第 4 行、第 5 行运用的操作指令为“因式分解[<表达式>,<变量>]”,得到这个

多项式指定变量的因式积.

自检练习题:因式分解  $x^2-3x-18$ ; 因式分解  $8x^3+27y^3$ ; 关于字母  $x$  因式分解  $x^2-3ax-18a^2$ .

答案:  $(x+3)(x-6)$ ;  $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$ ;  $(x+3a)(x-6a)$ .

例 2: 因式分解  $a^n+b^n$ , 其中  $n=2,3,4,5,6$ ; 因式分解  $a^n-b^n$ , 其中  $n=2,3,4,5$ .

操作如图 1-6 所示:



图 1-6

说明:

1. 图 1-6 中第 4 行对于“ $a^4+b^4$ ”点击“分解”图标后结果仍为“ $a^4+b^4$ ”, 说明不能因式分解, 更确切地说, 这表明这个整式在有理数范围内无法分解.

2. 从上面式子结构和整数  $n$  的取值, 您认为对于大于或等于 2 的整数  $n$ ,  $a^n-b^n$  能分解吗? 若能分解, 因式有什么样的特点?

3. 可以通过创建整数  $n$  的滑动条方式来对  $a^n-b^n$  进行因式分解, 您打开“GeoGebra 帮您解决函数与方程问题第 1 章 1.2.1 例 2-1”文件, 可以得到如图 1-7 所示界面.

图 1-7 中的代数区结论是通过输入框输入“因式分解[ $x^n-y^n$ ]”得到, 注意用字母  $a, b$  无法操作, 这一点您可以从代数区下方的“多变量函数”栏目名称加以体会, 这里滑动条中的值可以拖动或键盘操作, 也可以“启动动画”进行演示.

自检练习题: 因式分解  $x^9-y^9$ .

答案:  $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6)$ .

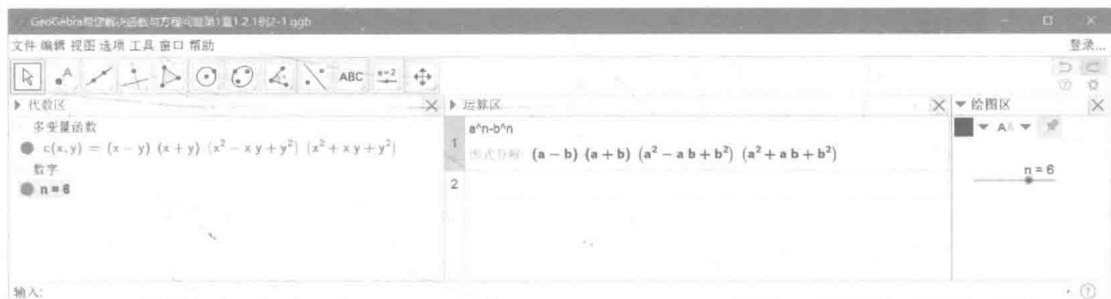


图 1-7

例 3: 分解以下各式:

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b);$$

$$a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3);$$

$$a^5(b-c)+b^5(c-a)+c^5(a-b);$$

$$a(b^5-c^5)+b(c^5-a^5)+c(a^5-b^5);$$

$$a^7(b-c)+b^7(c-a)+c^7(a-b);$$

$$a(b^7-c^7)+b(c^7-a^7)+c(a^7-b^7).$$

操作如图 1-8 所示:



图 1-8

说明:

1. 从本例各个轮换式的结构中,您自己尝试提出分解一组整式.
2. 您能仿照上例创建整数  $n$  的滑动条,进一步创建具有一般性的 ggb 文件吗?

自检练习题:分解以下各式: $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ ;  $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ .

答案: $(b-c)(a-c)(a-b)$ ;  $(-b+c)(a-c)(a-b)$ .

例4:分解以下各式:

$$m^2(p-q)-p+q;$$

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3;$$

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5;$$

$$(x+y+z)^7-x^7-y^7-z^7.$$

操作如图1-9所示:



图 1-9

说明:

1. 从图1-9中可以看出,对于多个字母的整式可以进行因式分解的操作。
2. 您能把本例拓展到一般情形吗? 能通过创建整数  $n$  的滑动条,进一步创建具有一般性的 ggb 文件吗?

自检练习题:分解以下各式: $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ ;  $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ .

答案: $(b-c)(a-c)(a-b)$ ;  $(-b+c)(a-c)(a-b)$ .

### 1.2.2 无理数范围内因式分解

例:在无理数范围内因式分解: $5x^2-2x-1$ ;  $x^2-2$ .

操作如图1-10所示。

说明:

1. 图1-10中第1行运用的操作指令为“无理数因式分解[<表达式>]”,将指定多项式在无理数范围内因式分解。

2. 图1-10第2行在输入“无理数因式分解[<表达式>]”指令后,看出对于两个字母的多项式在无理数范围内无法因式分解,虽然指令集中有指令“无理数因式分解[<表达式>, <变量>]”,但从

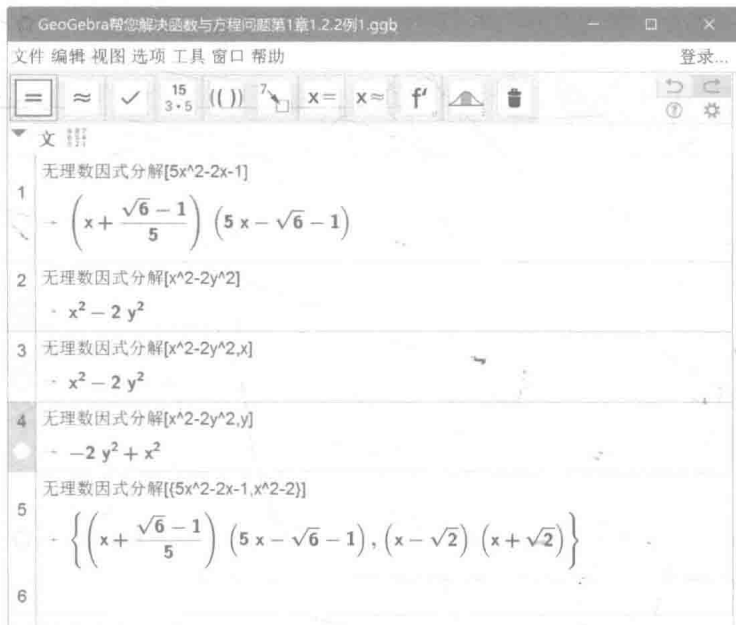


图 1-10

第 3 行、第 4 行看出还是无法进行分解。

3. 图 1-10 中第 5 行将“无理数因式分解[<表达式>]”的操作指令中“<表达式>”改为“<表达式列表>”，得到列表中多项式的在无理数范围内因式积。

自检练习题：在无理数范围内因式分解： $x^2-3x-5$ ； $2x^2-1$ 。

答案： $\left(x - \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)\left(x + \frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right)$ ； $(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)$ 。

### 1.2.3 复数范围内因式分解

例 1：在复数范围内因式分解  $x^2+4$ ；在复数范围内关于字母  $x$  因式分解  $x^2+4a^2$ ；在复数范围内关于字母  $a$  因式分解  $x^2+4a^2$ 。

操作如图 1-11 所示。

说明：

1. 图 1-11 中第 1 行运用的操作指令为“复数因式分解[<表达式>]”，将多项式在复数范围内因式分解。

2. 图 1-11 第 2 行、第 3 行运用的操作指令为“复数因式分解[<表达式>,<变量>]”，将多项式在复数范围内针对指定的变量进行因式分解。

3. 图 1-11 中第 4 行、第 5 行可以看出，指令“复数因式分解[<表达式>]”无法进行无理数的因式分解，同样指令“无理数因式分解[<表达式>]”无法进行复数范围内无理数的因式分解，也就是说 GeoGebra 暂时还无法解决这类问题。

例 2：在有理数范围内因式分解  $x^{2n}-1$ ；在实数范围内因式分解  $x^{2n}-3$ ；在复数范围内因式分解  $x^{2n}+1$ 。其中  $n=1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 。





图 1-11

操作如图 1-12 所示:

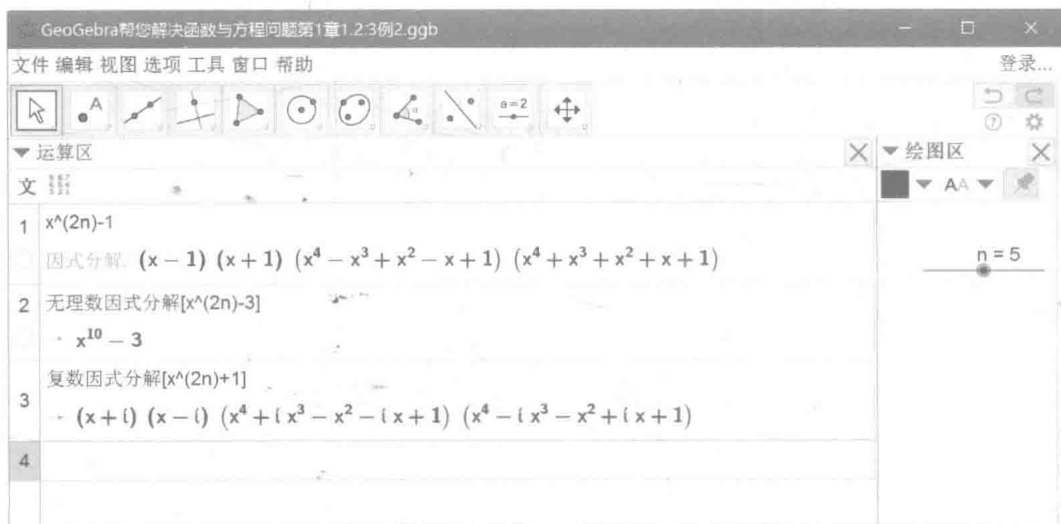


图 1-12

说明:

1. 图 1-12 绘图区中滑动条  $n$  的属性设置为从 1 到 9 的整数,可以用鼠标、键盘或启动动画的方式,使得整数  $n$  发生变化.

2. 从整数  $n$  变化过程中看出,图 1-12 第 1 行能得到分解结果,第 2 行除  $n=1$  能分解外,其余无法分解,第 3 行在复数范围内能因式分解.

自检练习题:在有理数范围内因式分解  $x^{3n}-1$ ;在复数范围内因式分解  $x^{3n}+1$ . 其中  $n=1,2,3,4,5,6,7,8,9$ .