“十三五”普通高等教育规划教材
全国工程专业学位研究生教育指导委员会教改项目

矩阵理论
及其应用

邱启荣 卢占会 编著

JUZHEN LILUN JIQI YINGYONG

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

"十三五"普通高等教育规划教材
全国工程专业学位研究生教育指导委员会教改项目

矩阵理论及其应用

邱启荣　卢占会　编著

JUZHEN LILUN JIQI YINGYONG

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书对矩阵的理论与方法做了较为详细的介绍，并编写了8个方面的应用案例。全书共6章，它们依次是：矩阵的特征值与矩阵分解、线性空间、线性变换、矩阵的Jordan标准形与矩阵函数、线性方程组与矩阵方程和应用案例。书中内容尽可能突出数学思想与数学方法的阐述，做到深入浅出，通俗易懂，易于阅读理解。来自工程实际问题的应用案例，使读者在学习数学知识的同时，提高应用数学理论与方法解决实际问题的能力。

本书可作为数理学院本科高年级学生矩阵论课程的教材，也可作为科研人员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

矩阵理论及其应用 / 邱启荣，卢占会编著．—北京：中国电力出版社，2018.7
"十三五"普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-5198-1565-3

Ⅰ．①矩⋯ Ⅱ．①邱⋯②卢⋯ Ⅲ．①矩阵论－高等学校－教材 Ⅳ．①O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第308785号

出版发行：中国电力出版社
地　　址：北京市东城区北京站西街19号（邮政编码100005）
网　　址：http://www.cepp.sgcc.com.cn
责任编辑：张　旻　贾丹丹
责任校对：李　楠
装帧设计：张　娟
责任印制：吴　迪

印　　刷：北京天宇星印刷厂
版　　次：2018年7月第一版
印　　次：2018年7月北京第一次印刷
开　　本：787毫米×1092毫米　16开本
印　　张：14.25
字　　数：348千字
定　　价：43.00元

前　言

用矩阵的理论与方法来处理现代工程技术中的各种问题已越来越普遍。在工程技术中引进矩阵理论不仅使理论的表达极为简捷，而且对理论的实质刻画也更为深刻，更由于计算机和数值计算方法的普及发展，不仅为矩阵理论的应用开辟了广阔的前景，也使工程技术的研究发生新的变化，开拓了崭新的研究途径。因此矩阵的理论与方法已成为研究现代工程技术的数学基础。矩阵论也成为工科院校硕士研究生重要的公共基础课程。

本书在由 2008 年 7 月中国电力出版社出版的《矩阵理论及其应用》的基础上重新精选和组织教材内容，加强了“矩阵论”课程内容和“数值分析”课程内容的衔接，将支撑矩阵理论计算的强大数学软件——MATLAB 软件引入教材内容中。我们给出了 MATLAB 软件的函数命令和应用例子，并对部分重要的方法给出了 MATLAB 程序，编写了 8 个方面的应用案例。所选内容的起点低、范围广，以适应不同专业研究生的需要。读者只需具备基本的大学数学知识，就可以进行学习，书中内容尽可能做到深入浅出，通俗易懂，易于阅读理解。教材内容的组织注重数学概念的理解与应用，突出数学思想与数学方法的阐述，对部分例题适当提高了矩阵的阶数，这样可加深对矩阵理论与方法的理解和掌握。对同一问题还采用了不同求解方法，这样可使读者在具体应用时选择合适的求解方法解决具体问题。来自工程实际问题的应用案例，使读者在学习数学知识的同时，逐步提高应用数学理论与方法解决实际问题的能力。MATLAB 软件的使用，加强“矩阵论”课程内容和“数值分析”课程内容的衔接，可进一步提高读者的科学计算能力，为后续的学习研究工作提供重要的根据支撑。

利用数学软件可以直接得到问题的具体结果，如何得到这些结果的过程并不显示。这不利于对知识的学习和掌握。使用低阶的问题作为例题不利于对矩阵理论和方法的理解和掌握，而利用高阶问题作为例题，计算过程烦琐，教学过程中板书就成了问题。为解决这一问题，在教学过程中，我们建议结合使用 MATLAB 软件和 Excel 软件来解决这一问题：将例题中的矩阵展现在 Excel 表格中，上课时重点介绍理论和方法，而过程中的烦琐计算交给 Excel 软件或 MATLAB 软件分步进行，这样既可以领会和熟悉求解的详细过程，又可以加深对理论和方法的理解和掌握。

全书共 6 章，它们依次是：矩阵的特征值与矩阵分解、线性空间、线性交换、矩阵的 Jordan 标准形与矩阵函数、线性方程组与矩阵方程和应用案例。

本书是 2016～2017 年全国工程专业学位研究生教育自选研究课题（教改项目）的研究成果。在编写过程中得到华北电力大学研究生院和数理学院的大力支持。本书在编写过程中，参考或引用了同行的工作，他们的工作不仅为本书的编写提供了丰富的素材，也提供了

有益的借鉴。本书的应用案例有些是根据近些年发表的学术论文编写的，有些直接引用了学术论文。中国电力出版社的有关工作人员付出了辛勤劳动，进行了精心编校。在此，作者对有关部门和他们表示衷心的感谢。

限于作者水平，在编写中难免有疏漏和不妥之处，恳请读者批评指正。

邱启荣　卢占会

2017 年 7 月

目　录

第 1 章 矩阵的特征值与矩阵分解

1.1 线性代数基础

在科学研究和社会生产实践中，大量的问题都涉及矩阵的概念. 对这些问题的研究常常反映为对有关矩阵的研究，甚至有些性质完全不同、表面上完全没有联系的问题，归结成矩阵以后的问题却是相同的，这就使矩阵成为数学中一个应用广泛的概念.

对矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，

（1）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

（2）数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可得

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times s}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times s}$ 是一个 $m\times s$ 的矩阵，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj},i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,s$$

【例 1.1.1】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 5\\ 8 & 2 & 8\end{pmatrix}$$

一般情况下：

（1）消去律不成立，即由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，推不出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

（2）交换律不成立，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}\overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}}\\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}}\end{pmatrix}$$

其中$\overline{a_{ij}}$是a_{ij}的共轭复数.

记 $\boldsymbol{E}_n$ 是 n 阶单位阵，对 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，

(1) 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

(2) 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵.

(3) 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称阵.

正交矩阵的列向量是两两正交的单位向量.

对 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$，

(1) 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为酉矩阵.

(2) 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$，则称 A 为埃尔米特（Hermite）阵.

由定义可知，反对称阵的对角线元素一定是 0，而埃尔米特阵的对角线上元素一定是实数.

如 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -4\\ 0 & -4 & -6\end{pmatrix}$是实对称阵，而 $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2 & 1-3i & 0\\ 1+3i & 3 & -4+5i\\ 0 & -4-5i & -6\end{pmatrix}$是埃尔米特阵.

定义 1.1.1 对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，

(1) 由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的 n 阶行列式（各元素的位置不变），称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det(\boldsymbol{A})$.

(2) $|\boldsymbol{A}|$ 中去除第 i 行、第 j 列后，剩余元素构成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；$(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记成 A_{ij}.

(3) 称由 $\boldsymbol{A}$ 的所有代数余子式构成 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

定义 1.1.2 对 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，

(1) 从 $\boldsymbol{A}$ 中任意选取 r 行、r 列，其交叉位置元素构成的 r 阶行列式，称为 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶子式.

(2) 称 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式的阶数为 A 的秩，记为 $\mathrm{rank}(A)$. 记 $\boldsymbol{R}_r^{m\times n}=\{A:\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n},\ \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=r\}$.

(3) 当 $m=n$ 时，从 $\boldsymbol{A}$ 中任意选取标号相同的 r 行、r 列，其交叉位置元素构成的 r 阶行列式，称为 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶主子式.

(4) 当 $m=n$ 时，从 $\boldsymbol{A}$ 中选取第 1，2，…，r 行，第 1，2，…，r 列，其交叉位置元素构成的 r 阶行列式，称为 A 的 r 阶顺序主子式.

注：

(1) $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶子式有 $C_m^r C_n^r$ 个.

(2) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶主子式有 C_n^k 个.

(3) $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\leqslant\min(m,\ n)$.

定义 1.1.3　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若存在一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并称方阵 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

定理 1.1.1　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，下列条件等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

(2) $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即 $\boldsymbol{A}$ 非奇异.

(3) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=n$.

(4) $\boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组线性无关.

(5) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

(6) 0 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* \tag{1.1.1}$$

特别地，对于二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，如果

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$$

则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

定义 1.1.4　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵，

(1) 如果对任意非零向量 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}>0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

(2) 如果对任意非零向量 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}<0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是负定矩阵.

定理 1.1.2　（霍尔维茨定理）

(1) 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式都为正，即

$$a_{11}>0,\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0,\cdots,|A|>0$$

(2) 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是负定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式中奇数阶为负，偶数阶为正，即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0 \quad (r=1,2,\cdots,n)$$

定理 1.1.3 (1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵，则存在正交阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$ 中的 $\boldsymbol{p}_i$ 是 A 的对应于特征值 λ_i 的单位特征向量.

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是正数.

定义 1.1.5 下面三种变换称为矩阵的初等行变换：

(1) 对换两行（对换 i、j 两行，记为 $r_i \leftrightarrow r_j$).

(2) 以不为 0 的数 k 乘以矩阵的某一行的所有元素（第 i 行乘 k 记为 $r_i \times k$).

(3) 把某一行的 k 倍加到另一行对应的元素上（第 j 行的 k 倍加到第 i 行，记为 $r_i + k \times r_j$).

注：

(1) 对应地，可以定义矩阵的初等列变换，矩阵的初等行变换和矩阵的初等列变换统称为矩阵的初等变换.

(2) 由单位矩阵经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

(3) 对 $\boldsymbol{A}$ 进行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

(4) 初等矩阵不改变矩阵的秩.

定义 1.1.6 秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为行阶梯阵，如果它满足以下条件：

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行中的每一行至少含有一个不为零的元，而后 $m-r$ 行的元素均为零.

(2) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的第一个不为零的元素在第 j_i 列，则 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

注：

(1) 如果行阶梯阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j_1，j_2，…，j_r 列是单位矩阵 $\boldsymbol{E}_m$ 的前 r 列，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为行最简形，也称为 Hermite 标准形. 在 Matlab 中，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形的命令是 rref ($\boldsymbol{A}$).

(2) 行阶梯阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于它的非零行数.

如在下列四个矩阵中：

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_3$ 是行阶梯阵，但不是最简形，而矩阵 $\boldsymbol{A}_2$ 是行最简形，$\boldsymbol{A}_4$ 不是行阶梯阵.

初等变换在线性代数中的应用十分广泛，概括起来包括以下几个方面：

(1) 求逆矩阵.

(2) 解矩阵方程（求 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 逆矩阵 $\boldsymbol{B}$，相当于求解矩阵方程 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_n$）.

(3) 求矩阵的最简形.

(4) 求矩阵和向量组的秩.

(5) 求向量组的极大无关组.

(6) 解线性方程组.

【例 1.1.2】 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，所以 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$.

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})&=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}\\
&\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\\
&\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -12 & 9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & -8 & -6\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

因此 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & -8 & -6\\ 2 & -9 & -6\\ -2 & 12 & 9\end{pmatrix}$.

【例 1.1.3】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & -3 & -7\\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4\\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0\\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3\end{pmatrix}$，求

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最简形和秩.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大线性无关组和秩.

解

$$
\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & -3 & -7\\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4\\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0\\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -2 & -4\\ 2 & 3 & 1 & -3 & -7\\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0\\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -2 & -4\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12\\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11\end{pmatrix}
$$

$$
\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}
$$

(1) $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的最简形，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})=3$.

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩$=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=3$. 由于 $\boldsymbol{B}$ 中台阶出现在第 1、2、4 列，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1、2、4 列所构成的向量组是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大线性无关组.

【例 1.1.4】 求非齐次方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5 \end{cases}$$

的通解.

解

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可得原方程组的同解方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_4=1 \end{cases}$$

因此，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\text{其中 } k_1、k_2 \text{ 为任意常数.}$$

1.2 矩阵的特征值与特征向量

矩阵的特征值和特征向量问题是矩阵理论中的一个重要问题，它的讨论始于 18 世纪，它的概念和相关结论在纯数学、应用数学、工程技术以及包括经济理论和应用的其他许多领域，都有广泛的应用. 如在求解有关常系数线性微分方程组、机械振动、电磁振荡、稳定性问题等实际问题中，常可归结为求一个方阵的特征值和特征向量的问题. 特征值和特征向量不仅在理论上很重要，而且也可直接用来解决实际问题.

1.2.1 特征值与特征向量

定义 1.2.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 及数 λ，使等式

$$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha} \tag{1.2.1}$$

成立，则称 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是属于（对应于）λ 的特征向量，称

$$\Delta_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.2.2}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，称 $\Delta_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=0$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程.

定义 1.2.2 (1) 在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中，任意选取标号相同的 k 行与 k 列 ($1\leqslant k\leqslant$

n)，位于这 k 行与 k 列交叉处的 k^2 个元素按原有位置组成的 k 阶行列式称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k **阶主子式**.

(2) 称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有 k 阶主子式的和为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k **阶迹**，记作 $\mathrm{tr}^{[k]}(\boldsymbol{A})$，即

$$\mathrm{tr}^{[k]}(\boldsymbol{A}) = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.3}$$

其中 $a_{i_t i_s}$ 是位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第 i_t 行、i_s 列交叉处的元素.

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶迹 $\mathrm{tr}^{[k]}(\boldsymbol{A})$ 为 C_n^k 个 k 阶行列式之和（$k=1$，2，…，n）. 根据这个定义，显然有：

$$\mathrm{tr}^{[1]}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn};$$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}^{[2]}(\boldsymbol{A}) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\mathrm{tr}^{[n]}(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}|.$$

定理 1.2.1　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\Delta_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{tr}^{[k]}(\boldsymbol{A}) \lambda^{n-k} \tag{1.2.4}$$

显然，$\boldsymbol{A}$ 的特征值就是特征方程的解（根），特征方程在复数范围内恒有解，其个数等于方程的次数（重根按重数计算），因此 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值，将此代数方程解出就可以得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 λ_1，λ_2，…，λ_n，当然 λ_i 可能是实数，也可能是复数，也可能有重根.

在 Matlab 中，可以利用命令 p=poly($\boldsymbol{A}$)，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的系数，并可利用 r=roots(p) 求以 p 为系数的多项式的零点. 用 eig($\boldsymbol{A}$) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

$\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量有如下性质：

定理 1.2.2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \tag{1.2.5}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |\boldsymbol{A}| \tag{1.2.6}$$

定理 1.2.3　设 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，k，k_1，$k_2 \in \boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量.

(1) 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 \neq \boldsymbol{0}$，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量.

(2) $k\lambda_0$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(3) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的特征值.

(4) $f(\lambda_0)=a_m\lambda_0^m+\cdots+a_1\lambda_0+a_0$ 是 $f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}_n$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $f(\boldsymbol{A})$ 的属于特征值 $f(\lambda_0)$ 的特征向量.

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则$\dfrac{1}{\lambda_0}$是 $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值.

定理 1.2.4 (1) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 s 个互不相同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_k$ 是属于 λ_k 的特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(2) 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量一定正交.

上面的三个定理大家自己证明，或阅读有关文献.

如果 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，由于 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，因此齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 一定有非零解，该齐次线性方程组的全部非零解就是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的全部特征向量. 于是可得出求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量的计算步骤：

第一步 计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$，令 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，求出特征方程的全部根，它们就是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

第二步 对于 $\boldsymbol{A}$ 的每一个不同的特征值 λ，求出齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$，则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 全部特征向量是 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$($k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是任意不全为零的数).

注：注意到 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组. 为在计算过程中少出错，用 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 求特征向量.

【例 1.2.1】 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&5&-1\\1&3&3\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解 因为

$$\mathrm{tr}^{[1]}(\boldsymbol{A})=2+5+3=10$$

$$\mathrm{tr}^{[2]}(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}2&0\\1&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&2\\1&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&-1\\3&3\end{vmatrix}=32$$

$$\mathrm{tr}^{[3]}(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}2&0&2\\1&5&-1\\1&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&5&-2\\1&3&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}5&-2\\3&2\end{vmatrix}=32$$

所以，$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-10\lambda^2+32\lambda+32=(\lambda-2)(\lambda-4)^2$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=4$.

(1) 对于 $\lambda_1=2$，由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&3&-1\\1&3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&1\\1&3&0\\1&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1=(-3,1,0)^{\mathrm{T}}$，因此 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=2$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1$，$(k_1\neq 0)$.

(2) 对于 $\lambda_2=\lambda_3=4$，由

$$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&0&2\\1&1&-1\\1&3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\1&3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\eta}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，因此 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=4$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\eta}_2$，$(k_2\neq 0)$.

【例 1.2.2】 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解　因为

$$\mathrm{tr}^{[1]}(\boldsymbol{A})=-3,\mathrm{tr}^{[2]}(\boldsymbol{A})=-9,\mathrm{tr}^{[3]}(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{vmatrix}=-5$$

所以，$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3+3\lambda^2-9\lambda+5=(\lambda-1)^2(\lambda+5)$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-5$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

(1) 对于 $\lambda_1=-5$，由

$$\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-6&6\\0&6&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，因此 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=-5$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1$ $(k_1\neq 0)$.

(2) 对于 $\lambda_2=\lambda_3=1$，由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&2&2\\2&-2&-2\\2&-2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\eta}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，因此 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3$ (k_2，k_3 不全为 0).

一般情况下，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是不容易的，即使是三阶矩阵. 利用式 (1.2.4)，可以将求特征值转化为求特征多项式的零点，如求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-4&1\\1&2&2\\3&1&-5\end{pmatrix}$ 的特征值，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3+\lambda^2-17\lambda+73$ 的零点.

对于低阶矩阵，利用式 (1.2.4)，可方便求得矩阵的特征多项式. 但对于高阶矩阵，由于 $\boldsymbol{A}$ 的 n 阶主子式有 C_n^k 个，利用式 (1.2.4) 来计算，计算量会很大，该方法不适用，这里介绍用 F-L 方法求特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 的系数.

利用递归定义以下 n 个矩阵 $\boldsymbol{B}_k(k=1,2,\cdots,n)$：

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}, & c_1 = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}_1) \\ \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1 - p_1\boldsymbol{E}), & c_2 = \dfrac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}_2) \\ \boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_2 - p_2\boldsymbol{E}), & c_3 = \dfrac{1}{3}\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}_3) \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_{n-1} - p_{n-1}\boldsymbol{E}), & c_n = \dfrac{1}{n}\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}_n) \end{cases} \tag{1.2.7}$$

可以证明

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} - c_2\lambda^{n-2} - \cdots - c_{n-1}\lambda - c_n \tag{1.2.8}$$

【例 1.2.3】 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ 的特征多项式.

解

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \qquad c_1 = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}_1) = -1$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1 - c_1\boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} 5 & -19 & -10 \\ 11 & 4 & -3 \\ -5 & -14 & 25 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}_2) = 17$$

$$\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_2 - c_2\boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} -73 & 0 & 0 \\ 0 & -73 & 0 \\ 0 & 0 & -73 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}_3) = -73$$

由式（1.2.4），可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 17\lambda + 73$$

用 F-L 方法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征多项式 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的系数的 Matlab 程序如下：

```
function xishu = tezhendxs(A)
n = size(A,1);
xishu = zeros(n,1);
B = A;
xishu(1) = trace(B);
for k = 2:n
    B = A * (B-xishu(k-1) * eye(n));
    xishu(k) = trace(B)/k;
end
xishu = [1; - xishu];
end
```

求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的 Matlab 命令为 lamda=eig(A)，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量和特征值的 Matlab 命令为 [P, lamda]=eig(A). 利用 Matlab 软件，可求得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ 的特征值为