高等院校“十三五”应用型规划教材

概率论与数理统计

主　编　陈玲菊
副主编　高培旺　董哈微　金秀玲

南京大学出版社

高等院校"十三五"应用型规划教材

概率论与数理统计

主　编　陈玲菊
副主编　高培旺　董哈微　金秀玲

扫码加入读者圈 轻松解决重难点

南京大学出版社

内容提要

概率论与数理统计是研究随机现象规律性的一门数学学科，在自然科学、工程技术、经济管理等领域有着广泛应用. 正因如此，概率论与数理统计成为高等学校理工科、经济学和管理学等专业学生必修的基础课程.

本书按照我国现行的高等院校工科类和经管类“概率论与数理统计”课程的教学大纲，结合全国硕士研究生入学考试对“概率论与数理统计”的基本要求编写而成. 全书共分八章，前五章为概率论部分，主要介绍随机事件及概率、一维和多维随机变量及分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理，后三章为数理统计部分，主要介绍统计量及分布、参数估计和假设检验. 本书内容安排力求做到全面合理，逻辑清晰，每一章都配有教学小结、每节习题及每章综合练习等.

本书可作为高等院校非数学专业及各类成人教育的数学教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 陈玲菊主编. — 南京：南京大学出版社，2018. 8

ISBN 978 - 7 - 305 - 20459 - 3

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 142743 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　　编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 概率论与数理统计
主　　编 陈玲菊
责任编辑 戴 松 沈 洁　　编辑热线 025 - 83596997

扫一扫可免费
申请教学资源

照　　排 南京理工大学资产经营有限公司
印　　刷 徐州新华印刷厂
开　　本 787×1092 1/16 印张 13.25 字数 322 千
版　　次 2018 年 8 月第 1 版 2018 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 305 - 20459 - 3
定　　价 36.00 元

网　　址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
微信服务号：njuyuexue
销售咨询热线：(025)83594756

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象规律性的一门数学学科，在自然科学、工程技术、经济管理等领域有着广泛应用. 正因如此，概率论与数理统计成为高等学校理工科、经济学和管理学等专业学生必修的基础课程.

本书按照我国现行的高等院校工科类和经管类“概率论与数理统计”课程的教学大纲，结合全国硕士研究生入学考试对“概率论与数理统计”的基本要求编写而成. 全书共分八章，前五章为概率论部分，主要介绍随机事件及概率、一维和多维随机变量及分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理，后三章为数理统计部分，主要介绍统计量及分布、参数估计和假设检验. 本书内容安排力求做到全面合理，层次分明，逻辑清晰，有利于学生梳理和归纳总结所学知识. 本书每一章都配有教学小结、每节习题及每章综合练习等，方便读者的学习.

本书的编写凝炼了以下几个特色：

1. 尽可能从实际背景和直观示例出发，引入“概率论与数理统计”的基本概念和基本理论，以符合现代“大众教育”背景下学生的认知规律.

2. 在学习难度上注重循序渐进，基础与提高相结合，每章在综合练习中都安排一定量的历届研究生入学试题，使学生有所取舍，满足不同层次学生的需要.

3. 语言表述力求简洁，深入浅出，例题选取丰富，解题分析透彻，富有启发性，便于自学.

本书可作为我国普通高等院校工科类和经管类的“概率论与数理统计”教材，尤其适合新建本科院校、独立学院和民办学院相关专业学生的需要，对有志于考研的学生也有很大帮助.

编者全部是具有丰富教学经验的一线教师，他们总结自己的所教所用，希望能帮助学生更好地理解和掌握“概率论与数理统计”的概念、方法和应用. 本教材第一章、第二章和第五章由陈玲菊老师编写，第三章、第四章由金秀玲老师编写，第七章由高培旺老师编写，第六章、第八章由董哈微老师编写，全书由陈玲菊老师负责统稿.

本书由闽江学院数学系吴炳烨教授担任主审，他认真审阅了原稿，并提出许多改进意见，对此我们表示衷心感谢.

限于编者水平，书中难免会有疏漏之处，恳请读者批评指正.

作　者

2018 年 1 月于福州

目　录

第一章

随机事件与概率

概率论起源于赌博问题. 大约在 17 世纪中叶,掷骰子、扔硬币等赌博游戏在欧洲皇室贵族中盛行起来,其中涉及的一些随机性问题引起了数学家的注意和思考. 1657 年,荷兰数学家惠更斯(Hugenes)在与法国数学家帕斯卡(Pascal)和费马(Fermat)通信的基础上出版了《论赌博中的计算》,这是概率论发展史上的第一部专著. 而真正揭开概率论历史的是伯努利(James Bernoulli)于 1713 年出版的《猜度术》. 之后,随着以拉普拉斯(Laplace)、高斯(Gauss)、泊松(Poisson)等一代代数学家的努力,概率论作为一门数学分支日趋完善,渐渐形成了一个严格的数学体系.

概率论与数理统计的研究对象是随机现象. 人们通常把各种各样的客观现象分为两类:一类是**确定性现象**或**必然现象**,其特点是一定条件下必然发生. 如太阳从东边升起,在一个标准大气压下把水加热到 100 ℃必然会沸腾等. 另一类是**随机现象**或**偶然现象**,其特点是在相同的条件下,每次观察或试验可能出现不同结果. 如在相同的条件下抛一枚均匀的硬币,其结果可能是正面向上,也可能是反面向上;重复投掷,每次的结果在出现之前都不能确定. 由于随机现象的结果事先不能预知,初看似乎毫无规律. 然而人们发现同一随机现象大量重复出现时,其每种可能的结果出现的频率具有稳定性,例如,大量重复抛一枚硬币,得正面朝上的次数与正面朝下的次数大致都是抛掷总次数的一半. 大量的重复试验或观察中所呈现出的固有规律性,就是我们以后所说的统计规律性. 而概率论正是研究这种随机(偶然)现象,寻找其内在统计规律性的一门数学学科.

概率论的理论和方法应用十分广泛,几乎遍及工、农业生产,国防,经济管理,科学研究等所有领域. 如应用概率统计方法进行气象预报、水文预报和市场预测等;在工业中,对产品寿命进行估计和可靠性分析等.

第一节　随机事件

一、随机试验与样本空间

为了对随机现象的统计规律性进行研究,就需要对随机现象进行重复观察或试验,记为 E. 下面是一些试验的例子:

E_1:投掷两枚硬币,观察正面(H)、反面(T)朝上的情况.

E_2：投掷两枚硬币，观察正面(H)出现的个数.

E_3：掷一颗骰子，观察出现的点数.

E_4：记录某城市 120 电话一昼夜接到的呼叫次数.

E_5：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命.

上述试验具有如下三个特点：

1. 可重复性：试验可以在相同的条件下重复进行；

2. 可观察性：试验可能结果不止一个，但在试验前可明确所有可能结果；

3. 不确定性：每次试验出现的结果事先不能准确预知.

一般地，我们把具有以上特征的试验称为**随机试验**，简称**试验**，记为 E. 特别指出，本书以后所提到的试验均指随机试验.

把试验 E 的所有可能结果组成的集合称为**样本空间**，用 $\Omega=\{\omega\}$ 表示，其中元素 ω 为试验的结果，称之为**样本点**.

设 Ω_i 表示试验 $E_i(i=1,2,3,4,5)$ 的样本空间，则

(1) $\Omega_1=\{HH,HT,TH,TT\}$；

(2) $\Omega_2=\{0,1,2\}$；

(3) $\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$；

(4) $\Omega_4=\{0,1,2,\cdots\}$；

(5) $\Omega_5=\{t\,|\,t\geqslant 0\}$.

应该注意的是，试验 E_1 和 E_2 同是抛掷两枚硬币，但由于试验的目的不一样，所以样本空间也不一样，这说明试验目的决定样本空间.

二、随机事件

进行试验时，人们往往关心试验的结果，这些结果都可以表示为样本空间 Ω 的子集，称为**随机事件**，简称**事件**，通常用大写字母 A、B、C 等表示. 例如，投掷一颗骰子出现的点数为偶数可用事件 A 表示，$A=\{$出现的点数为偶数$\}=\{2,4,6\}$，而 $B=\{$出现的点数大于 4$\}=\{5,6\}$等等都是随机事件. 在一次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一**事件发生**.

特别地，由一个样本组成的单点集，称为**基本事件**. 例如 E_1 中，有 4 个基本事件$\{HH\}$，$\{HT\}$，$\{TH\}$，$\{TT\}$. 样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是自身的子集，在每次试验中必然发生，称为**必然事件**. 空集$\varnothing$不包含任何样本点，但也作为样本空间的子集，在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**.

三、事件之间的关系与运算

事件是个集合，因此事件间的关系与运算应该按照集合之间的关系与运算来处理. 为了掌握较复杂的事件，我们往往要借助事件间的关系与运算.

(一) 事件的包含关系

设在同一个试验 E 中有两个事件 A 与 B，若 A 发生必然导致 B 发生(即 A 中任意一个基本事件都在 B 中)，则称事件B **包含**事件 A，记作 $B\supset A$(或 $A\subset B$).

例如，在投掷一颗骰子的试验中，设 $A=\{$出现 4 点$\}$，$B=\{$出现偶数点$\}$，则 A 发生必导

致 B 发生,故 $A\subset B$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与 B **相等**,记作 $A=B$.

例:掷一颗骰子试验中,记 $A=\{$掷出 3 点或 6 点$\}$,$B=\{$掷出 3 的倍数点$\}$,这两个事件所包含样本点相同,因而 $A=B$.

(二) 和事件

称事件 A 和 B 至少有一个发生所构成的事件为 A 与 B 的**和事件**,记作 $A\cup B$ 或 $A+B$.

例如,在投掷一颗骰子的试验中,设 $A=\{1,3,5\}$,$B=\{1,2,3\}$,则 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$. 又如,在测试灯泡寿命的试验中,令 $B=\{t|t\leqslant 1\,000\}$ 为寿命不超过 1 000 小时的事件,$A=\{t|t\leqslant 500\}$ 为寿命不超过 500 小时的事件,则 $A\cup B=\{t|t\leqslant 1\,000\}$ 表示寿命不超过 1 000 小时的事件.

(三) 积事件

称事件 A 与 B 同时发生所构成的事件为 A 与 B 的**积事件**,记作 $A\cap B$ 或 AB.

例如,在投掷一颗骰子的试验中,设 $A=\{2,4,6\}$,$B=\{3,4,5\}$,则 $AB=\{4\}$,即只有随机试验出现 4 点时,A 与 B 同时发生.

(四) 互斥事件

若事件 A 与 B 不能同时发生,则称事件 A 与 B 是**互斥事件或互不相容事件**,记作$AB=\varnothing$.

例如,在投掷一颗骰子的试验中,设 $A=\{$出现奇数点$\}$,$B=\{$出现 4 点$\}$,则有 $AB=\varnothing$,即 A 与 B 互斥.

(五) 互逆事件

若事件 A 与事件 B 在一次试验中必有且只有一个发生,则称事件 A 与 B 为**互逆事件**或**对立事件**,记作 $A=\overline{B}$或 $B=\overline{A}$.

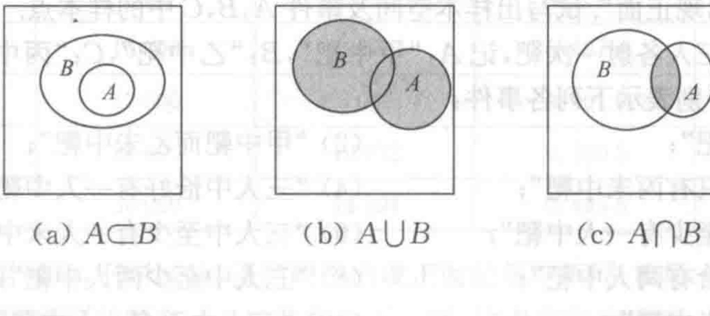
例如,在投掷一颗骰子的试验中,设 $A=\{$出现奇数点$\}$,$B=\{$出现 4 点$\}$,$C=\{$出现偶数点$\}$,则有 $AC=\varnothing$,且 $A\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega$,所以 $C=\overline{A}$,即 A 与 C 是互逆事件;又 $AB=\varnothing$,但 $A\cup B=\{1,3,4,5\}\neq\Omega$,故 A、B 不是互逆事件.

(六) 差事件

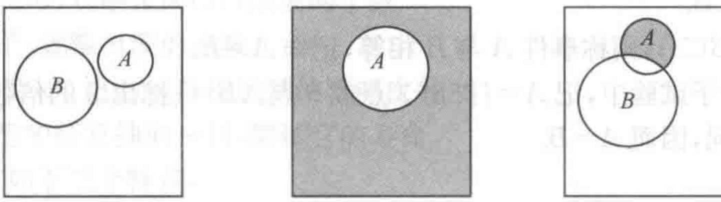
称事件 A 发生而 B 不发生所构成的事件为 A 与 B 的**差事件**,记作 $A-B$ 或 $A\overline{B}$.

例如,在投掷一颗骰子试验中,令 $C=\{2,4,6\}$,$D=\{1,2,3\}$,则 $C-D=C\overline{D}=\{4,6\}$,$D-C=D\overline{C}=\{1,3\}$.

我们可以通过如图 1-1 所示的维恩(Venn)图来表示上述事件的关系与运算.



(a) $A\subset B$　　(b) $A\cup B$　　(c) $A\cap B$



(d) A 与 B 互斥　　(e) $\overline{A}$　　(f) $A-B$

图 1-1　维恩(Venn)图

与集合论中集合的运算一样,事件之间的运算满足下述运算规律:

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A, AB=BA$.

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;$(AB)C=A(BC)$.

(3) 分配律:$(A\cup B)C=AC\cup BC$;$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

(4) 德·摩根定律(对偶律):$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

这些运算规律都可以推广到任意多个事件的情形.

例　以 A,B,C 分别表示某城市居民订阅日报、晚报和体育报. 试用 A,B,C 表示以下事件:

(1) 只订阅日报;　(2) 只订阅日报和晚报;

(3) 只订阅一种报;　(4) 正好订阅两种报;

(5) 至少订阅一种报;　(6) 不订阅任何报;

(7) 至多订阅一种报;　(8) 三种报纸都订阅;

(9) 三种报纸不全订阅.

解:(1) $A\overline{B}\overline{C}$;(2) $AB\overline{C}$;

(3) $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$;(4) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$;

(5) $A+B+C$;(6) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(7) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}$或$\overline{A}\overline{B}+\overline{A}\overline{C}+\overline{B}\overline{C}$;

(8) ABC;(9) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$.

习题 1.1

1. 将一枚均匀的硬币投掷三次,事件 A,B,C 分别表示"第一次出现正面""两次出现正面""至少有一次出现正面". 试写出样本空间及事件 A,B,C 中的样本点.

2. 甲、乙、丙三人各射一次靶,记 A:"甲中靶",B:"乙中靶",C:"丙中靶". 则用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件:

(1)"甲未中靶";　(2)"甲中靶而乙未中靶";

(3)"三人中只有丙未中靶";　(4)"三人中恰好有一人中靶";

(5)"三人中至少有一人中靶";　(6)"三人中至少有一人未中靶";

(7)"三人中恰有两人中靶";　(8)"三人中至少两人中靶";

(9)"三人均未中靶";　(10)"三人中至多一人中靶";

(11)"三人中至多两人中靶".

3. 甲、乙、丙三人各射击一次，事件 A_1, A_2, A_3 分别表示甲、乙、丙射中. 试说明下列事件所表示的结果：$\overline{A_2}, A_2+A_3, \overline{A_1A_2}, \overline{A_1+A_2}, A_1A_2\overline{A_3}, A_1A_2+A_2A_3+A_1A_3$.

4. 设事件 A 为甲种产品畅销或乙种产品滞销，那么 A 的对立事件 $\overline{A}$ 为　(　　)

(A) 甲种产品滞销，乙种产品畅销　(B) 甲种产品滞销

(C) 甲、乙两种产品均畅销　(D) 甲种产品滞销或者乙种产品畅销

5. 若事件 A,B,C 满足 $A+C=B+C$，试问：$A=B$ 是否成立？试举例说明.

第二节　随机事件的概率

在一次随机试验中，随机事件 A 是否会发生，事先不能确定. 但我们可以问，在一次试验中，事件 A 发生的可能性有多大？并希望找到一个合适的数来刻画这种可能性的大小. 这个用来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的数称为**概率**. 在概率论发展初期，概率是用频率来定义的.

一、频率

定义 1　若在相同条件下进行 n 次试验，其中事件 A 发生的次数为 $r_n(A)$，则称 $f_n(A)=\dfrac{r_n(A)}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**.

易见，频率具有下述基本性质：

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$.

(2) $f_n(\Omega)=1$.

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_n).$$

例 1（抛硬币试验）　历史上有不少人做过抛硬币试验，得到如表 1-1 所示的数据.

表 1-1　抛硬币试验

试验者	n	r_n	f_n	$\lvert f_n-0.5\rvert$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1	0.018 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9	0.006 9
费　勒	10 000	4 979	0.497 9	0.002 1
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6	0.001 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5	0.000 5
维　尼	30 000	14 994	0.499 8	0.000 2

观察表中数据可知，不同试验，得到硬币出现正面的频率不同. 实际上，即使试验次数相同，不同的投掷时间得到的频率 $f_n(A)$ 往往也不一样. 这表明频率具有一定的**随机波动性**. 另一方面，正如表 1-1 所示，随着试验次数的增大，$f_n(A)$ 逐渐稳定于 0.5，这说明频率具有

稳定性.这一性质将在第五章的“大数定律”中进行严格证明.因此,以频率的稳定值来给出概率的统计定义.

定义 2　在相同条件下重复进行 n 次试验,若事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\frac{r_n(A)}{n}$ 随着试验次数 n 的增大而稳定地在某个常数 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$ 附近摆动,则称 p 为事件 A 的概率,记为 $P(A)$.

在实际应用时,往往是用试验次数足够大的频率来估计概率的大小,且随着试验次数的增加,估计的精度会越来越高.

例 2　圆周率 $\pi=3.141\,592\,6\cdots$ 是一个无限不循环小数,我国数学家祖冲之第一次把它计算到小数点后七位,这个记录保持了 1 000 多年.以后有人不断把它算得更精确,1873 年,英国学者沈克士公布了一个 π 的数值,它的数目在小数点后一共有 707 位之多.但几十年后,曼彻斯特的费林对它产生了怀疑.他统计了 π 的 608 位小数,得到了下表:

表 1-2　π 计算出现的数字统计

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
出现次数	60	62	67	68	64	56	62	44	58	67

你能说出他产生怀疑的理由吗?

因为 π 是一个无限不循环小数,所以,理论上每个数字出现的次数应近似相等,或它们出现的频率应都接近于 0.1.但在沈克士的计算结果中 7 出现的频率过小.这就是费林产生怀疑的理由.

二、概率的公理化定义与性质

概率的统计定义很直观地为概率提供了经验基础.但是,它建立在大量的试验基础上,有时难以实现,并且也不严格,因此难以做理论上的推广.那么,如何给出一个具有广泛适用性的概率的定义呢?从概率论有关问题的研究算起,经过近三个世纪的漫长探索历程,人们才真正完整地解决了概率的严格数学定义.1933 年,前苏联著名的数学家柯尔莫哥洛夫在他的《概率论基础》一书中给出了现在已被广泛接受的**概率公理化体系**,第一次将概率论建立在严密的逻辑基础上.

定义 3　设 E 是随机试验,Ω 是它的样本空间,对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,若 $P(A)$ 满足下列三个条件:

(1) **非负性**:对每一个事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$.

(2) **完备性**:$P(\Omega)=1$.

(3) **可列可加性**:设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

概率有如下性质:

性质 1　$P(\varnothing)=0$.

性质 2(有限可加性)　设有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相斥,则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

性质 3(对立事件的概率)　对任何事件 A,有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

证　因 $A\overline{A}=\varnothing$ 且 $A\cup\overline{A}=\Omega$,由性质 2,有

$$P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

又 $P(\Omega)=1$,故

$$P(A)+P(\overline{A})=1,$$

即
$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 4(减法公式和事件的单调性)　设 A、B 为两个事件,且 $B\subset A$,则(1) $P(A-B)=P(A)-P(B)$;(2) $P(B)\leqslant P(A)$.

证　(1) 因为 $B\subset A$,所以 $A=B\cup(A-B)$ 且 $(A-B)B=\varnothing$,由有限可加性,得

$$P(A)=P(B)+P(A-B),$$

即
$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

(2) 根据概率的非负性,知 $P(A-B)\geqslant 0$,再由(1),可得 $P(B)\leqslant P(A)$.

注:一般情况下,对任意事件 A、B,有

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB).$$

另,又由(2) 易知对任何事件 A,$P(A)\leqslant 1$ 成立.

性质 5(加法定理)　设 A、B 为任意两个事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证　因 $A\cup B=A\cup(B-AB)$,且 $A(B-AB)=\varnothing$,由性质 2、4,得

$$P(A\cup B)=P[A+(B-AB)]=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质 5 可以推广到多个事件的情形.

设 A_1,A_2,A_3 是任意 3 个事件,则有

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

一般地,对于 n 个 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例 3　设 $P(A)=\frac{1}{3}$,$P(B)=\frac{1}{2}$,分别在下列条件下求 $P(B\overline{A})$:

(1) $A\subset B$;　(2) A 与 B 互斥;　(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解:$P(B\overline{A})=P(B-AB)=P(B)-P(AB)$.

(1) $A\subset B$,则 $P(AB)=P(A)$,因此

$$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)=\frac{1}{6}.$$

(2) 若 A、B 互斥,则 $P(AB)=0$,因此

$$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}.$$

(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$,因此

$$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

例 4 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$,$P(AB)=0$.求事件 A,B,C 全不发生的概率.

解:$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{A+B+C})=1-P(A+B+C)$

$$=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]$$

$$=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0\right)=\frac{3}{8}.$$

习题 1.2

1. 设 $P(A)=0.4$,$P(B)=0.3$,$P(A+B)=0.6$,求 $P(A-B)$.

2. 已知 $P(\overline{A})=0.5$,$P(\overline{A}B)=0.2$,$P(B)=0.4$,求:

(1) $P(AB)$; (2) $P(A-B)$;

(3) $P(A\cup B)$; (4) $P(\overline{A}\overline{B})$.

3. 观察某地区未来 5 天的天气情况,记 A_i 为事件:"有 i 天不下雨",已知 $P(A_i)=\frac{P(A_0)}{i}$,$i=1,2,3,4,5$.求下列各事件的概率:

(1) 5 天均下雨;

(2) 至少 1 天不下雨;

(3) 至多 3 天不下雨.

4. 设事件 A 与 B 互不相容,$P(A)=0.4$,$P(B)=0.3$,求 $P(\overline{A}\overline{B})$与 $P(\overline{A}\cup B)$.

5. 某企业与甲、乙两公司签订某商品的长期供货合同,从以往情况看,甲公司按时供货的概率为 0.9,乙公司按时供货的概率为 0.75,这两公司都按时供货的概率为 0.7,求至少有一家公司按时供货的概率.

第三节　古典概型与几何概型

一、古典概型

前面所提的掷骰子或投硬币的试验，都具有有限性和等可能性两个特点. 这是概率论发展初期主要研究的试验的特征，我们把这类试验称为**古典概型**，其数学定义如下：

定义 1　如果试验 E 满足：

(1) 试验的样本空间 Ω 只含有有限个样本点，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；**(有限性)**

(2) 每一个基本事件发生的可能性大小相同，即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})；\textbf{(等可能性)}$$

由于 $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\{\omega_i\}$，且基本事件 $\{\omega_i\}$ 是两两互不相容的，因此有

$$1=P(\Omega)=P(\bigcup_{i=1}^{n}\{\omega_i\})=P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+\cdots+P(\{\omega_n\})=1.$$

再由定义 1 中的(2) 得

$$P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n).$$

因此，若 $A\subset\Omega$，且 A 中包含有 k 个基本事件，即

$$A=\bigcup_{j=1}^{k}\{\omega_{i_j}\}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n),$$

则

$$P(A)=P(\bigcup_{j=1}^{k}\{\omega_{i_j}\})=\sum_{j=1}^{k}P(\{\omega_{i_j}\})=\frac{k}{n}.$$

例如在前面第一节所举抛掷两枚硬币的例子中，随机试验 E_1 所对应的样本空间 Ω_1 中每个样本点发生的可能性是相同的，即 $P(HH)=P(HT)=P(TH)=P(TT)=\dfrac{1}{4}$. 又如抽样检查产品时，一批产品中每一个产品被抽到的可能性在客观上是相同的，因而抽到任一产品是等可能的，因此，古典概型又称为**等可能概型**. 在概率论的产生和发展过程中，古典概型是最早研究，且在实际中也最常用的一种概率模型.

定义 2　若随机试验为古典概型，且样本空间 Ω 中含有 n 个基本事件，事件 A 中含有 k 个基本事件，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中所有的基本事件数}}=\frac{k}{n}. \tag{1-1}$$

称此概率为**古典概率**，这种确定概率的方法称为**古典方法**. 根据式(1-1)，求古典概率的问题转化为对基本事件的计数问题.

例 1 将一枚硬币抛掷 3 次，设事件 A_1 为“恰有一次出现正面”，A_2 为“至少出现一次正面”，求 $P(A_1)$，$P(A_2)$.

解：依题意，其样本空间为 $\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,TTH,THT,HTT,TTT\}$，它包含 8 个基本事件，且每个基本事件发生的可能性相同，故此试验为古典概型. 又 $A_1=\{TTH,THT,HTT\}$ 中包含的基本事件数为 $k=3$，故

$$P(A_1)=\frac{3}{8}.$$

而 $\overline{A}_2=\{TTT\}$，$P(\overline{A}_2)=\frac{1}{8}$，于是，$P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

例 2 100 个产品中有 3 个废品，任取 5 个，求其废品数分别为 0，1，2，3 的概率.

解：依题意得，Ω 的基本事件数 $n=C_{100}^5$. 设事件 $A_i(i=0,1,2,3)$ 表示取出的 5 个产品中有 i 个废品，则 A_i 所包含的基本事件数为 $k_i=C_3^iC_{97}^{5-i}(i=0,1,2,3)$. 因此，事件 $A_i(i=0,1,2,3)$ 发生的概率分别是

$$P(A_0)=\frac{C_{97}^5}{C_{100}^5}=0.856;$$

$$P(A_1)=\frac{C_3^1C_{97}^4}{C_{100}^5}=0.138\,06;$$

$$P(A_2)=\frac{C_3^2C_{97}^3}{C_{100}^5}=0.005\,88;$$

$$P(A_3)=\frac{C_3^3C_{97}^2}{C_{100}^5}=0.000\,061\,8.$$

推而广之，设有 N 件产品，其中有 M 件次品，现从中任取 n 件，则其中有 $k(k\leqslant M)$ 件次品的概率为 $C_M^kC_{N-M}^{n-k}/C_N^n$，我们称这个概率为**超几何概率**.

例 3(盒子模型) 将 n 个球随意地放入 N 个箱子中($N\geqslant n$)，假设每个球都等可能地放入任意一个箱子且每个箱子都可以容下全部的球，求：

(1) 指定的 n 个箱子各放 1 个球；

(2) 每个箱子最多放入 1 个球；

(3) 某指定的箱子里恰好放入 $k(k\leqslant n)$ 个球.

解：将 n 个球随意地放入 N 个箱子中，共有 N^n 种放法，记(1)、(2)、(3)的事件分别为 A,B,C.

(1) 将 n 个球放入指定的 n 个箱子，每个箱子各有 1 个球，其放法有 $n!$ 种，故有

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) 每个箱子最多放入 1 个球，等价于先从 N 个箱子中任选出 n 个，然后每个箱子中放入 1 个球，其放法有 $C_N^n n!$ 种，故

$$P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n}=\frac{A_N^n}{N^n}.$$

(3) 先任取 k 个球(有 C_n^k 种取法)放入指定的箱子中，然后将其余的$(n-k)$个球随意地

放入其余$(N-1)$个箱子，共有$(N-1)^{n-k}$种放法，故有

$$P(C)=\frac{C_n^k(N-1)^{n-k}}{N^n}.$$

下面我们用盒子模型来讨论概率论中的"生日模型".

例 4(**生日模型**)　有$n(n\leqslant 365)$个人，每人的生日在一年的 365 天中的任意一天是等可能的. 求：

(1) n个人的生日各不相同的概率P_1.

(2) n个人中至少有两个人生日相同的概率P_2；

解：(1) 将n个人看成是n个球，将 365 天看成 365 个盒子，则"n个人的生日各不相同"相当于"每个箱子最多放入 1 个球"，所以n个人的生日各不相同的概率为

$$P_1=\frac{A_{365}^n}{365^n}=\frac{365!}{365^n(365-n)!}.$$

(2) $P_2=1-P_1=1-\frac{A_{365}^n}{365^n}$.

例如，64 个人的班级里，生日各不相同的概率为

$$P_1=\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-64+1)}{365^{64}}.$$

至少有 2 人生日相同的概率为

$$P_2=1-P_1=1-\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-64+1)}{365^{64}}=0.997.$$

这表明在仅有 64 人的班级里，"至少有 2 个人的生日相同"的概率接近于 1，这和直观想象即我们平时想象的这种情况发生的可能性很小不太一样. 这也告诉我们，"直觉"并不可靠，同时也说明研究随机现象的统计规律是非常重要的.

二、几何概型

古典概型只考虑了有限个等可能结果的随机试验的概率模型. 这里我们进一步研究样本空间为一线段、平面区域或空间立体等的等可能随机试验模型，就是**几何概型**.

(1) 设样本空间Ω是平面上某个区域，它的面积记为$\mu(\Omega)$；A是Ω内一部分区域，其面积为$\mu(A)$.

(2) 向区域Ω内随机投掷一点，考察该点落在区域A的事件，仍记为A. 假设该点落入区域A的可能性只与区域A的面积$\mu(A)$成比例，而与区域A的位置和形状无关，则A概率为$P(A)=\lambda\mu(A)$，其中λ为常数，而$P(\Omega)=\lambda\mu(\Omega)$，由此得$\lambda=\frac{1}{\mu(\Omega)}$，于是，事件$A$的概率为

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.\tag{1-2}$$

称此概率为**几何概率**. 注意，若样本空间Ω为一线段或一空间立体，则向Ω"投点"的相应概