



住房和城乡建设部土建类学科专业“十三五”规划教材

高等学校土木工程学科专业指导委员会规划教材
(按高等学校土木工程本科指导性专业规范编写)

结构力学

(第二版)

祁 皓 林 伟 主 编
孙家国 陈尚鸿 副主编
周克民 主 审

中国建筑工业出版社

住房和城乡建设部土建类学科专业“十三五”规划教材
高等学校土木工程学科专业指导委员会规划教材
(按高等学校土木工程本科指导性专业规范编写)

结 构 力 学

(第二版)

祁 皑 林 伟 主 编
孙家国 陈尚鸿 副主编
周克民 主 审

中国建筑工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

结构力学/祁皑, 林伟主编. —2版. —北京:
中国建筑工业出版社, 2018.1

住房和城乡建设部土建类学科专业“十三五”规划教材
高等学校土木工程学科专业指导委员会规划教材(按高等
学校土木工程本科指导性专业规范编写)

ISBN 978-7-112-21620-8

I. ①结… II. ①祁… ②林… III. ①结构力学-高
等学校-教材 IV. ①0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 301484 号

本书根据《高等学校土木工程本科指导性专业规范》和教育部高等学校力学
教学指导委员会力学基础课程教学指导分委员会最新制订的《结构力学课程教学
基本要求》编写。在编写过程中严格遵循专业规范编制的基本原则, 结合结构力
学课程教学、课程建设和教学改革的实践及成果, 强调了培养应用型人才、拓宽
专业口径、推进创新教育的发展战略。全书共分为 10 章, 主要包括: 杆件体
系的几何组成分析、静定结构受力分析、静定结构位移计算、力法、位移法、弯
矩分配法、矩阵位移法、结构动力计算、影响线及其应用、结构稳定及极限荷载
计算的基本知识等。为便于学生学习, 书后附有各章习题的简明答案。

本书内容属于经典结构力学, 可作为土木工程、水利水电工程等相关专业的
教科书, 也可供研究生入学考试参考。

为更好地支持本课程教学, 本书作者制作了多媒体教学课件, 有需要的任课
老师可以发送邮件至 jiangongkejian@163.com 索取。

* * *

责任编辑: 吉万旺 王 跃

责任校对: 关 健

住房和城乡建设部土建类学科专业“十三五”规划教材
高等学校土木工程学科专业指导委员会规划教材
(按高等学校土木工程本科指导性专业规范编写)

结 构 力 学 (第二版)

祁 皑 林 伟 主 编

孙家国 陈尚鸿 副主编

周克民 主 审

*

中国建筑工业出版社出版、发行(北京海淀三里河路9号)

各地新华书店、建筑书店经销

北京嘉泰利德公司制版

北京建筑工业出版社印刷

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 26 $\frac{1}{2}$ 字数: 556 千字

2018年3月第二版 2018年3月第五次印刷

定价: 55.00 元(赠课件)

ISBN 978-7-112-21620-8

(31273)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码 100037)

本系列教材编审委员会名单

主 任：李国强

常务副主任：何若全

副 主 任：沈元勤 高延伟

委 员：（按拼音排序）

白国良 房贞政 高延伟 顾祥林 何若全 黄 勇
李国强 李远富 刘 凡 刘伟庆 祁 皓 沈元勤
王 燕 王 跃 熊海贝 阎 石 张永兴 周新刚
朱彦鹏

组 织 单 位：高等学校土木工程学科专业指导委员会
中国建筑工业出版社

出版说明

近年来,我国高等学校土木工程专业教学模式不断创新,学生就业岗位发生明显变化,多样化人才需求愈加明显。为发挥高等学校土木工程学科专业指导委员会“研究、指导、咨询、服务”的作用,高等学校土木工程学科专业指导委员会制定并颁布了《高等学校土木工程本科指导性专业规范》(以下简称《专业规范》)。为更好地宣传贯彻《专业规范》精神,规范各学校土木工程专业办学条件,提高我国高校土木工程专业人才培养质量,高等学校土木工程学科专业指导委员会和中国建筑工业出版社组织参与《专业规范》研制的专家编写了本系列教材。本系列教材均为专业基础课教材,共20本,已全部于2012年年底出版。此外,我们还依据《专业规范》策划出版了建筑工程、道路与桥梁工程、地下工程、铁道工程四个主要专业方向的专业课系列教材。

经过五年多的教学实践,本系列教材获得了国内众多高校土木工程专业师生的肯定,同时也收到了不少好的意见和建议。2016年,本系列教材整体入选《住房城乡建设部土建类学科专业“十三五”规划教材》,为打造精品,也为了更好地与四个专业方向专业课教材衔接,使教材适应当前教育教学改革的需求,我们决定对本系列教材进行修订。本次修订,将继续坚持本系列规划教材的定位和编写原则,即:规划教材的内容满足建筑工程、道路与桥梁工程、地下工程和铁道工程四个主要方向的需要;满足应用型人才培养要求,注重工程背景和工程案例的引入;编写方式具有时代特征,以学生为主体,注意新时期大学生的思维习惯、学习方式和特点;注意系列教材之间尽量不出现不必要的重复;注重教学课件和数字资源与纸质教材的配套,满足学生不同学习习惯的需求等。为保证教材质量,系列教材编审委员会继续邀请本领域知名教授对每本教材进行审稿,对教材是否符合《专业规范》思想,定位是否准确,是否采用新规范、新技术、新材料,以及内容安排、文字叙述等是否合理进行全方位审读。

本系列规划教材是实施《专业规范》要求、推动教学内容和课程体系改革的最好实践,具有很好的社会效益和影响。在本系列规划教材的编写过程中得到了住房城乡建设部人事司及主编所在学校和学院的大力支持,在此一并表示感谢。希望使用本系列规划教材的广大读者继续提出宝贵意见和建议,以便我们在本系列规划教材的修订和再版中得以改进和完善,不断提高教材质量。

高等学校土木工程学科专业指导委员会
中国建筑工业出版社
2017年12月

第二版前言

本书是在第一版的基础上,按照教育部高等学校力学教学指导委员会力学基础课程教学指导分委员会最新制订的“结构力学课程教学基本要求”,结合结构力学课程教学、课程建设和教学改革的实践及成果修订而成的。

近年来,随着大型结构的不断建设,抗震问题越来越突出。因此,本次修订的内容有一些来源于作者近年来在抗震领域的教学和研究成果。

本次修订的主要内容包括以下几个部分:

1. 在位移法中,增加了剪力静定杆部分的内容。除传统的求解方法(将剪力静定杆的杆端看成平行链杆约束)外,还提供了另一个方法。新的求解方法从一个不同的角度利用了“剪力静定”的特征,为该类结构的求解提供了一个新的思路。

2. 在位移法中,将牵连位移的两种情况在一个小节中分别进行了详细的讲解。这类杆件刚度为无穷大的情况,在定性结构力学的分析中具有重要作用。

3. 结构力学的动力计算部分,主要的作用是为了后续专业课程中的抗震问题做准备。因此,本次修订中,补充了地面运动的动力方程的建立及求解。同时,讨论了地震作用下,瞬态振动在总反应中的贡献问题。

4. 在动力计算部分,补充了两个自由度体系自由振动位移求解的例题。补充了关于有阻尼体系受迫振动反应滞后问题的例题。在目前的大部分教材中,这些内容都没有对应的例题。

5. 针对动力计算内容的修订,对这一章的习题部分进行较大的修订,删除和补充了一定数量的习题。修订后的习题与教材的内容对应性更强,更有助于学生对基本概念的理解和习题求解能力的增强。

6. 为了方便学生完成习题,本次修订中,将各章的习题简明答案附在书后。

在本次修订中,还改正和采纳了一些读者反馈的问题和提出的建议。在此一并表示感谢。希望继续得到各位读者关心和支持,恳请大家批评指正。欢迎各位读者与我们常联系(邮箱: qikai@fzu.edu.cn)。

祁皓

2017年11月14日

第一版前言

2011年,《高等学校土木工程本科指导性专业规范》颁布了。专业规范中强调了培养应用型人才、拓宽专业口径、推进创新教育的发展战略。本教材就是在这个背景下策划的。教育部出台了卓越工程师培养计划,这与本教材的编写初衷不谋而合。

这本书的内容属于经典结构力学,是土木工程、水利水电工程等相关专业多学时的教科书。它包括了静定结构和超静定结构的受力和位移计算、移动荷载和动力荷载下的结构分析以及结构的稳定分析和极限荷载计算等内容。本书的内容足够详细,并通过承上启下的组织和表达,使之成为一个整体,从而使本书比较适合自学。此外,本书还努力考虑了工程实际应用,应该能增加学生和专业工程师们的兴趣。

由于许多学生和专业工程师都觉得这个科目难学,因此,本书把重点放在了使《结构力学》易于理解上。为了达到这个目的,书中的内容围绕几个特点进行组织:数学推导尽量简单;对分析方法进行归纳,提炼关键的分析步骤,方便读者按步骤解题;强调分析结果的物理解释,缩短理论与实践的距离。例如,回避了弹性杆件稳定微分方程的复杂推导,但引入了更实用的非线性稳定分析。在一些技术处理上注意适应学生的情况,如矩阵位移法采用了左手坐标系,与其他章弯矩的规定取得一致,便于学生掌握。

全书共分10章:杆件体系的几何组成分析、静定结构受力分析、静定结构位移计算、力法、位移法、弯矩分配法、矩阵位移法、结构动力计算、影响线及其应用、结构稳定及极限荷载计算的基本知识。为了学习的连贯性,本书将影响线及其应用一章放到了后面。

由于这是一本新书,因此,恳请读者将你们发现的问题、改进的建议及时反馈给我(qikai@fzu.edu.cn)。谢谢你们。

祁皓

2011年10月

目 录

第1章 杆件体系的几何组成分析	1
本章知识点	1
1.1 体系几何组成分析中的几个基本概念	1
1.1.1 几何不变体系、几何可变体系	1
1.1.2 刚片、自由度和约束	3
1.2 平面几何不变体系的组成规律	5
1.2.1 两个刚片用一个铰和一根链杆连接组成的体系	5
1.2.2 两个刚片用三根链杆连接组成的体系	6
1.2.3 三个刚片用三个铰连接组成的体系	7
1.2.4 二元体规律	9
1.3 平面体系几何组成分析举例	10
1.4 体系的计算自由度	17
1.5 瞬变体系	18
1.6 结论与讨论	19
1.6.1 结论	19
1.6.2 讨论	20
思考题	20
习题	21
第2章 静定结构受力分析	25
本章知识点	25
2.1 桁架受力分析	26
2.1.1 桁架结构概述	26
2.1.2 节点法	27
2.1.3 截面法	33
2.1.4 联合法	36
2.1.5 各类平面梁式桁架的比较	38
2.2 静定梁受力分析	40
2.2.1 单跨静定梁	40

2.2.2 多跨静定梁	43
2.3 静定刚架受力分析	47
2.3.1 单体刚架	48
2.3.2 三铰刚架	51
2.3.3 多层多跨刚架	53
2.4 三铰拱受力分析	55
2.4.1 支座反力和内力计算	56
2.4.2 合理拱轴线	60
2.5 静定组合结构受力分析	63
2.5.1 屋架组合结构	63
2.5.2 桥梁组合结构	65
2.5.3 组合结构分析举例	68
2.5.4 由弯矩图求剪力图和轴力图	69
思考题	70
习题	71
第3章 静定结构位移计算	80
本章知识点	80
3.1 概述	80
3.2 虚功原理	80
3.2.1 变形体的虚功原理	80
3.2.2 平面杆系结构的虚功原理	81
3.3 单位荷载法	82
3.4 荷载作用下结构的位移计算	85
3.5 图乘法	89
3.6 支座移动引起的静定结构位移计算	96
3.7 制造误差引起的静定结构位移	98
3.8 温度改变引起的静定结构位移计算	100
3.9 互等定理	103
3.9.1 功的互等定理	103
3.9.2 位移互等定理	103

3.9.3 反力互等定理	104	5.3.3 具有剪力静定杆结构	173
3.9.4 反力位移互等定理	104	5.4 具有牵连位移的结构	177
思考题	105	5.5 位移法解有支座位移和温度变化的结构	183
习题	106	5.5.1 位移法解有支座位移的结构	183
第4章 力法	110	5.5.2 位移法解有温度变化的结构	185
本章知识点	110	5.6 对称性的利用	185
4.1 力法基本概念和力法方程	110	思考题	189
4.1.1 力法基本概念	110	习题	189
4.1.2 力法的典型方程	112	第6章 弯矩分配法	194
4.2 荷载作用下的超静定结构	115	本章知识点	194
4.2.1 超静定梁和刚架	115	6.1 基本概念	194
4.2.2 超静定桁架	122	6.2 单节点弯矩分配法	196
4.2.3 超静定组合结构	125	6.3 多节点弯矩分配法	202
4.2.4 对称性利用	127	思考题	207
4.3 力法解支座位移作用下超静定结构	132	习题	207
4.4 力法解温度变化作用下超静定结构	136	第7章 矩阵位移法	210
4.5 超静定结构的位移计算和计算结果的校核	139	本章知识点	210
4.5.1 超静定结构的位移计算	139	7.1 局部坐标下的单元刚度方程和单元刚度矩阵	210
4.5.2 计算结果的校核	141	7.2 整体坐标系下的单元刚度方程和单元刚度矩阵	213
4.6 力法解超静定拱	144	7.2.1 单元坐标转换矩阵	213
4.6.1 两铰拱	144	7.2.2 整体坐标系的单元刚度矩阵	215
4.6.2 无铰拱	148	7.3 结构的整体刚度方程和整体刚度矩阵	216
4.7 超静定结构的特性	149	7.4 非节点荷载的处理	221
4.8 结论与讨论	150	7.4.1 等效节点荷载的概念	221
4.8.1 结论	150	7.4.2 等效节点荷载的形成过程	222
4.8.2 讨论	151	7.5 矩阵位移法的解题步骤和例题	227
思考题	151	7.6 结论和讨论	243
习题	152	7.6.1 结论	243
第5章 位移法	157	7.6.2 讨论	244
本章知识点	157	思考题	244
5.1 形常数和载常数	157	习题	244
5.2 平衡方程法	159		
5.3 典型方程法	161		
5.3.1 无侧移结构	163		
5.3.2 有侧移结构	167		

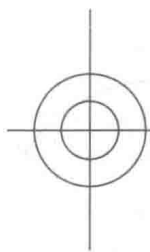
第 8 章 结构动力计算	246
本章知识点	246
8.1 概述	246
8.1.1 动力荷载的分类	246
8.1.2 体系的动力自由度	247
8.1.3 动力计算的特点	248
8.1.4 重力荷载对动力计算的影响	249
8.2 单自由体系的自由振动	250
8.2.1 不考虑阻尼的自由振动	250
8.2.2 阻尼对自由振动的影响	255
8.3 单自由体系简谐荷载下的受迫振动	259
8.3.1 受迫振动时动力方程的建立	259
8.3.2 受迫振动方程求解	261
8.3.3 单自由度体系无阻尼受迫振动	262
8.3.4 阻尼对受迫振动的影响	268
8.3.5 一般形式的动荷载下的单自由度体系受迫振动	272
8.4 多自由度体系自由振动	275
8.4.1 刚度法	275
8.4.2 柔度法	281
8.4.3 振型的正交性及其应用	287
8.5 多自由度体系简谐荷载下的受迫振动	291
8.5.1 刚度法	292
8.5.2 柔度法	296
8.6 振型分解法	300
8.6.1 无阻尼时的振型分解法	300
8.6.2 有阻尼时的振型分解法	303
8.7 地面运动作用下的结构动力计算	304
8.7.1 地面运动下结构的动力方程及其求解	305
8.7.2 动力位移中的伴生自由振动	306

8.7.3 动力加速度中的伴生自由振动	306
8.8 频率的实用计算方法	313
8.8.1 能量法	313
8.8.2 等效质量法	316
8.9 结论与讨论	317
8.9.1 结论	317
8.9.2 几点讨论	318
思考题	318
习题	319

第 9 章 影响线及其应用	324
本章知识点	324
9.1 静力法作影响线	324
9.2 机动法作影响线	330
9.3 间接荷载下的影响线	334
9.4 桁架的影响线	336
9.5 影响线的应用	341
9.5.1 利用影响线求某一量值	341
9.5.2 利用影响线判断最不利荷载的位置	342
9.5.3 简支梁的绝对最大弯矩	347
9.5.4 简支梁的内力包络图	350
9.6 超静定结构的影响线	350
9.6.1 静力法作超静定结构的影响线	351
9.6.2 机动法作超静定结构的影响线	351
思考题	353
习题	353

第 10 章 结构稳定及极限荷载计算的	
基本知识	357
本章知识点	357
10.1 结构稳定计算	357
10.1.1 稳定问题分类	357
10.1.2 完善体系分支点失稳分析 举例	360
10.1.3 非完善体系极值点失稳分析 举例	364
10.1.4 完善体系多自由度分支点	

失稳分析举例	366	10.3.1 结论	372
10.2 结构的极限荷载	367	10.3.2 几点讨论	373
10.2.1 基本假定	368	思考题	374
10.2.2 基本概念	368	习题	374
10.2.3 比例加载时极限荷载的求解	370	附录 习题简明答案	376
10.3 结论和讨论	372	参考文献	409



第1章

杆件体系的几何组成分析

本章知识点

【知识点】自由度、约束、瞬铰(无穷远瞬铰)、复铰、多余约束、刚片等概念,几何不变体系、几何可变体系、无多余约束几何不变体系、有多余约束几何不变体系、瞬变体系、常变体系,几何组成分析的目的,平面无多余约束几何不变体系的基本组成规则,平面杆系的计算自由度,静定、超静定结构的几何特性。

【重点】应用基本组成规则分析平面杆系的几何组成。

【难点】平面杆系的计算自由度的应用,无穷远瞬铰的应用,复杂平面杆系的几何组成分析。

用节点将杆件连接起来组成的体系称为**杆件体系**。如果体系的所有杆件、节点和外部作用均处在同一平面内,则称为**平面杆件体系**。在不至于发生混淆的情况下,本书中将平面杆件体系简称为**体系**。对体系的运动趋势和几何稳定性进行分析,称为**体系的几何组成分析**。

几何组成分析的目的是确定体系是否可以作为实际的工程结构。一般来说,实际工程结构(包括地基)的几何形状应该是稳定的。

体系在外部荷载作用下,杆件会产生变形,但这种变形是比较微小的,一般不会影响体系的几何稳定性。因此,几何组成分析中不考虑这种变形,将体系中所有杆件视为刚体。

1.1 体系几何组成分析中的几个基本概念

1.1.1 几何不变体系、几何可变体系

1. 几何不变体系

如果不考虑材料的变形,在任意荷载作用下,一个体系内的各杆件之间不存在发生刚体位移的可能。那么,称这个体系为**几何不变体系**,如图 1-1 所示。常规的工程结构绝大部分都是几何不变体系。

2. 几何可变体系

如果不考虑材料的变形,尽管受到很小的作用力,一个体系内的各杆

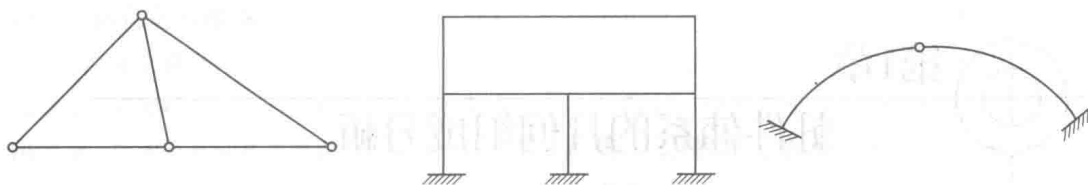


图 1-1 几何不变体系

件之间也存在发生刚体位移的可能。那么,称这个体系为几何可变体系。几何可变体系又可以分为两种,一种是几何常变体系,另一种是几何瞬变体系。

(1) 几何常变体系

几何常变体系是指体系内部可以发生“有限量”的刚体位移。这里,“有限量”的含义是指体系的刚体位移值与体系本身的几何尺寸在数学上属同一量级。在本书中,这个“有限量”提法是相对于瞬变体系中的“微小量”而言的。

图 1-2(a) 所示体系,上部结构为铰接四边形,内部杆件之间存在发生“有限量”刚体位移的可能,是几何可变体系。



(a) 几何常变体系: 上部结构内部几何可变

(b) 几何常变体系: 下部结构与地基之间几何可变

图 1-2 几何常变体系

如图 1-2(b) 所示体系,虽然上部结构为铰接三角形,内部杆件之间不存在发生刚体位移的可能,是几何不变体系。但是,如果把上部的三角形结构按照如图 1-2(b) 所示方法建造在下面的地基上,则上部结构与地基之间就存在发生水平“有限量”刚体位移的可能。这时,由上部结构和地基组成的大体系就是几何常变体系。

几何常变体系只能在特定荷载下维持平衡,在一般荷载作用下均可能发生运动,因此,几何常变体系不能作为常规的工程结构。

(2) 几何瞬变体系

这是一类比较特殊的体系,原本是一个几何可变体系,但经过“微小量”位移以后,就变成了几何不变体系。这类体系,被称为几何瞬变体系。如图 1-3 所示体系为几何瞬变体系的一种形式。在后面的分析中可以看到,

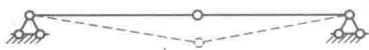


图 1-3 几何瞬变体系

几何瞬变体系在常规荷载作用下,能产生很大的内力,因此,不能作为常规的工程结构。

1.1.2 刚片、自由度和约束

1. 刚片

几何组成分析时，为了表述方便，常把几何不变体系称为刚片。因此，刚片可以是一根杆件，也可以是一个体系中部分杆件组成的小的几何不变体系。支撑上部结构的地基通常也视为一个刚片。如图 1-4(a)中阴影部分所示。

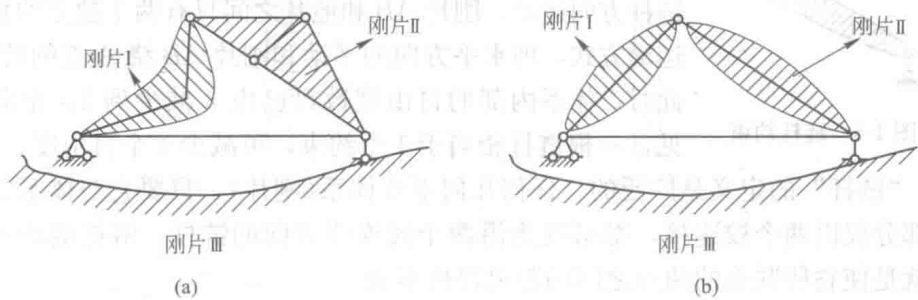


图 1-4 刚片

几何组成分析中，为了方便，在保证与体系其他部分连接形式不变的前提下，刚片是可以替换的。因为，这样的替换不改变体系的自由度和约束的情况。因此，体系的几何组成结论不变。例如，图 1-4(a)中的刚片 I 是一根折杆，与体系的其他部分用铰连接，这时可以用最简单的直杆来替换。同理，刚片 II 也可以用直杆替换，如图 1-4 所示。

在后面的例题中可以看到，这样的替换可以使体系的几何组成分析变得简单。

2. 自由度

所谓自由度是一个体系相对某个参照系的独立运动方式，自由度的数目在数值上等于确定体系在这个参照系中的位置需要的独立坐标数。

几何组成分析中，通常以要分析的体系中某个刚片为参照系。因此，本书中的自由度是指体系内部相对的独立运动方式，即体系的内部自由度。

例如，图 1-5(a)所示的两个刚片组成的体系，两个刚片之间可以发生相对水平运动、相对竖向运动和相对转动，因此，体系的内部自由度为 3。同理，在图 1-5(b)所示的点 A 和地基组成的体系中，点 A 和地基之间可以发生相对水平运动和相对竖向运动。因此，体系的内部自由度为 2；当然，在刚片和地基组成的体系中，其内部自由度为 3(图 1-5c)。

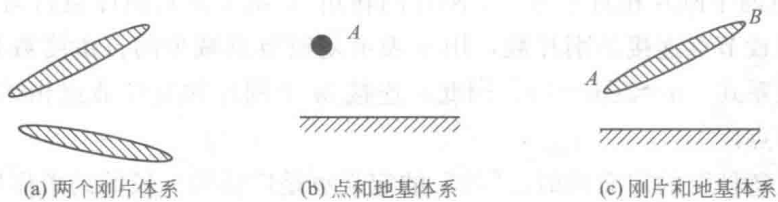


图 1-5 体系内部的自由度

3. 约束

能够限制运动的装置称为约束。体系的自由度数目可因加入约束而减少。能够减少几个自由度，就称为几个约束。常见的约束有如下几种：

(1) 链杆

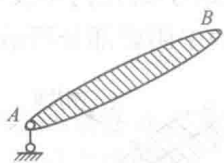


图 1-6 链杆约束

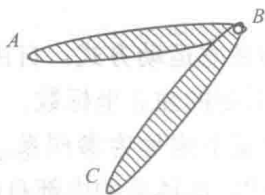
图 1-6 所示为刚片 AB 和地基组成的体系。没有链杆时，该体系内部有 3 个自由度。加上链杆后，A 点不能沿链杆方向运动，刚片 AB 和地基之间只有两个独立的相对运动方式，即水平方向的平动和刚片 AB 绕 A 点的转动。此时，体系内部的自由度数目已由 3 减少到 2。由此可见，一根链杆相当于 1 个约束，可减少 1 个自由度。

“链杆”的定义是广泛的。任何几何不变体系(刚片)，只要它与体系的其他部分仅以两个铰连接，都可视为沿两个铰连线方向的链杆。链杆的约束作用就是使它所联系的两点之间的距离保持不变。

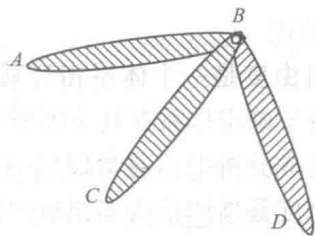
(2) 铰节点

铰节点有两种，一种是单铰节点，另一种是复铰节点。

仅连接两个刚片的铰节点称为单铰节点，如图 1-7(a)所示。图中如果没有 B 铰，则刚片 AB 和刚片 CB 之间有 3 个自由度。用铰节点连接后，两个刚片之间只能发生相对转动，有 1 个自由度。因此，只需 1 个坐标(两个刚片之间的相对转角)就可以确定体系内部刚片之间的相对位置了。此时体系的自由度数目由 3 减少到 1。由此可见，连接两个刚片的单铰节点相当于两个约束，可减少 2 个自由度。



(a) 单铰节点



(b) 复铰节点

图 1-7 铰节点约束

连接 3 个或 3 个以上刚片的铰节点称为复铰节点，如图 1-7(b)所示。图中若没有 B 铰，则体系内部共有 6 个自由度。用 B 铰连接后，体系的自由度为 2(任意两个刚片相对于另一个刚片的转角)，减少的自由度数目为 4。若用 m 表示复铰节点连接的刚片数，用 n 表示复铰节点减少的自由度数目，则不难得出关系式： $n=2(m-1)$ 。因此，连接 m 个刚片的复铰节点相当于 $m-1$ 个单铰节点。

与“链杆”的定义相似，“铰”的定义也是广泛的。铰的约束作用是使它所联系的刚片只能绕其转动。因此，理论力学中的“瞬时转动中心”在广义上也是铰。因为是两个杆件延长线的交点，故称其为虚铰。

(3) 刚节点

与铰节点类似, 刚节点也有单刚节点和复刚节点两种。

从图 1-8(a)中不难看出, 连接两个刚片的单刚节点可以减少 3 个自由度。与复铰节点类似, 复刚节点(图 1-8b)可减少的自由度数目为 $3(m-1)$, 相当于 $m-1$ 个单刚节点。其中, m 为连接的刚片数。

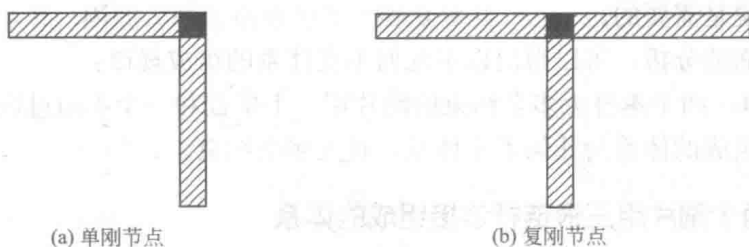


图 1-8 刚节点约束

(4) 平行链杆

图 1-9 所示为刚片 AB 和地基组成的体系。没有平行链杆时, 该体系内部有 3 个自由度。加上平行链杆后, A 点不能沿链杆方向运动, 也不能绕 A 点转动, 刚片 AB 和地基之间只有 1 个独立的相对运动方式, 即竖直方向的平动。此时, 体系内部的自由度数目已由 3 减少到 1。由此可见, 平行链杆相当于 2 个约束, 可减少 2 个自由度。

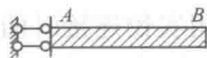


图 1-9 平行链杆约束

1.2 平面几何不变体系的组成规律

为了构造一个几何不变体系, 需要研究组成几何不变体系的充分条件。这些充分条件称为几何不变体系的组成规律。本节讨论的是平面几何不变体系最基本的组成规律。为了使问题分析简单明确, 本节中所指的刚片均为无多余约束的几何不变体系。

1.2.1 两个刚片用一个铰和一根链杆连接的体系

图 1-10 所示为两个刚片组成的体系。如果只用一个铰 A 连接两个刚片(图 1-10a), 很明显, 这个体系内部只有 1 个自由度(两刚片之间的相对转角), 是几何可变体系。如果在该体系上增加链杆 1(图 1-10b), 则体系就变成了几何不变体系。这种能够减少体系自由度的约束称为必要约束。

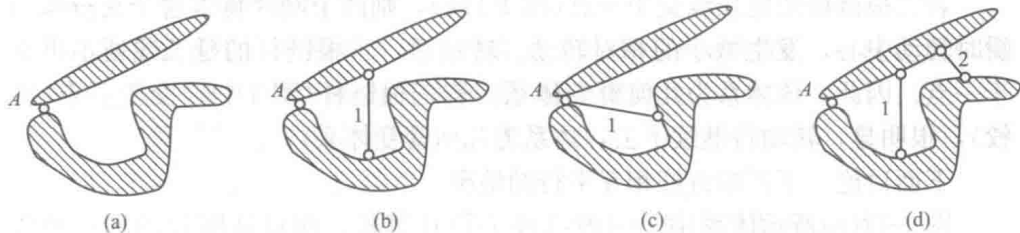


图 1-10 两个刚片用一个铰和一根链杆连接

再考察另外两种情况。在图 1-10(c)中,若链杆 1 通过 A 铰,则起不到减少自由度的作用,体系仍为几何可变体系;在图 1-10(d)中,若再增加链杆 2,很明显,该链杆对体系的几何稳定性不起作用。这种不能减少体系自由度的约束称为**多余约束**。虽然,多余约束对于保持体系的几何稳定性来说是不必要的。但后面将会看到,多余约束对于改善结构的受力、增加结构的安全度等方面来说是需要的。

由上面的分析,可以得出以下几何不变体系的组成规律:

规律 1 两个本身无多余约束的刚片用一个单铰和一个不通过该铰的链杆相连,则组成的体系为几何不变体系,且无多余约束。

1.2.2 两个刚片用三根链杆连接组成的体系

在图 1-11(a)中,若两个刚片只用链杆 1 和链杆 2 连接,用 O_1 表示它们延长线的交点,显然两个刚片可以发生以 O_1 为瞬时转动中心(也称虚铰或瞬铰)的微小转动。这时,两刚片之间的瞬时相对运动情况与两刚片在 O_1 点用实铰连接时的运动情况完全相同。因此,对照规律 1,如果图中链杆 3 不通过 O_1 点,则该体系为几何不变体系。故可以这样描述该种体系的几何组成规律。

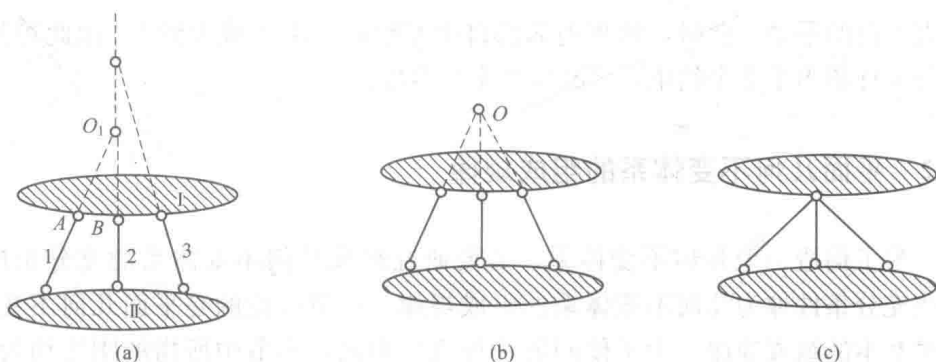


图 1-11 两个刚片用三根链杆连接组成的体系

规律 2 两个本身无多余约束的刚片用三根既不相互平行,(延长线)又不相交于一点的链杆连接,则组成的体系为几何不变体系,且无多余约束。

在规律 2 中,将规律 1 中的“链杆不通过铰”的条件,换成了“链杆既不相互平行,(延长线)又不相交于一点”。因此,这两条规律在本质上是同样的。

若三根链杆的延长线交于一点(图 1-11b),则两个刚片将以这个交点作为瞬时转动中心,发生微小的相对转动。转动后,三根链杆的延长线便不再交于一点。因此,该体系为几何瞬变体系。若三根链杆(图 1-11c)交于一点(实铰),很明显,转动将继续下去,体系为几何常变体系。

下面讨论一下三根链杆相互平行的情况。

图 1-12(a)所示体系中,三根链杆平行且等长,而且从刚片的同一侧连出,很明显是几何常变体系。