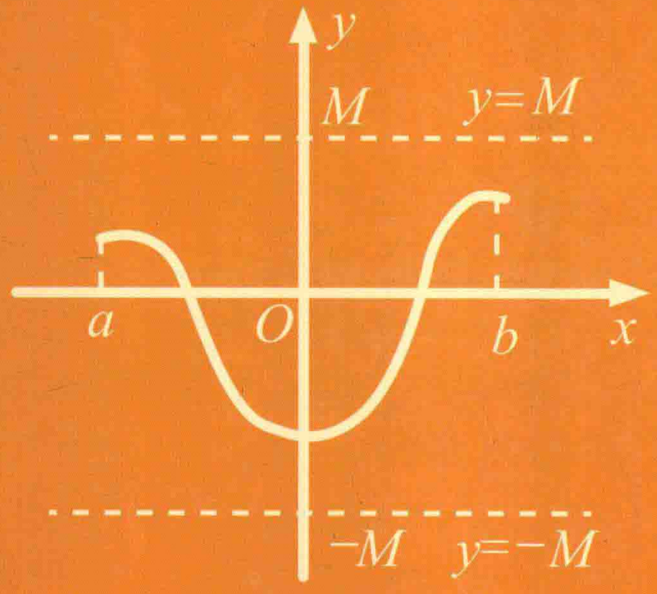
工科数学信息化教学丛书 丛书主编 李德宜 等

高等数学

（上）

李德宜 余东 余胜春 主编



科学出版社

工科数学信息化教学丛书
丛书主编　李德宜 等

高等数学(上)

李德宜　余　东　余胜春　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

《高等数学（上、下）》是根据编者多年的教学实践经验和研究成果，按照新形势下教材改革精神，结合最新《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写而成。

本书为上册，内容包含函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程，以及几种常见的曲线、积分表等内容。书中各节大多配有习题，每章末配有综合性习题，书末附有习题答案与提示。本书对极限概念介绍了直观和精确两种定义，方便不同层次的读者学习与理解。本书对概念、方法的描述力求循序渐进、简明易懂；重点突出，难点分散；精选例题和习题，具有代表性和启发性。

本书适合普通高等院校理工类各专业的学生作为教材使用，也可作为其他各类高校师生和相关科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上/李德宜，余东，余胜春主编. —北京：科学出版社，2018. 8

（工科数学信息化教学丛书）

ISBN 978-7-03-058038-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… ②余… ③余… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材

Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 132746 号

责任编辑：谭耀文 李亚佩/责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超/封面设计：彬 峰

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉中科兴业印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：787×1092 1/16

2018 年 8 月第 一 版 印张：19

2018 年 8 月第一次印刷 字数：449 000

定价：55.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

数学是研究现实中数量关系与空间形式的科学，是学习和研究现代科学技术必不可少的基本工具，在经济、科技、社会各个领域广泛应用。数学素养是大学生必须具备的核心素养之一，学好高等数学具有特别重要的意义。

当前，以互联网、大数据、人工智能为代表的新一代信息技术深刻影响人类社会的生产生活方式，对高等教育更好适应学生个性化、多样化、数学化、终身化、网络化需要提出新的更高要求，迫切需要高等数学教学进一步更新教育观念、深化教学改革、完善教学方式、优化教学内容。为了适应这一发展需要，我们编写了“工科数学信息化教学丛书”《高等数学(上、下)》。本套书对概念、方法的描述力求循序渐进、简明易懂。配套例题、习题丰富，且由易到难，具有层次性、代表性和启发性。

本套书分为上、下两册。上册含函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程，以及几种常见的曲线、积分表等内容。下册含空间解析几何与向量代数、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等内容。书中带“ * ”号的内容可视学生的能力及专业要求由教师决定是否授课。

《高等数学(上)》由李德宜、余东、余胜春任主编，赵喜林任副主编，参加讨论和编写的人员有徐树立、肖俊、曲峰林、刘云冰、张青，王玉宝参加了部分习题的整理。全书由主编、副主编统稿，最后由李德宜、余东定稿。

教材中难免有不妥之处，敬请读者提出宝贵意见或建议。

编　者

2018 年 5 月

目　录

第 1 章 函数与极限

高等数学的研究对象是函数，函数是用来描述变量与变量之间的相互关系的.极限是研究函数的主要工具；连续是函数的最基本性质.本章主要介绍函数、极限和连续的概念，极限的求法和连续函数的基本性质.

1.1 集合 映射 函数

1.1.1 集合

1. 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念.所谓**集合**（简称集）是指具有某种特定性质的事物的总体.组成这个集合的事物称为该集合的**元素**.如果 a 是集合 M 的元素记作 $a \in M$（读作 a 属于 M）；如果 a 不是集合 M 的元素，记作 $a \notin M$（读作 a 不属于 M）.

由有限个元素构成的集合称为有限集合；由无限个元素构成的集合称为无限集合.

通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素.

集合的表示方法通常有以下两种：一种是列举法，另一种是描述法.

列举法，由有限个元素组成的集合，可用列举它的全体元素的方法表示.例如，由元素 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，可记作

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}.$$

描述法，由无穷多个元素组成的集合，通常用如下记号表示：设 B 是具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合，记作

$$B=\{x \mid x\text{ 所具有的特征}\}.$$

例如，xOy 平面上以原点为中心，以 2 为半径的圆周上点的全体组成的集合记作

$$B=\{(x,y) \mid x、y\text{ 为实数},x^2+y^2=4\}.$$

以后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合.如果没有特别声明，以后提到的数都是实数.

习惯上，全体实数组成的集合记作 $\mathbf{R}$；全体有理数组成的集合记作 $\mathbf{Q}$；全体整数组成的集合记作 $\mathbf{Z}$；全体自然数组成的集合记作 $\mathbf{N}$.

2. 区间和邻域

区间是一类常用的数集，设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，集合 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，如图 1.1.1(a) 所示.即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

类似地，$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，如图 1.1.1(b) 所示；集合 $\{x \mid a<$

$x \leqslant b\}$ 称为左开右闭区间，记作 $(a,b]$；集合 $\{x \mid a \leqslant x < b\}$ 称为左闭右开区间，记作 $[a,b)$. $(a,b]$ 和 $[a,b)$ 统称为半开半闭区间.

此外，还有无限区间，引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似表示无限区间：

$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$，如图 1.1.1(c) 所示；

$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$，如图 1.1.1(d) 所示；

$(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\}$；$(a,+\infty) = \{x \mid x > a\}$.

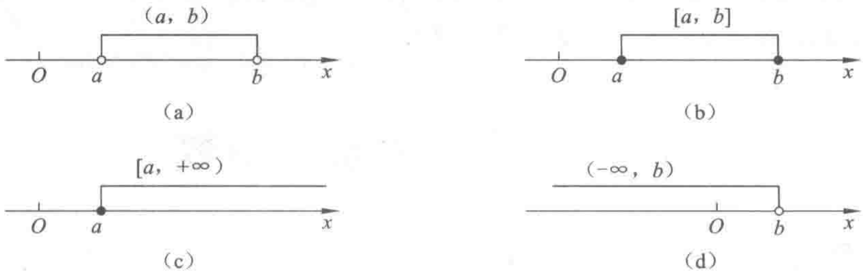


图 1.1.1

另外，全体实数的集合 **R** 记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间.

邻域是一个特殊的开区间，设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$，则称数集 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域. 它表示与点 a 的距离小于 δ 的点的集合，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}.$$

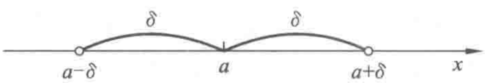


图 1.1.2

点 a 称为这个邻域的中心，δ 称为这个邻域的半径，如图 1.1.2 所示.

点 a 的 δ 邻域去掉中心点 a 后的集合称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

1.1.2 映射

1. 映射的概念

两个集合的元素之间有时候会存在某种联系，通过建立某种对应法则，可以把两个集合的元素对应.

例如，设 A 表示某班参加考试的学生的集合，B 表示该班这次考试成绩的集合. 每个学生和自己的考试成绩对应，这就建立了从集合 A 到集合 B 的一个对应法则. 一般地，若记 f 为两个集合的元素之间的一个对应法则，当 f 满足一定条件时就称为映射.

定义 1.1.1 设 X，Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**，记作

$$f: X \to Y.$$

其中：元素 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 $f(x)$，即 $y = f(x)$；而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f = X$.

X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f，或 $f(x)$，即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

上面提到的每个学生和自己的考试成绩对应，这个对应法则是映射，因为 A 中任意一个元素即参加考试的学生，存在唯一一个分数即 B 中的元素与之对应. A 是映射 f 的定义域，每个学生的成绩是学生的像，而学生是自己成绩的原像.

根据映射的定义可知：

(1) 构成一个映射必须具备以下三个要素，定义域、值域和对应法则.

(2) 对每个 $x \in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y \in R_f$，元素 y 的原像不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f \subseteq Y$，不一定 $R_f = Y$.

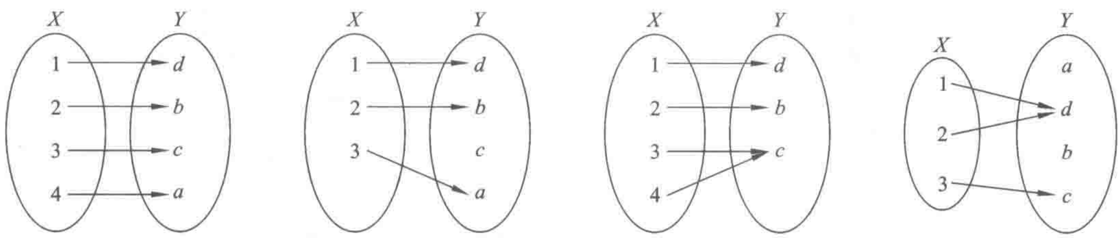
例 1.1.1 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，对每个 $x \in \mathbf{R}$，$f(x) = |x|$.

显然，f 是一个映射，$D_f = \mathbf{R}$；值域 $R_f = \{y \mid y \geqslant 0\}$，$R_f$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y，除 $y = 0$ 外，它的原像不是唯一的. 例如，$y = 1$ 的原像就有 $x = 1$ 和 $x = -1$ 两个.

2. 满射、单射和双射

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f = Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的映射或**满射**；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$，它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的**单射**；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为**一一映射（或双射）**.

图 1.1.3 清楚地表明单射、满射和双射之间的关系.



(a) 双射（单射与满射）　(b) 单射但非满射　(c) 满射但非单射　(d) 非满射非单射

图 1.1.3

1.1.3 函数

1. 函数的概念

定义 1.1.2 设数集 $D \subseteq \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y = f(x) \quad (x \in D).$$

式中：x 为**自变量**；y 为**因变量**；D 为**定义域**，记作 D_f，即 $D_f = D$.

从函数的定义可知，函数就是从实数集到实数集的映射，其值域总在 $\mathbf{R}$ 内. 对每个 $x \in D$，按照对应法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的函数值，记作 $f(x)$，即 $y = f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系，称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 R_f，或 $f(D)$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的. 例如,函数 $f(x)=x$ 与函数 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 定义域相同,但对应法则不同,值域也不同,从而这两个函数是不同的函数.

用数学式子表达函数的对应关系,这是表示函数的常用方法. 这种函数的表示方法称为解析法.

设函数 $y=f(x)$,定义域为 D. 直角坐标平面上的点集:

$$\{P(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x),x\in D$ 的图形. 函数图形能直观、简明地表达函数关系.

例 1.1.2 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 称为符号函数.

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=\{-1,0,1\}$,如图 1.1.4 所示.

例 1.1.3 设 x 为任意实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记作 $[x]$.

函数 $y=[x]$ 称为取整函数. 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=\mathbf{Z}$.

例如,$[-7.6]=-8$;$[-\sqrt{2}]=-2$;$[0]=0$;$\left[\dfrac{9}{4}\right]=2$;$[\pi]=3$;如图 1.1.5 所示.

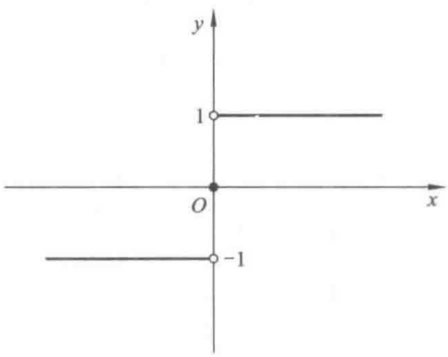


图 1.1.4

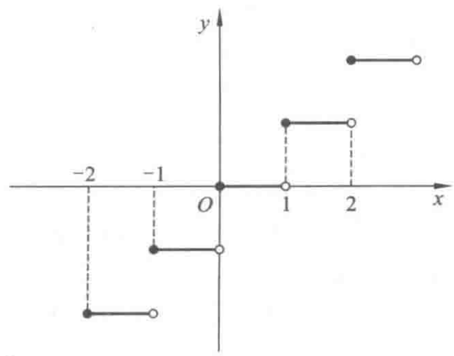


图 1.1.5

在实际应用中我们经常会遇到在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数,这种函数称为**分段函数**.

例 1.1.4 函数 $y=\begin{cases}1+x, & x<1,\\ 1+\dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

这是一个分段函数,其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=(-\infty,2]$.

当 $x<1$ 时,$y=x+1$;

当 $x\geqslant 1$ 时,$y=1+\dfrac{1}{x}$.

例如,

$$f(-3.5)=-2.5,\quad f(\sqrt{6})=1+\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

如图 1.1.6 所示.

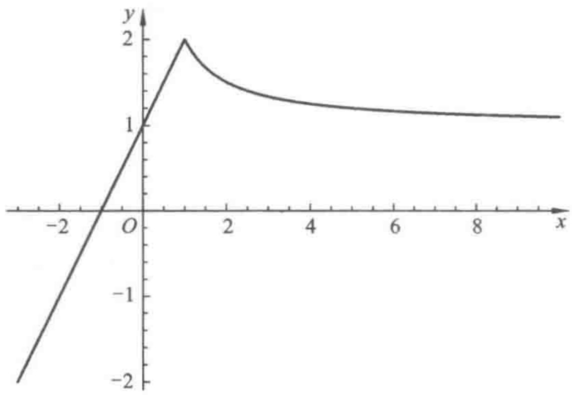


图 1.1.6

2. 函数的几种特性

1) 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X \subseteq D$. 如果存在数 K_1,使对任一 $x \in X$,有 $f(x) \leqslant K_1$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界,而称 K_1 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 其图形在直线 $y = K_1$ 的下方.

如果存在数 K_2,使任一 $x \in X$,有 $f(x) \geqslant K_2$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界,而称 K_2 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 其图形在直线 $y = K_2$ 的上方.

如果存在正数 M,使对任一 $x \in X$,有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界,其图形在直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 之间;如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界. 函数 $f(x)$ 无界,就是说对任何 M,总存在 $x_0 \in X$,使 $|f(x)| > M$.

例如,$f(x) = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上是有界的,$|\sin x| \leqslant 1$;函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在开区间$(0,1)$ 上无上界但有下界.

这是因为,对于任一 $M > 1$,总有 $x_0 : 0 < x_0 < \dfrac{1}{M} < 1$,使

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0} > M,$$

所以函数无上界.

函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在$(1,2)$ 内是有界的.

2) 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subseteq D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的,如图 1.1.7(a) 所示.

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的,如图 1.1.7(b) 所示.

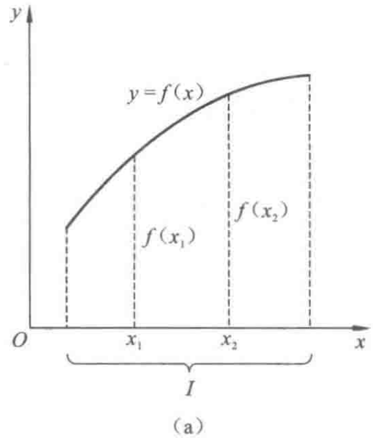


图 1.1.7

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如,函数 $y = x^2$ 在区间$(-\infty,0]$ 上是单调减少的,在区间$[0,+\infty)$ 上是单调增加的,在$(-\infty,+\infty)$ 上不是单调的.

3) 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$,则 $-x \in D$). 如果对于任一 $x \in D$,有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果对于任一 $x \in D$,有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

因为如果 $f(x)$ 是偶函数,则 $f(-x) = f(x)$,点 $A(x,f(x))$ 是图形上的点,则它关于 y 轴的对称点为 $A'(-x,f(x))$ 也在图形上,如图 1.1.8(a) 所示.

如果 $f(x)$ 是奇函数,则 $f(-x) = -f(x)$,点 $A(x,f(x))$ 是图形上的点,则它关于原点的对称点为 $A'(-x,-f(x))$ 也在图形上,如图 1.1.8(b) 所示.

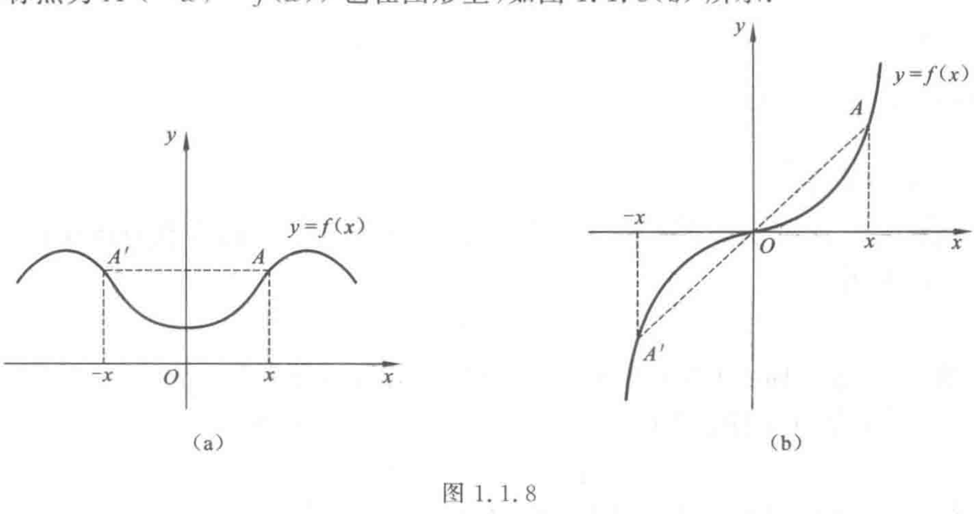


图 1.1.8

例如，$y=x^2$，$y=\cos x$ 都是偶函数；$y=x^3$，$y=\sin x$ 都是奇函数；$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

4）函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x\in D$ 有$(x\pm l)\in D$，且

$$f(x+l)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期.

如果 l 是 $f(x)$ 的周期，显然 l 的整数倍 kl 也是周期，因此函数的周期不唯一. 通常我们说的周期是指函数的最小正周期.

例如，$\sin x$、$\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期函数的图形特点是在函数的定义域内，每个长度为 l 的区间上，函数的图形有相同的形状，如图 1.1.9 所示.

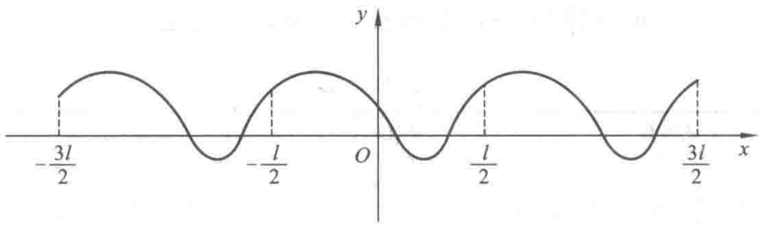


图 1.1.9

3. 反函数与复合函数

1）反函数

设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射，则对每个 $y\in f(D)$，有唯一的 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，按照这个对应法则，建立一个从 $f(D)$ 到 D 的映射，记作 f^{-1}.

$$f^{-1}:f(D)\to D,$$

称映射 f^{-1} 为函数 f 的**反函数**.

按此定义，有 $f^{-1}(y)=x$. 这就是说，反函数 f^{-1} 的对应法则是完全由函数 f 的对应法则所确定的.

一般地，$y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$. 例如，$y=x^3$ 的反函数记为 $y=x^{\frac{1}{3}}$.

注意 函数必须是单射才有反函数. 例如，$y=x^2$ 在整个定义域$(-\infty,+\infty)$上不是单射，因为给定一个 y，其原像有 $\pm\sqrt{y}$，不唯一，因此没有反函数. 但是，取定义域的子集 $D_1:(-\infty,0)$ 或 $D_2:(0,+\infty)$，函数 $y=x^2$ 是单射，在 D_1、D_2 上函数 $y=x^2$ 有反函数，分别是 $y=-\sqrt{x}$ 和 $y=\sqrt{x}$.

若 f 是在定义域 D 上的单调函数，则 $f:D\to f(D)$ 是单射，于是 f 的反函数 f^{-1} 必定存在，而且容易证明 f^{-1} 也是 $f(D)$ 上的单调函数.

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**. 把直接函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的.