普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主编 阳平华 阳彩霞

航空工业出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数

主编　阳平华　阳彩霞

航空工业出版社

北京

内容提要

本书是由拥有多年教学经验的教师，根据高等院校线性代数教学大纲要求编写而成的. 它不仅介绍了线性代数的相关概念、理论、方法等基础知识，还介绍了线性代数在实际生活中的应用.

本书共6章，包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵相似与对角化、二次型.

本书内容简明扼要，通俗易懂，应用性强，可供普通高等院校各类专业使用，也可作为经济、管理、工程等相关从业者的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 阳平华, 阳彩霞主编. -- 北京 : 航空工业出版社, 2018.7

ISBN 978-7-5165-1650-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①阳… ②阳… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 152414 号

线性代数

Xianxing Daishu

航空工业出版社出版发行

（北京市朝阳区北苑 2 号院　100012）

发行部电话：010-84936597　　010-84936343

北京市科星印刷有限责任公司印刷　　全国各地新华书店经售

2018 年 7 月第 1 版　　2018 年 7 月第 1 次印刷

开本：787×1092　1/16　印张：13　字数：300 千字

印数：1－2200　　定价：36.00 元

前　言

线性代数是高等院校各类专业的一门必修课，是后续专业课程的重要理论基础，它在自然科学、工程技术以及经济等领域有着广泛的应用．近年来，高等教育不断改革，高校逐渐向应用型转变，教材改革也迫在眉睫．为此，我们精心编写了本书．

本书具有以下特点．

1．案例典型，针对性强．

本书案例不仅丰富，而且与知识点结合紧密，具有很强的针对性，有助于学生理解和掌握相关知识，培养和提高学生的实际应用能力．例如，在讲解矩阵相关知识时，介绍了矩阵加密法，发送者用加密矩阵来加密信息，接收者根据加密矩阵可破译出原信息．

2．重点突出，便于索引．

本书对性质进行了集中整理，并突出显示定义和定理，便于学生在学习过程中抓住重点，也便于学生查找．

3．海量习题，随学随练．

本书每章都设有小节习题、总习题以及习题答案，以便于学生自主学习和检验学习效果．

本书由阳平华、阳彩霞担任主编，李菁、吴丽镐担任副主编，张清平、陈妙玲、黄婷、李海荣参与编写．

在编写过程中，我们参阅和借鉴了大量的相关资料和教材，在此，特向这些资料和教材的作者表示衷心的感谢．

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中错误和疏漏之处在所难免，敬请广大读者批评指正．

另外，本书配有丰富的教学资源包，读者可到北京金企鹅联合出版中心网站（www.bjjqe.com）下载．

编　者

2018 年 6 月

本书编委会

主　编　阳平华　阳彩霞

副主编　李　菁　吴丽镐

参　编　张清平　陈妙玲

　　　　黄　婷　李海荣

目 录

第 1 章　行列式

行列式的理论是从解线性方程组的需要中建立和发展起来的，它在线性代数以及其他数学分支上都有着广泛的应用. 本章主要讨论行列式的定义，行列式的基本性质及计算方法，利用行列式求解线性方程组（克莱姆法则）.

1.1　排　列

定义 1　由正整数$1,2,\cdots,n$组成的一个没用重复数字的 n 元有序数组，称为一个 n 级排列，简称**排列**，记作$i_1\,i_2\cdots i_n$.

例如，3 4 1 2 是一个 4 级排列；5 2 3 4 1 是一个 5 级排列.

n 个不同元素的所有不同排列的个数，称为**排列数**.

由数$1,2,3$组成的所有 3 级排列为：1 2 3，1 3 2，2 1 3，2 3 1，3 1 2，3 2 1，排列数为$3!=6$.

n 级排列的排列数为 $n!$.

将数字按从小到大顺序排列构成的 n 级排列$1\,2\,3\,4\cdots n$，称为一个**标准排列**或**自然排列**.

定义 2　在一个 n 级排列$i_1\,i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$中，如果有较大的数$i_t$排在较小的数$i_s$的前面（$i_t>i_s$），则称$i_t$与$i_s$构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数，称为这个排列的**逆序数**，记作$\tau(i_1\,i_2\cdots i_n)$.

显然，自然排列的逆序数为 0.

逆序数的求法：设在一个 n 级排列$i_1\,i_2\cdots i_n$中，所有比i_t $(t=1,2,\cdots,n)$大且排在i_t前面的数共有t_i个，则i_t的逆序数个数为t_i. 该排列中所有自然数的逆序数个数之和就是这个排列的逆序数，即

$$\tau(i_1\,i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i\ .$$

例如，$\tau(4\,2\,1\,3\,6\,5)=0+1+2+1+0+1=5$.

例 1　求下列排列的逆序数.

（1）6 3 7 2 4 5 8 1；

（2）$n\,(n-1)\cdots 3\,2\,1$.

解：（1）$\tau(6\,3\,7\,2\,4\,5\,8\,1)=0+1+0+3+2+2+0+7=15$；

（2）$\tau[n\,(n-1)\cdots3\,2\,1]=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$.

定义 3 若排列 $i_1\,i_2\cdots i_n$ 的逆序数 $\tau(i_1\,i_2\cdots i_n)$ 是奇数，则此排列称为**奇排列**；若逆序数 $\tau(i_1\,i_2\cdots i_n)$ 是偶数，则此排列称为**偶排列**.

例如，$\tau(5\,2\,3\,4\,1)=0+1+1+1+4=7$，则排列 5 2 3 4 1 是奇排列；自然排列 $1\,2\,3\cdots n$ 的逆序数为 0，则该自然排列 $1\,2\,3\cdots n$ 是偶排列.

定义 4 在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果将其中某两个数 i_s 与 i_t 对调位置，其余各数位置不变，得到一个新的 n 级排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的变换称为一次**对换**，记作 $(i_s\,,i_t)$．将相邻两个元素对调，称为相邻对换，简称**邻换**.

例如，在偶排列 3 4 1 2 中，将 4 与 2 对换，得到新的排列 3 2 1 4．新排列 3 2 1 4 是奇排列.

定理 1 任一排列经过一次对换后，排列的奇偶性会发生改变.

定理 2 在所有的 n 级排列中（$n\geqslant2$），奇排列与偶排列的个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

定理 3 任一 n 级排列 $i_1\,i_2\cdots i_n$ 都可以通过一系列对换调成自然排列 $1\,2\,3\cdots n$，且奇排列调成自然排列的对换次数为奇数，偶排列调成自然排列的对换次数为偶数.

习题 1.1

1．一个排列的逆序数除了书中提到的计算方法，是否还有其他求法？

2．求下列排列的逆序数.

（1）5 8 6 9 2 4 3 1 7；

（2）$1\,3\,5\cdots(2n-1)\,2\,4\cdots(2n)$.

3．试求 i, j 的值，使（1）$1\,2\,4\,5\,i\,6\,j\,9\,7$ 为奇排列；（2）$3\,9\,7\,2\,i\,1\,5\,j\,4$ 为偶排列.

4．排列 $n\,(n-1)\,(n-2)\cdots3\,2\,1$ 经过多少次相邻两数对换可变成自然排列？

1.2 行列式的概念

行列式的概念起源于线性方程组求解.

1.2.1 二阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

用消元法求解，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，有

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

式（1-2）是一般二元线性方程组的公式解．为了方便记忆，人们引进行列式符号来表示它．

定义 1 将 2×2 个数排成两行两列，并在左右两侧各加一条竖线，得到算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1-3}$$

称为**二阶行列式**，记为 D 或 $\det(a_{ij})$．其中数 a_{ij} 称为行列式的元素，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表示这个元素所在的行数；第二个下标 j 称为列标，表示这个元素所在的列数．

对角线法则可帮助记忆二阶行列式的计算，即二阶行列式的值等于主对角线上元素的乘积减去次对角线上元素的乘积之差．

注：从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线；从右上角到左下角的对角线称为次对角线．

二元线性方程组的解（1-2）可简单表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D} (D \neq 0). \tag{1-4}$$

其中，$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为方程组未知数的系数所组成的行列式，称为方程组的系数行列式；$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$（用方程组的常数项代替系数行列式的第 1 列）；$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$（用方程组的常数项代替系数行列式的第 2 列）．

例 1 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + \ \ x_2 = 3. \end{cases}$

解：因为 $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\times 1 - (-2)\times 2 = 7 \neq 0$，且 $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$，$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$，

所以 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{7}{7} = 1$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{7}{7} = 1$．

例 2 计算下列各行列式的值．

（1）$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} 1 & -\tan x \\ \cot x & 1 \end{vmatrix}$．

解：（1）$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3\times4-1\times(-2)=14$；

（2）$\begin{vmatrix} 1 & -\tan x \\ \cot x & 1 \end{vmatrix} = 1\times1-(-\tan x)\times\cot x = 2$.

1.2.2 三阶行列式

设三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1-5}$$

利用消元法，可以求出类似于二元线性方程组的解 x_1，x_2，x_3．为了方便记忆，给出三阶行列式的定义．

定义 2 将 3×3 个数排成三行三列，并在左右两侧各加一条竖线，得到算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}, \tag{1-6}$$

称为**三阶行列式**，记为 D．

三阶行列式可通过对角线法则进行计算，如图 1-1 所示．实线连接的三个元素之积取正，虚线连接的三个元素之积取负．

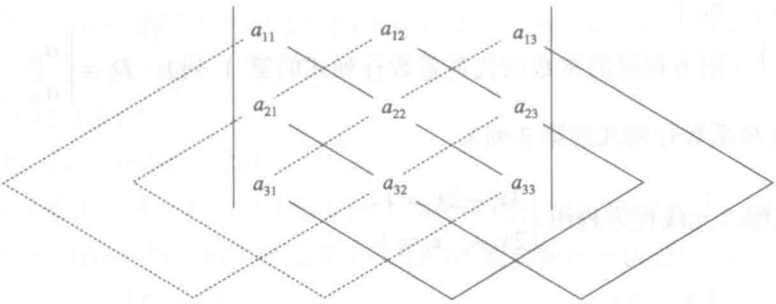

图 1-1

若令 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$，

$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$．当 $D\neq0$ 时，方程组（1-5）的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1-7}$$

它的结构与前面二元一次线性方程组的解（1-4）类似.

例 3 计算三阶行列式$D=\begin{vmatrix}2&1&2\\-4&3&1\\2&3&5\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}2&1&2\\-4&3&1\\2&3&5\end{vmatrix}=2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3-2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times3\times1$

$=10$.

例 4 求解方程$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=0$.

解：方程左端的三阶行列式$D=3x^2+4x+18-9x-2x^2-12=x^2-5x+6$.

解方程$x^2-5x+6=0$，得$x=2$ 或 $x=3$.

例 5 已知$\begin{vmatrix}a&b&0\\-b&a&0\\1&0&1\end{vmatrix}=0$，其中$a,b$均为实数，则$a,b$应满足什么条件？

解：若要$\begin{vmatrix}a&b&0\\-b&a&0\\1&0&1\end{vmatrix}=a^2+b^2=0$，则$a$与$b$必须同时等于零.

因此，当$a=0$且$b=0$时，行列式等于零.

行列式在平面几何中的应用有以下两个结论.

已知平面上有$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$三点，若这三点共线，则$\begin{vmatrix}1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\\1&x_3&y_3\end{vmatrix}=0$；

若这三点不共线，则$\triangle ABC$的面积等于行列式$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\\1&x_3&y_3\end{vmatrix}$的绝对值.

1.2.3 n 阶行列式

我们从观察二阶、三阶行列式的特征入手，引出n阶行列式的定义. 已知二阶与三阶行列式分别为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\ .$$

从中我们可以发现以下规律.

（1）二阶行列式是2！项的代数和，三阶行列式是3！项的代数和.

（2）二阶行列式中每一项是两个元素的乘积，它们分别取自不同的行和不同的列；三阶行列式中的每一项是三个元素的乘积，它们也是取自不同的行和不同的列.

（3）每一项的符号：当这一项中元素的行标是按自然排列时，如果元素的列标为偶排列，则该项取正号；如果元素的列标为奇排列，则该项取负号.

通过以上分析，二、三阶行列式可按以下方式定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1 p_2)} (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \quad \text{（其中}\ \tau\ \text{为排列}\ p_1\ p_2\ \text{的逆序数），}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1 p_2 p_3)} (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} \quad \text{（其中}\ \tau\ \text{为排列}\ p_1\ p_2\ p_3\ \text{的逆序数）.}$$

推广到一般，我们可得到n阶行列式的定义.

定义3 将$n\times n$个数排成n行n列，并在左右两侧各加一条竖线，得到算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)} (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}\ , \tag{1-8}$$

称为n**阶行列式**，记为D. 其中，$p_1 \cdots p_n$为自然数$1,2,3,\cdots,n$的一个排列，$\tau = \tau(p_1 \cdots p_n)$，$\sum\limits_{(p_1 p_2 \cdots p_n)}$是对所有$n$级排列$p_1 \cdots p_n$求和.

当$n=1$时，一阶行列式为$|a_{11}| = a_{11}$，注意不要将其与绝对值概念混淆.

例6 在五阶行列式中，$a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$这一项应取什么符号？

解：这一项各元素的行标是按自然排列，而列标的排列为2 3 5 1 4. 因$\tau(23514)=4$，故该项取正号.

例7 计算四阶行列式$D = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & e & f \\ u & v & g & h \end{vmatrix}$.

分析：按行列式的定义，它应有4! = 24项．但只有$adeh$，$adfg$，$bceh$，$bcfg$这四项不为零．与这四项相对应列标的排列分别为1 2 3 4，1 2 4 3，2 1 3 4和2 1 4 3，它们的逆序数分别为0，1，1，2，所以第一、四项应取正号，第二、三项应取负号．

解：$D = adeh - adfg - bceh + bcfg$．

例 8 利用行列式定义计算 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$．

分析：$D_n = \sum\limits_{(p_1 p_2 \cdots p_n)} (-1)^\tau a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$，从行列式的构成可知，不为0的项，只有

$p_1 = 2, p_2 = 3, \cdots, p_{n-1} = n, p_n = 1$．

解：$D_n = (-1)^\tau a_{12} a_{23} \cdots a_{(n-1)n} a_{n1} = (-1)^{\tau(23\cdots n1)} n! = (-1)^{n-1} n!$．

定理 1 n阶行列式也可定义为

$$D = \sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)} (-1)^\tau a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}, \tag{1-9}$$

其中 $\sum\limits_{(p_1 p_2 \cdots p_n)}$ 是对所有n级排列$p_1 \cdots p_n$求和，$\tau = \tau(p_1 \cdots p_n)$．

1.2.4 特殊行列式

下面给出经常会碰到的一些特殊行列式，它们的值可以由n阶行列式的定义得到．

（1）形如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

的n阶行列式，称为上三角行列式，其主对角线以下的元素全为0．

（2）形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$